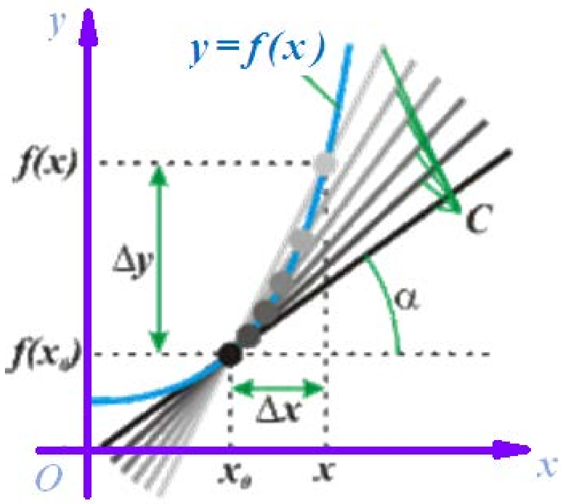
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КОЛЛЕДЖ

А. А. Касымалиева

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Учебное пособие



$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Бишкек 2020

УДК 519.677 (075.8)

Рецензенты:
Б. С. Аблабеков – д-р физ.-мат. наук, проф.,
Ж. А. Искендерова – д-р физ.-мат. наук, проф.,
К.И. Ишмахаметов– к-т физ.-мат. наук, доцент.

Составитель
А. А. Касымалиева

Рекомендовано к изданию колледжем КРСУ

А.А. Касымалиева
ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ. Учебное пособие / А.А. Касымалиева. – Бишкек: 2020. – 110 с.

Учебное пособие охватывает один из основных разделов курса математического анализа: производную функции. Большое внимание уделено разбору примеров по изучаемым темам, что облегчает восприятие материала.

Цель пособия – дать студенту необходимый объем знаний по разделу: производная функции.

Учебное пособие может быть использовано как конспект лекций, справочник. Пособие написано на понятном, простом языке, со многими решенными примерами и подобными заданиями для самостоятельной работы, что делает весьма увлекательным самостоятельное изучение материала. Учебное пособие составлено в соответствии с рабочей программой по курсу математики для студентов колледжа КРСУ. Рекомендовано для школьников старших классов; преподавательского состава, осуществляющему теоретическую и практическую подготовку студентов по дисциплине «Математика»; лицам, самостоятельно изучающим или осваивающим раздел «Производная функции».

В каждый раздел включено достаточное количество задач, примеров и упражнений, многие из которых иллюстрируют связь математики с другими дисциплинами.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальное исчисление было создано Ньютоном и Лейбницем в конце 17 столетия на основе двух задач:

1. О разыскании касательной к произвольной линии
2. О разыскании скорости при произвольном законе движения

Еще раньше понятие производной встречалось в работах итальянского математика Тартальи (около 1500–1557 гг.) - здесь появилась касательная в ходе изучения вопроса об угле наклона орудия, при котором обеспечивается наибольшая дальность полета снаряда.

В 17 веке на основе учения Г. Галилея о движении активно развивалась кинематическая концепция производной. Различные изложения стали встречаться в работах у Декарта, французского математика Роберваля, английского ученого Л. Грегори. Большой вклад в изучение дифференциального исчисления внесли Лопиталь, Бернулли, Лагранж, Эйлер, Гаусс.

Исследование поведения различных систем (технические, экономические, экологические и др.) часто приводит к анализу и решению уравнений, включающих как параметры системы, так и скорости их изменения, аналитическим выражением которых являются производные. Такие уравнения, содержащие производные, называются дифференциальными.

ТЕРМИНОЛОГИЯ

Под **множеством** в математике понимают совокупность каких-либо объектов, объединенных общим им всем признаком. Например: множество жилых домов данного района, множество студентов данного вуза, множество всех треугольников вписанных в данную окружность, множество всех рациональных чисел, множество всех векторов и т.д.. С точки зрения количественный различают конечные или бесконечные множества. Объекты, из которых составляются множества, называются его элементами. Например: жилые дома, студенты, треугольники, числа, векторы. Для обозначения множеств пользуются заглавными буквами: $A, B, C, ..., X, Y, ...$, а их элементы малыми буквами: $a, b, c, ..., x, y, ...$. К множеству относят и множество, не содержащее ни одного элемента. Его называют пустым множеством и обозначают символом $\varnothing$.

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие определенный элемент $y \in Y$, называется **функцией** и записывается $y = f(x),\ x \in X$ или $f : X \to Y$. Говорят еще, что функция f отображает множество X на Y. Множество X называется областью определения функции f и обозначения $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется множеством значений функции f и обозначается $E(f)$.

В дальнейшем используются следующие специальные множества:

N - всех натуральных чисел,

Z - всех целых чисел,

R - всех действительных чисел (числовая прямая),

R^2 - всевозможных упорядоченных пар действительных чисел (числовая плоскость),

R^3 - всевозможных упорядоченных трех действительных чисел (числовая пространства),

Также будем пользоваться символами:

$\Rightarrow$ - логическое следствие,

$\Leftrightarrow$ - логическая эквивалентность,

$\in$ - принадлежность элемента,

$\bar{\in}$ - не принадлежность элемента,

$\subset$ - принадлежность множества,

$\cup$ - объединение множеств,

$\cap$ - пересечение множеств,

$\forall$ - квантор всеобщности,

$\exists$ - квантор существования,

$n! = 1,2,..,n$ (n-факториал), $0! = 1$

$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$,

$f(x)$ - функция,

$D(f)$ - область определения функции f ,

$E(f)$ - область изменения функции f ,

Числовые функции. График функции.
Способы задания функций

Пусть задана функция $f : X \to Y$. Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т.е. $X \subset R$ и $Y \subset R$), то функцию f называют *числовой функцией*. В дальнейшем будем изучать (как правило) числовые функции, для краткости будем именовать их просто функциями, и записывать $y=f(x)$.

Переменная x называется при этом *аргументом* или независимой переменной, а y- *функцией* или *зависимой переменной* (от x). Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в функциональной зависимости. Иногда функциональную зависимость y от x пишут в виде $y = y(x)$, не вводя новой буквы (f) для обозначения зависимости.

Частное значение функции $f(x)$ при $x=a$ записывают так: $f(a)$.
Пример, если $f(x)=2x^2-3$, то $f(0)=-3$, $f(2)=5$.

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

1. *Аналитический способ*: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.
Например: 1) $S=\pi R^2$; 2) $y^2-4x=0$.

Если область определения функции $y = f(x)$ не указана, то предполагается, что она совпадает с множеством всех значений аргумента, при которых соответствующая формула имеет смысл. Так, областью определения функции $y=\sqrt{1-x^2}$ является отрезок $[-1;1]$.

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y = f(x)$.

2. *Графически способ:* задается график функции.

Часто графики вычерчиваются автоматически самопищущими приборами или изображаются на экране дисплея. Значения функции y, соответствующие тем или иным значениям аргумента x, непосредственно находятся из этого графика. Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком – его неточность.

3. *Табличный способ:* функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы.
На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

$\Delta x = x - x_0$ называется **приращением аргумента**.

$\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется **приращением функции.**

Глава 1. ПРОИЗВОДНАЯ

<u>Определение</u> *1.1:* **Производной** функции $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю:

$$\boldsymbol{y'} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mathbf{lim}_{\boldsymbol{\Delta x \to 0}} \frac{\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}}{\boldsymbol{\Delta x}}. \quad (1)$$

Обозначения для производной:

$\frac{df(x_0)}{dx}$ - Лейбниц, $f'(x_0)$ - Лагранж, $f'(x)$ - Ньютон, $Df(x_0)$ - Коши.

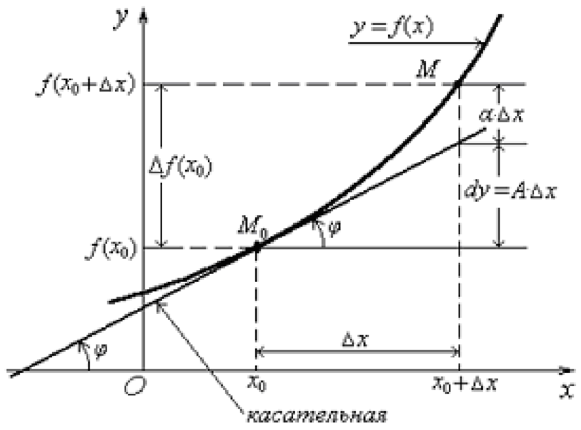
Аналогично определяются односторонние производные

$f'(x_0 + 0), \qquad f'(x_0 - 0).$

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

<u>Определение</u> *1.2:* Функция f определенная в окрестности точки x_0 называется **дифференцируемой в точке** x_0 если существует число A, такое, что приращение функции представимо в виде

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + O\,(x - x_0), \qquad x \to x_0$$



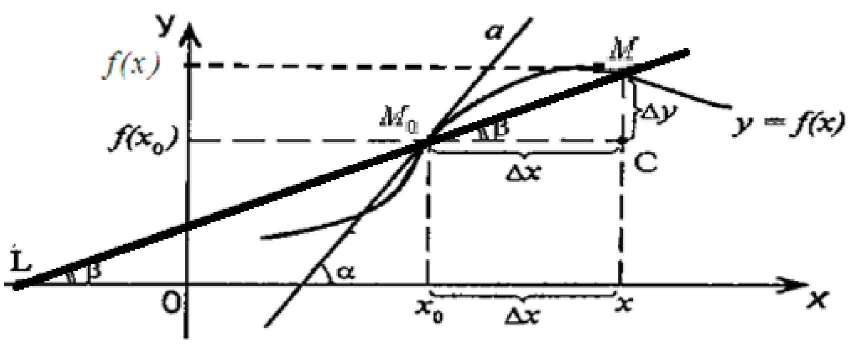
$\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,\quad f'(x_0)=tg\varphi$

<u>Определение</u> 1.3: Нахождение производной функции $y = f(x)$ называется **дифференцированием**.

§1.1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ПРОИЗВОДНОЙ

1.1.1. Геометрическая интерпретация производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, дифференцируемой в окрестностях точки x_0 :



Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через точку графика функции - точку $M_0(x_0,\ f\ (x_0))$ и пересекающую график в некоторой точке $M(x;f(x))$. Такая прямая (M_0M) называется **секущей**. Из $\Delta\ M_0MC$: $M_0C = \Delta x$; $MC = \Delta y$; $tg\beta=\Delta y/\Delta x$.

Так как $M_0C||Ox$, то $\angle M_0LO=\angle MM_0C=\beta$ (как соответственные при параллельных). Но $\angle M_0LO$ - это угол наклона секущей M_0M к положительному направлению оси Ox. Значит, $tg\beta = k$ - угловой коэффициент прямой M_0M.

Теперь будем уменьшать Δx, т.е. $\Delta x \to 0$. При этом точка M будет приближаться к точке M_0 по графику, а секущая M_0M будет поворачиваться. Предельным положением секущей M_0M при $\Delta x \to 0$ будет прямая *(a)*, называемая **касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0.

Если перейти к пределу при $\Delta x \to 0$ в равенстве $tg\beta = \Delta y/\Delta x$, то получим $\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\beta = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ или $tg\alpha = f'(x_0)$, так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0} tg\beta = tg\alpha$, α - угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, по определению производной. Но $tg\alpha = k$ - угловой коэффициент касательной, значит, $k = tg\alpha = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Итак, геометрический смысл производной заключается в следующем:

Производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции, проведенной в точке с абсциссой x_0.

***Теорема** 1.1.1:* Для существования $f'(x_0)$ необходимо и достаточно, чтобы f была дифференцируема в точке x_0.

Для доказательства можно воспользоваться критерием существования предела в терминах бесконечно малых.

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A \leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A + \alpha(x), \lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0.$$

***Замечание** 1.1.1.* Отметим, что $A = f'(x_0)$.

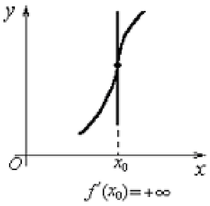
Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2)$$

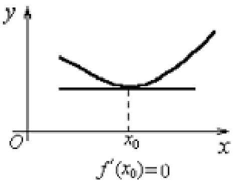
<u>Определение</u> 1.4: Прямая, перпендикулярная к касательной и проходящая через точку касания, называется **нормалью** к графику функции $y = f(x)$ в этой точке. Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 (x_0, y_0) имеет вид

$$(y - y_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (3)$$

***Замечание** 1.1.2:* Пусть $f'(x_0) = +\infty$ (или $-\infty$). Тогда касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ параллельна оси Oy, а уравнение касательной имеет вид $x = x_0$.



Замечание 1.1.3: Если $f'(x_0) = 0$, то касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0 параллельна оси Ox



Пример 1. Дана функция $f(x) = x^2 - 1$. Найти уравнение касательной к ее графику при $x = 1$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой $k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

1^0. Сначала найдем ординату точки касания: $f(1) = 1^2 - 1 = 0$.

Следовательно, $(1; 0)$-точка касания.

2^0. Составим уравнение прямой, проходящей через точку $(1; 0)$. Для этого воспользуемся известным из аналитической геометрии уравнением $y - y_1 = k(x - x_1)$, где $(x_1; y_1)$-найденная точка (1;0). Тогда получим $y = k(x - 1)$.

3^0. Чтобы составить уравнение касательной, нужно найти значение углового коэффициента $k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $x = 1$. Так как $\Delta y = \Delta f, (x0 = (x + \Delta x)^2 - 1) - (x^2 - 1) = x^2 + 2x\Delta 2 + (\Delta x)^2 - 1 - x^2 = 1 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

То $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$.

Следовательно, $k = 2x|_{X=1} = 2 \cdot 1 = 2$.

4^0. Ответ: уравнение касательной имеет вид $y = 2(x + 1)$, т.е. $y = 2x + 2$ или $2x - y + 2 = 0$.

Пример 2. Найти уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой 2.

Р е ш е н и е. Пусть $x_0=2$, $f(x)=x^2$. Тогда, $f(x_0)=4$, $f'(x)=2x$, $f'(x_0)=4$. По формуле (2) получаем уравнение касательной: $y-4=4(x-2)$ или $y-4x+4=0$. По формуле (3) получаем уравнение нормали: $y-4=-\frac{1}{4}(x-2)$ или $x+4y-18=0$.

Ответ: уравнение касательной $y-4x+4=0$, уравнение нормали $x+4y-18=0$.

Пример 3. Найти площадь треугольника, образованного прямой $y = y_0 +1$, касательной и нормалью, проведёнными к графику функции $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и ординатой y_0 .

Р е ш е н и е. Найдём ординату y_0 точки касания и $y'(x_0)=y'(1)$:

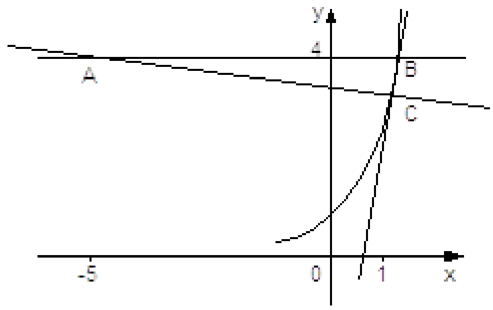
$$y_0 = y(1) = 1^3 + 2\cdot 1^2 - 1 + 1 = 3;$$

$$y'(x) = 3x^2 + 4x - 1; \quad y'(1) = 6.$$

Уравнением касательной является

$y = 3 + 6(x - 1)$ или $6x - y - 3 = 0$. Уравнение нормали имеет вид $y = 3 - \frac{1}{6}(x-1)$ или $x + 6y - 19 = 0$.

Найдём координаты точек A и B



$$\begin{cases} y = 4, \\ x + 6y - 19 = 0, \end{cases} \qquad A(-5;\, 4);$$

$$\begin{cases} y = 4, \\ 6x - y - 3 = 0, \end{cases} \qquad B\left(\frac{7}{6};\, 4\right).$$

Вычислим длины катетов AC и BC прямоугольного треугольника ABC:

$$|AC| = \sqrt{(-5-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{37},$$

$$|BC| = \sqrt{\left(\frac{7}{6}-1\right)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{37/36} = \sqrt{37}/6.$$

По этим данным найдём искомую площадь

Ответ: $S=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BC|=37/12.$

Задания для самостоятельного решения:

З-1. Найти угловой коэффициент касательный к параболе $y=x^2$ при $x=-1$.

З-2. Найти тангенс угла наклона касательной к кривой $y=x^2+5x-2$ в точке $(1;4)$.

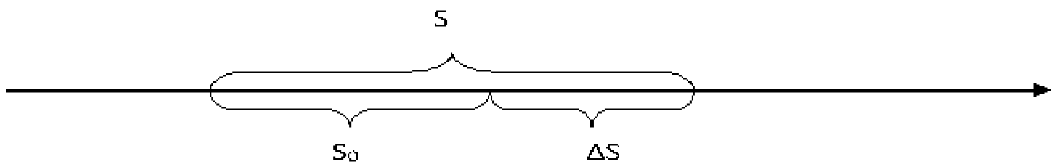
З-3. Составить уравнение касательной к кривой $y=x^2-3x+4$ в точке $(3;4)$.

1.1.2. Физический смысл производной

Производная – основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее ***скорость изменения функции.***

Равномерным движением называют такое движение, при котором тело в равные промежутки времени проходит равные по длине отрезки пути. Путь, пройденный телом в единицу времени, называют **скоростью** равномерного движение. Однако чаще всего на практике мы имеем дело с неравномерным движением. Автомобиль, едущий по дороге, замедляет движение у переходов и ускоряет его на тех участках, где путь свободен самолет снижает скорость при приземлении и т.д. Поэтому чаще всего нам приходится иметь дело с тем, что за равные отрезки времени тело приходит различные по длине отрезки пути. Такое движение называют **неравномерным**. Его скорость нельзя охарактеризовать одним числом. Часто для характеристики неравномерного движения пользуются понятием средней скорости движение за время Δt. Так, например, при свободном падении тело за 1 –ю секунду пройдёт путь $S_1=\frac{gt^2}{2}=\frac{g\cdot 1^2}{2}\approx 4{,}9(\text{м})$, а за 2-ю секунду $s_2=\frac{g\cdot 2^2}{2}-s_1\approx 14{,}7\ (\text{м})$. Средняя скорость за первые две секунды составляет 9/8 м/с. Как определить мгновенную скорость?

Пусть материальная точка движется по прямой в одном направлении по закону $s = f(t)$, где t - время, а s - путь, проходимый точкой за время t. Отметим некоторый момент времени t_0. К этому моменту точка прошла путь $s_0 = f(t_0)$. Поставим задачу определить скорость v_0 материальной точки в момент t_0. Рассмотрим для этого какой-нибудь момент времени $t_0 + \Delta t$. Ему соответствует пройденный путь $s = f(t_0 + \Delta t)$. Тогда за промежуток времени $t = t - t_0$ точка прошла путь $\Delta s = s - s_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$.



Средняя скорость движения v_{cp} за промежуток времени Δt определяется отношением $v_{cp} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ пройденного пути ко времени. Будем считать начальный момент времени t_0 фиксированным, а промежуток времени Δt - переменным. Тогда средняя скорость v_{cp} является переменной величиной, зависящей от Δt.

Скорость v_0 в данный момент t_0 называется пределом средней скорости v_{cp} при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \text{ или } v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Таким образом, для того, чтобы найти скорость v_0 в данный момент t_0, необходимо вычислить $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Коротко говорят: производная координаты по времени есть скорость. В этом состоит механический смысл производной.

Аналогично рассуждая, получаем, что производная от скорости по времени есть ускорение, т.е. $a(t) = v'(t)$.

Задача о теплоемкости тела

Чтобы температура тела массой в 1г повысилась от 0 градусов до t градусов, телу необходимо сообщить определенное количество тепла Q. Значит, Q

есть функция температуры t, до которой тело нагревается: Q = Q(t). Пусть температура тела повысилась с t_0 до t. Количество тепла, затраченное для этого нагревания, равно $Q(t)-Q(t_0)$ Отношение $\frac{Q(t)-Q(t_0)}{\Delta t}$ есть количество тепла, которое необходимо в среднем для нагревания тела на 1 градус при изменении температуры на Δt градусов. Это отношение называется средней теплоёмкостью данного тела и обозначается c_{cp}. Т.к. средняя теплоёмкость не дает представления о теплоёмкости для любого значения температуры T, то вводится понятие теплоёмкости при данной температуре t_0 (в данной точке t_0). Теплоемкостью при температуре t_0 (в данной точке) называется предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)}{\Delta t}=Q'(t_0)=c(t_0)$$

Производная от количества тепла, получаемого телом, по температуре есть теплоемкость.

Задача о линейной плотности стержня

Рассмотрим еще одну задачу, при решении которой придется находить такого же рода предел: Пусть дан тонкий прямолинейный неоднородный стержень длиной l (Стержень называют неоднородным, если на два участка одинаковой длины приходятся различные массы). Для такого стержня встаёт вопрос о скорости изменения массы в зависимости от его длины.

Определим плотность стержня в любой его точке. Предположим, что стержень расположен на оси Ox, причем один из его концов совпадает с началом координат. Тогда каждой точке стержня соответствует определенная координата x. Обозначим через m массу отрезка стержня между точками с координатами O и x. Ясно, что m является функцией x: $m=f(x)$. Рассмотрим две точки стержня: фиксированную точку x_0 и переменную $x_0+\Delta x$. Отрезок стержня, расположенный между этими точками, имеет длину Δx и массу $\Delta m = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ называется средней плотностью стержня на отрезке от точки x_0 до точки $x_0 + \Delta x$.

Плотностью δ стержня в точке x_0 называется предел средней плотности, когда длина отрезка Δx стремится к нулю:

$$\delta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Линейная плотность стержня в точке есть производная массы по длине.

Рассматривая подобные задачи, можно получить аналогичные выводы по многим физическим процессам. Некоторые из них приведены в таблице.

Функция	**Формула**	**Вывод**
m(t) – зависимость массы расходуемого горючего от времени.	$m'(t) = v(t)$	**Производная** *массы по времени* есть *<u>скорость</u> расхода горючего.*
T(t) – зависимость температуры нагреваемого тела от времени.	$T'(t) = v(t)$	**Производная** *температуры по времени* есть *<u>скорость</u> нагрева тела.*
m(t) – зависимость массы при распаде радиоактивного вещества от времени.	$m'(t) = u(t)$	**Производная** *массы радиоактивного вещества по времени* есть *<u>скорость</u> радиоактивного распада.*
q(t) – зависимость количества электричества, протекающего через проводник, от времени	$q'(t) = \mathrm{I}(t)$	**Производная** *количества электричества по времени* есть *сила тока*.
A(t) – зависимость работы от времени	$A'(t) = N(t)$	**Производная** *работы по времени* есть *мощность*.

Рассмотренные задачи, несмотря на их различное физическое содержание, привели нас к нахождению предела одного и того же вида - пределу отношения приращения функции к приращению аргумента. К нахождению предела подобного вида приводят многочисленные задачи из различных областей естествознания. Поэтому целесообразно изучить подробнее указанный предел и показать способы его нахождения.

§1.2. Общее правило нахождения производной

Заметим, что при определении касательной к кривой и мгновенной скорости неравномерного движения, по существу, выполняются одни и те же математические операции:

1°. Заданному значению аргумента дают приращение и вычисляют новое значение функции, соответствующее новому значению аргумента.

2°. Определяют приращение функции, соответствующее выбранному приращению аргумента.

3°. Приращение функции делят на приращение аргумента.

4°. Вычисляют предел этого отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Операцию отыскания производной некоторой функции называют **дифференцированием** функции, а раздел математики, изучающий свойства этой операции - **дифференциальным исчислением.**

Если функция имеет производную в точке $x = a$, то говорят, что она **дифференцируема** на этом промежутке.

Определение производной не только с исчерпывающей полнотой характеризует понятие скорости изменения функции при изменении аргумента, но и дает способ фактического вычисления производной данной функции. Для этого необходимо выполнить следующие четыре действия (четыре шага), указанные в самом определении производной:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1°. Находят новое значение функции, подставив в данную функцию вместо x новое значение аргумента $x + \Delta x$:

$$y_{н} = f(x + \Delta x) = y + \Delta y.$$

2°. Определяют приращение функции, вычитая данное значение функции из ее нового значения;

$$\Delta y = y_{н} - y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

3°. Составляют отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

4°. Переходят к пределу при $\Delta x \to 0$ и находят производную: $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Вообще говоря, производная – это «новая» функция, произведенная от данной функции по указанному правилу.

Пример 4. Найти производную функции $y = 5x$.

Решение

1°. $y_{н} = 5(x + \Delta x) = 5x + 5\Delta x$.

2°. $\Delta y = y_{н} - y = (5x + 5\Delta x) - 5x = 5\Delta x$.

3°. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$.

4°. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 5 = 5$.

Следовательно, $(5x)' = 5$.

Задание 4. Найти производную функции $y = 3x$.

Пример 5. Продифференцировать функцию $y = x^2$.

Решение

1°. $y_{н} = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2_x\Delta x + (\Delta x)^2$.

2°. $\Delta y = y_{н} - y = (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - x^2 = 2_x\Delta x + (\Delta x)^2$.

3°. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$

4°. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$ Таким образом, $(x^2)' = 2x.$

Задание 5. Продифференцировать функцию $y = x^3$.

Пример 6. Найти производную функции $y = x^2 + x$.

Решение

1°. $y_н = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + x + \Delta x.$

2°. $\Delta y = y_н - y = (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + x + \Delta x) - (x^2 + x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + x + \Delta x - x^2 - x = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + \Delta x.$

3°. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 1.$

4°. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x + 1) = 2x + 1.$

Значить, y'=2x+1.

Задание 6. Найти производную функции $y = x^2 - x$.

Пример 7. Найти производную функции $y = x^2 - 3x + 5$.

Решение. 1°. $y_н = (x + \Delta x)^2 - 3(x - \Delta x) - 5 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - 5.$

2°. $\Delta y = y_н - y = (x^2 + 2x\Delta x) + (\Delta x)^2 - 3x + 3\Delta x + 5) - (x^2 - 3x + 5) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x.$

3°. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x - 3.$

4°. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x - 3) = 2x - 3.$

Итак, $(x^2 - 3x - 5)' = 2x - 3.$

Пример 8. На кривой $y = x^2 - 3x + 5$ найти точку, в которой ордината y возрастает в 5 раз быстрее, чем абсцисса x.

Р е ш е н и е. Находим производную $y' = 2x - 3$ (см решение предыдущего примера). Так как производная характеризует скорость изменений ординаты y по сравнению с изменением абсциссы x, то из условия $y' = 2x - 3 = 5$ находим абсциссу искомой точки: $x = 4$. Ординату находим из уравнения кривой: $y = 4^2 - 3 \cdot 4 + 5 = 9$. Итак, (4;9)-искомая точка.

Задание 7. Даны функции $f(x) = x^2 - x$ и $g(x) = x^2 + x$. Требуется установить: а) при каком значении аргумента функция $f(x)$ возрастает в 2 раза быстрее, чем $g(x)$; б) существует ли такое значение.

§1.3. ЧАСТНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Чтобы вычислить частное значение производной, нужно в общее выражение производной вместо x подставить его числовое значение $x = x_0$, т.е. вычислить значение $f'(x_0)$.

Пример 9. Найти производную функции $y = 2x^3 - x^2 + 5$ в точке $x = 2$.

Р е ш е н и е. Сначала найдем производную данной функции в общем виде, т.е. в произвольной точке x:

1^0. $y_н = y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x)^2 + 5 = 2x^3 + 6x^2\Delta x + +6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 + 5$.

2^0. $\Delta y = 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^2 - 2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2$.

3^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x - \Delta x$.

4^0. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(6x^2 + 6x \cdot \Delta x + 2(\Delta x) - 2x - \Delta x) = 6x^2 - 2x$.

5^0. Подставив теперь в равенство $y' = 6x^2 - 2x$ значение $x = 2$, находим $y'_{x=2} = 20$.

З-8. Найти $y'_{x=0.5,}$ если $y = x^2 - x$.

З-9. Найти $y'_{x=0,}$ если $y = x^2 - x$.

3-10. Найти $y'_{x=2,}$ если $y = -3/x$.

3-11. Найти $y'_{x=-1,}$ если $y = 1/x$.

3-12. Найти $y'_{x=2,}$ если $y = 1/x^2$.

Пример 10. Дана функция $y = \sqrt{x}$. Найти $y'_{x=9.}$

Р е ш е н и е. 1^0. $y_{\text{н}} = \sqrt{x + \Delta x}.$

2^0. $\Delta y = y_{\text{н}} - y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$

3^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$

4^0.$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + 0} - \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

5^0. $y'_{x=9} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=9} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}.$

Пример 11. Вычислить $f'(2)$ для $f(x) = x^3$.

Р е ш е н и е. Имеем,

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^3 - 2^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2^3 + 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3 - 2^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(12 + 6\Delta x + \Delta x^2\right) = 12.$$

Пример 12. Найти $f'(x)$ для $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Р е ш е н и е. Имеем, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1 - (x^2 - 3x + 1)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 - 3x\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 3) = 2x - 3$$

3-13. Найти $y'_{x=3}$, если $y = \sqrt{x+1}$.

3-14. Найти $y'_{x=3\sqrt{3}}$, если $y = \sqrt[3]{x}$.

Пример 13. Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = \sin 3x$ в точке $x = \pi / 9$.

Решение. Дадим некоторому значению x приращение Δx; тогда функция y получит приращение

$$\Delta y = \sin\big(3(x+\Delta x)\big) - \sin 3x = 2\cos\left(3x + \frac{3\Delta x}{2}\right)\sin\frac{3\Delta x}{2}.$$

Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и перейдем к пределу при $\Delta x \longrightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\cos(3x+\frac{3\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos\left(3x + \frac{3\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x}\right) =$$

$$2\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(3x + \frac{3\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x} = 2\cos 3x\cdot\frac{3}{2} = 3\cos 3x.$$

Итак, $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$.

Подставив вместо аргумента его значение $x = \pi/9$, получим

$$y'(\pi/9) = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

3-15. Найти $y'_{x=\pi/4}$, если $y = \cos x$.

3-16. Найти $y'_{x=2\pi/3}$, если $y = \sin x$.

Задания 17– 26. Найти частные производные следующих функций:

17. Вычислить $f'(4)$, если $f(x) = 2x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

18. Вычислить $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $f(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}x^2 + 1$.

19. Вычислить $f'(1)$, если $f(x) = 2^x\cdot\frac{3}{\ln 2} + x^2 - 3$.

20. Вычислить $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $f(x)=\sqrt{2}\sin x+\sqrt{\pi x}+5.$

21. Вычислить $f'(-1)$, если $f(x)=\frac{1}{3}x^6+7x^2-2x+1.$

22. Вычислить $f'(\pi)$, если $f(x)=tg\,x-\frac{x^2}{\pi}+\pi.$

23. Вычислить $f'(1)$, если $f(x)=\frac{2}{x^2}-4x-\frac{3}{x}+6.$

24. Вычислить $f'(-1)$, если $f(x)=\frac{10^x}{\ln 10}-\frac{2}{x}+3x-12.$

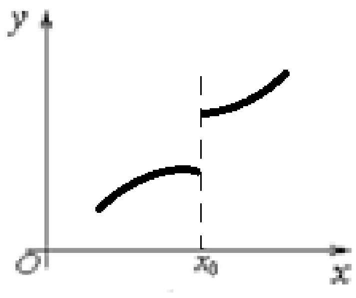
25. Вычислить $f'(2)$, если $f(x)=\frac{2\lg x}{\lg e}-\frac{1}{4}x-\log_2 5.$

26. Вычислить $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $f(x)=\sqrt{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}+\frac{3}{\pi}x^2.$

§1.4. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Поставим следующий вопрос: все ли функции имеют производную или только некоторые? Чтобы ответить на него, рассмотрим функцию $y=f(x)$. Производная этой функции определяется формулой $f'_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ если указанный предел существует. Для существования этого предела необходимо, чтобы $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$ (в противном случае будет иметь место деление на нуль, что невозможно); отмеченное условие является условием непрерывности функции в данной точке. Отсюда вытекает следующее утверждение:

Теорема: *Если функция дифференцируема в данной точке, то в этой точке она непрерывна.*



Из этой теоремы следует, что в точке разрыва $x=x_0$ функция не может иметь производную, так как в этой точке приращение Δy равно конечной величине при $\Delta x\to 0$. В дальнейшем будет показано, что утверждение, обратное приведенной теореме, наверно. Если в какой-либо точке данная функция $y = f(x)$ является непрерывной, то она может и не иметь производной в этой точке. Все функции, рассматриваемые в дальнейшем, будем считать дифференцируемыми.

Пример 14. Показать, что в точке $x = \pi / 2$ функция $y = tgx$ не имеет производной.

Р е ш е н и е. В точке $x = \pi / 2$ функция tgx не существует, т.е. не выполняется условие непрерывности функции; значит, в этой точке функция не имеет производной.

З-27. Почему в точке $x = 0$ функция $y = lnx$ не имеет производной?

§1.5. ТАБЛИЦА ПРАВИЛ И ФОРМУЛ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Определение производной по формуле $f'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ четко указывает действия, которые нужно выполнить для ее нахождение, что позволяет непосредственно вычислять производную любой элементарной функции. Необходимо хорошо овладеть непосредственным дифференцированием, поскольку оно позволяет вывести основные правила и формулы следует обязательно знать, чтобы не повторять каждый раз все выкладки при нахождении данной функции. Ведь существует бесконечное множество функций и с их усложнением непосредственное дифференцирование становится все более трудоемким.

Поэтому целесообразно вывести формулы производных для основных элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических) и сформулировать правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного функций, а также правило дифференцирования сложной функции, т.е. функции от функции.

Это позволит находить производные всех элементарных функций, которые могут быть получены из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

Прежде чем доказывать правила и формулы дифференцирования, сведем их в таблицу и в дальнейшем будем пользоваться ею, подобно тому как в арифметике пользуются таблицей умножения.

Правила дифференцирования

I. $C' = 0$, $C -$ постянная.

II. $(x)' = 1$.

III. $(Cu)' = Cu'.C -$ постоянная.

IV $(uv)' = u'v + v'u$.

V $+ v - \omega)' = u' + v' - \omega'$.

VI. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$.

VII. $y'_x = y'_u u'_x$.

Формулы дифференцирования

Основные элементарные функции	**Сложные функции**
VIII. $(\mathbf{ln}\,\boldsymbol{x})' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$.	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.
IX. $(\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{x})' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{ln}\,\boldsymbol{a}}$.	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u$.
X. $(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{n}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}$.	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$.
XI. $(\sqrt{\boldsymbol{x}})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}}$.	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.
XII. $(\boldsymbol{a^x})' = \boldsymbol{a^x} \cdot \mathbf{ln}\,\boldsymbol{a}$.	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.
$(\boldsymbol{e^x})' = \boldsymbol{e^x}$.	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
XIII. $(\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x})' = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$.	$(\sin u)' = cosu \cdot u'$

XIV. $(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x})' = -\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}.$ $\qquad (cosu)' = -\sin u \cdot u'$

XV. $(\boldsymbol{tgx})' = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cos^2x}}.$ $\qquad (tgu)' = \frac{1}{cos^2u} \cdot u'$

XVI. $(\boldsymbol{ctgx})' = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{sin^2x}}.$ $\qquad (ctgu)' = -\frac{1}{sin\,^2u} \cdot u'.$

XVII. $(\boldsymbol{arcsinx})' = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x^2}}}.$ $\qquad (arcsinu)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$

XVIII. $(\boldsymbol{arccosx})' = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x^2}}}.$ $\qquad (arccosu)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$

XIX. $(\boldsymbol{arctgx})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x^2}}.$ $\qquad (arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$

XX. $(\boldsymbol{arcctgx})' = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x^2}}.$ $\qquad (arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$

1.5.1. Правила дифференцирования алгебраической суммы, произведения и частного

Производная постоянной. Пусть дана постоянная функция $y = C$. Тогда ее приращение $\Delta y = C - C = 0$. Следовательно, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, т.е.

$$C' = \mathbf{0}.$$

Итак, *производная постоянной равна нулю.*

Например, $(12)' = 0$; $(\pi)' = 0$; $(ln2)' = 0$.

Производная независимой переменной. Пусть дана функция $y = x$. Найдем ее производную по общему правилу.

1^0. Так как $y = x$, то $y_H = x + \Delta x$.

2^0. Имеем $\Delta y = y_H - y = (x + \Delta x) - x = \Delta x$, т.е. приращение функции равно приращению аргументу.

3^0. Находим $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

4^0. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1$, как предел постоянной величины.

Следовательно,

$$\boldsymbol{x' = 1}.$$

т.е. *производная функции* $y = x$ *равна единице.*

Производная алгебраической суммы. Пусть дана функция $y = f(x)$, которую можно представить в виде алгебраической суммы слагаемых u, v, w, имеющих производную в точке x, т.е. $y = u + v - w$. Найдем производную y' по общему правилу.

1^0. Дадим аргументу приращение Δx; тогда функции $\Delta y, \Delta u, \Delta v$ и Δw, т.е.

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w - \Delta w).$$

2^0. $\Delta y = ((u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w) - y$;

$\Delta y = \big((u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w)\big) - (u + v - w)$;

$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$.

3^0. Разделим обе части последнего равенства на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

4^0. Переходя к пределу $\Delta x \to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x};$$

$$\boldsymbol{y' = u' + v' - w'; (u + v - w)' = u' + v' - w''}.$$

Очевидно, что полученную формулу можно обобщить на любое число слагаемых: *производная алгебраической суммы конечного числа слагаемых равна алгебраической сумме производных этих слагаемых.*

Производная произведения. Пусть дана функция $y = uv$, где u и v – дифференцируемые функции.

Следуя общему правилу нахождения производной, находим:

1^0. $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$.

2^0. $\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv$;

$\Delta y = \Delta u \cdot v + \Delta v \cdot u + \Delta u \cdot \Delta v$.

3^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$.

4^0. Перейдем к пределу, учитывая что u и v не зависят от Δx, выносим их за знак предела:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

В последнем равенстве $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = y'$, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ и $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$, так как рассматриваемые функции непрерывны. Следовательно, $y' = u'v + v'u$ или

$$(\boldsymbol{uv})' = \boldsymbol{u'v} + \boldsymbol{v'u}.$$

Итак, *производная произведения двух функций равна производной первого сомножителя, умноженной на второй, плюс производная второго сомножителя, умноженная на первый.*

Следствие. *Постоянный множитель можно вынести за знак производной.*

Действительно, пусть дана функция $y = Cu$, где $C -$ постоянная. Найдем ее производную по правилу дифференцирования произведения. Имеем $y' = Cu' + C'u$. Так как $C' = 0$, то

$$(\boldsymbol{Cu})' = \boldsymbol{Cu}'.$$

Например, $(5x)' = 5(x)' = 5$.

Пример 15. Найти производную функции $y = kx$

Решение. Применим сначала правило V, а затем правило II, находим

$$(kx)' = k\cdot(x)' = k\cdot 1 = k$$

Следовательно, $(kx)' = k$ где k постоянный множитель.

Пример 16. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение. Представим данную функцию в виде произведения: $x^2 = x \cdot x$. Используя теперь правило IV, находим

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x'x + xx' = 2x,$$

поскольку $(x)' = 1$. Итак, $(x^2)' = 2x$.

З-28. Найти производную функции $y = 3x^2$.

Пример 17. Найти производную функции $y = x^3$

Решение. Представив данную функцию в виде произведения: $x^3 = x^2 \cdot x$ и снова применяя правило IV, найдем

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + (x)' \cdot x^2 = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2.$$

З-29. Найти производную функции $y = 5x^3$.

Пример 18. Дана функция $y = x^4$. Найти y'.

Решение. Поступаем так же, как и в примере 14:

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + (x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot x + x^3 = 3x^3 + x^3 = 4x^3.$$

Если рассмотренным выше способом продифференцировать функции x^5, x^6, x^7 и т. д., то в результате получим следующую общую формулу:

$$\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}.$$

Производная степени равна произведению показателя степени на то же основание с показателем на единицу меньше.

В дальнейшем эта формула будет доказана для любого действительного показателя.

Пример 19. Найти производную функции $y = 9x^5$.

Решение. Используя правило V и формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, получим

$$y' = (9x^5)' = 9 \cdot 5x^4 = 45x^4.$$

При навыке промежуточные записи можно пропустить:

$$(9x^5)' = 45x^4.$$

Пример 20. Найти производную функции $y = x^3 + 6x$.

Решение. В правой части имеем алгебраическую сумму дифференцируемых функций, поэтому применяем правило III:

$$(x^3 + 6x)' = (x^3)' + (6x)'.$$

Используя результаты примеров 14 и 13, получим

$$(x^3)' + (6x)' = 3x^2 + 6.$$

Пример 21. Найти производную функции $y = 5x^2 - x + 4$.

Решение. $(5x^2 - x + 4)' = (5x^2) - (x)' + (4)' = 5(x^2) - 1 = 10x - 1.$

Задания 30 – 44. Найти производные следующих функций:

30. $y = 3x^{-2}$. **31.** $y = 4x^{-3}$. **32.** $y = 2x^{1/3}$.

33. $y = 2x^{1/4}$. **34.** $y = 3x^{-2/3}$. **35.** $y = 5x^{-3/5}$.

36. $y = 5\sqrt[5]{x^2}$. **37.** $y = 3\sqrt[3]{x}$. **38.** $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

39. $y = \frac{3}{\sqrt{x^3}}$. **40.** $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$. **41.** $y = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$.

42. $y = \frac{2\sqrt{x}}{x^2}$. **43.** $y = \frac{6\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. **44.** $y = \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}$.

З-45. Найти $f'(1/2)$, если $f(x) = 1/x^4$.

З-46. Найти $f'(27)$, если $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$.

З-47. Найти $f'(-1)$, если $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$.

З-48. Найти $f'(0{,}5)$, если $f(x) = -x^3 + 9x^2 - x + 2$.

Пример 22. Найти производную функции $y = 1/x^3$.

Р е ш е н и е. Используя степень с отрицательным показателем, преобразуем данную функцию к виду $(1/x^3)' = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -3 \cdot \frac{1}{x^4} = -\frac{3}{x^4}$.

Пример 23. Продифференцировать функцию $y = 2x^3(x^6 - 1)$.

Решение. I способ. Используя правило IV, получим $\left(2x^3(x^6-1)\right)' = (2x^3)'(x^6 - 1) + +(x^6 - 1)' \cdot 2x^3 = 6x^2(x^6 - 1) + 6x^5 \cdot 2x^3 = 6x^8 - 6x^2 + 12x^8 = 6x^2(3x^6 - 1)$.

II способ. Предварительно преобразуем данную функцию: $2x^3(x^6 - 1) = 2x^9 - 2x^3$. Тогда получим

$$y' = (2x^9 - 2x^3)' = 18x^8 - 6x^2 = 6x^2(3x^6 - 1).$$

Пример 24. Продифференцировать функцию $y = (x^2 + 2)(2x + 1)$.

Решение. I способ. Воспользуемся правилом IV при $u = x^2 + 2,\ v = 2x + 1$. Имеем

$$y' = (x^2 + 2)'(2x + 1) + (2x + 1)'(x^2 + 2) = 2x(2x + 1) + 2(x^2 + 2)$$
$$= 4x^2 + 2x + 2x^2 + 4 == 6x^2 + 2x + 4.$$

II способ. Сначала перемножим выражения в скобках, а затем найдем производную:

$$\left((x^2 + 2)'(2x + 1)\right)' = (2x^3 + 4x + x^2 + 2)' = 6x^2 + 4 + 2x.$$

Задания 49 – 54. Найти производные следующих функций:

49. $y = (x^3 - 2)(x^2 + x + 1)$.

50. $f(x) = (x + 2)(2x^3 - x)$.

51. $f(t) = (t^2 + 1)(t^3 - t)$.

52. $f(u) = (u^2 - u + 1)(2u^3 + 1)$.

53. $y = (z^2 + 1)(z^3 - 1)$.

54. $y = (x^4 - 3)(x^2 + 2)$.

Производная частного. Пусть дана функция $y = \frac{u}{v}$, где u и v – дифференцируемые функции, причем $v \neq 0$. Следуя общему правилу нахождения производной, находим:

1^0. $y + \Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$.

2^0. $\Delta y + \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}$, откуда после приведения к общему знаменателю находим

$$\Delta y = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

3^0. Разделим последнее равенство на $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

4^0. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}{u(u + \lim\limits_{\Delta x \to 0}\Delta u)}.$$

Так ка функции y, u и v непрерывны, то $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} == v'$ и $\lim_{\Delta x \to 0}\Delta v = 0$. Следовательно, $y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ или

$$\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}.$$

Итак, *производная дроби равна дроби, знаменатель которой равен квадрату знаменателя данной дроби, а числитель равен производной числителя данной дроби, умноженная на ее знаменатель, минус производная знаменателя, умноженная на числитель.*

Пример 25. Найти производную функции $y = \frac{x^2-2}{x^2+2}$.

Решение. Применяем правило VI:

$y' = \frac{(x^2-2)'(x^2+2)-(x^2+2)'(x^2-2)}{(x^2+2)^2} = \frac{2x\cdot 4}{(x^2+2)^2} = \frac{8x}{(x^2+2)^2}$.

Пример 26. Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Р е ш е н и е

I способ. Применяем правило VI при $u = 1, v = x$.

Тогда получим

$y' = \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$.

II способ. Предварительно преобразуем данную функцию к виду $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, а затем применим формулу $(x^n) = nx^{n-1}$:

$y' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Задания 55 – 62. Найти производные следующих функций:

55. $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

56. $y = \frac{1-x^5}{1+x^5}$.

57. $y = \frac{3-x}{x^2}$

58. $y = \frac{x^2-1}{x^2}$.

59. $y = \frac{1+x^2}{3x}$.

60. $y = \frac{2+x^3}{2x}$.

61. $y = \frac{x^2-x+2}{x^2}$.

62. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

1.5.2. Правило дифференцирования сложной функции

Сложная функция - это функция от функции. Говоря о сложной фикции, имеют в виду, что такая функция составлена из нескольких функций, а не какую-то ее особенную сложность. Например, функция $y = \sin 3x$ является сложной. Если обозначить $3x = u$, то получим $y = \sin u$, где u – промежуточная функция. В сложную функцию может входить не одна, а несколько промежуточных функций. Например, для функции $y = cos^2 2x$ промежуточными функциями служат $u = \cos v$ и $v = 2x$.

Докажем теорему о дифференцируемости сложной функции.

Теорема. Если функция *f(u)* дифференцируема по *u*, то производная сложной функции $y = f\big(u(x)\big)$ по независимой переменной *x* определяется равенством

$$\boldsymbol{y'_x = y'_u u'_x}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дана дифференцируемая функция $y = f(x)$, которая является сложной и имеет промежуточный аргумент u, зависящий от x. По определению производной мы можем записать $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Умножив числитель и знаменатель функции, содержащейся под знаком предела, на приращение промежуточного аргумента Δu, имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right).$$

Поскольку Δx стремится к нулю, в силу непрерывности функции $u(x)$ приращение Δu также стремится к нулю. Тогда получим

$$y' = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u u'_x ,$$

т.е. *производная функции y по аргументу x равна производной этой функции по промежуточному аргументу u, умноженной на производную промежуточного аргумента u по основному аргументу x*. Это правило иногда называют *правилом цепочки*. Оно остаётся справедливым и в случае, когда сложная функция состоит из любого конечного числа простых функций. Таким образом, производная сложной функции равна произведению производных от всех составляющих её функций. При этом следует помнить, что каждую функцию нужно дифференцировать по её собственному аргументу.

Если учесть, что производная – это скорость изменения функции при данном аргументе, то правило цепочки становится очевидным. Например, если y изменяется в 10 раз быстрее, чем $u(y'_u = 10)$, u - в 5 раз медленнее, чем $v(u'_v = 1/5)$, и v – в 4 раза быстрее, чем $x(v'_x = 4)$, то $y'_x = y'_u u'_v v'_x = 10 \cdot (1/5) \cdot 4 = 8$, т.е. изменяется в 8 раз быстрее, чем x.

При дифференцировании сложных функций удобно ввести коэффициент сложности, указывающий количество простых функций, входящих в данную сложную функцию. Он обозначается цифрой в кружке после записи функции. Например, для функции $y = \cos 5x$ ② коэффициент сложности равен 2, так как в неё входят две простые функции $y = \cos u$ и $u = 5x$. Для функции $y =$

$sin^2 3x$ 3 коэффициент сложности равен 3 (простыми функциями, составляющими данную, являются $y = u^2,\ u = \sin v, v = 3x$).

Очень важно правильно определить порядок следования промежуточных функций. Например, для функции $y = \ln tg^2 3x$ ○4 , имеющей коэффициент сложности 4, промежуточные функции расположены в следующем порядке: 1) логарифмическая $\ln(tg^2 3x)$; 2) степенная $(tg3x)^2$; 3) тригонометрическая $tg(3x)$; 4) линейная $3x$.

Замечание 1.5.2.1. Отметим, что аргументом логарифмической функции является $tg^2 3x$, т.е. всё выражение, стоящее под знаком натурального логарифма; аргументом степенной функции является $tg3x$, т.е. всё выражение, стоящее под знаком степени, и т.д.

Пример 27. Продифференцировать функцию $y = (x^2 + 3x)^5$.

Р е ш е н и е. Коэффициент сложности данной функции равен 2. Составляющими функции являются $y = u^5,\ u = x^2 + 3x$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции, находим

$$y'_x = y'_u u'_x = 5(x^2 + 3x)^4(2x + 3).$$

Пример 28. Учитывая, что $(\sin t)' = \cos t$, продифференцировать функцию $y = \sin 2x$.

Р е ш е н и е. Коэффициент сложности данной функции равен 2. Порядок следования промежуточных функций таков: $y = \sin u,\ u = 2x$. Находим

$$y' = \cos 2x \cdot (2x)' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x.$$

Пример 29. Найти y', если $y = sin^2 4x$.

Р е ш е н и е. Имеем $y = sin^2 4x$ 3 . Порядок следования функций: $y = u^2$; $u = \sin v$; $v = 4x$. Значит,

$$y' = 2\sin 4x\,(\sin 4x)' = 2\sin 4x \cos 4x \cdot (4x)' = 2\sin 4x \cos 4x \cdot 4 = 4\sin 8x$$

(в окончательной записи использована формула синуса двойного угла).

В дальнейшем, когда в практике дифференцирования накопится достаточный опыт, можно обходиться без промежуточных записей.

Например, если $y=\sin(x^2+1)$, то $y'=\cos(x^2+1)\cdot 2x=2x\cos(x^2+1)$.

Задания 63 – 68. Найти производные следующих функций:

63. $y=(9-x^2)^4$.**64.** $y=(x^4-x-1)^4$.

65. $\mathrm{y}=\sqrt{\mathrm{x}^3+1}$.**66.** $\mathrm{y}=\sqrt[3]{(1-\mathrm{x}^2)^2}$.

67. $y=\sin 5x$**68.** $\mathrm{y}=\sin^2 3\mathrm{x}$.

69. Учитывая, что $(\cos \mathrm{t})'=-\sin \mathrm{t}$, найти производную функцию $y=2\cos 5x$.

70. Найти y' , если $y=cos^3 2x$.

1.5.3. Дифференцирование логарифмических функций

П р о и з в о д н ы е ф у н к ц и й $y=\ln x$ и $y=\ln u$, где $u=f(x)$.

Выведем формулу дифференцирования логарифмической функции $y=\ln x$. Областью определения этой функции является интервал $(0,\infty)$. Найдём производную по общему правилу дифференцирования:

1°. Дадим аргументу x приращение Δx; тогда y получит приращение Δy.

2°. Найдём приращение функции:

$$\begin{array}{c} \_\,y+\Delta y=\ln(x+\Delta x) \\ y=\ln x \\ \hline \Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x \end{array}$$

$$\Delta y=\ln\frac{x+\Delta x}{x};\ \ \Delta y=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

3°. Разделив обе части последнего равенства на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Правую часть этого равенства умножим и разделим на x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

(это можно сделать, так как $x \neq 0$).

Используя свойство логарифмов $m \ln a = \ln a^m$, можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Пусть $\frac{x}{\Delta x} = n$, откуда $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}$; подставив эти выражения в последнее равенство, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

4°. Перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$; из равенства $\frac{x}{\Delta x} = n$ следует, что $n \to \infty$, когда $\Delta x \to 0$, и условие $\Delta x \to 0$ можно заменить условием $n \to \infty$. Учитывая сказанное, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Дробь $\frac{1}{x}$ можно вынести за знак предела, поскольку значения x не зависят от n; предел логарифма функции равен логарифму предела функций, так как логарифмическая функция непрерывна. Следовательно,

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \ln\left(\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Учитывая ,что $\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ и $\ln e = 1$, находим

$$y' = \frac{1}{x},\ (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Итак*, производная функций* $y = lnx$ *равна единице, деленной на аргумент.*

Выведем формулу дифференцирования функции $y = lnu$, где $u = f(x)$.

Используя формулу дифференцирования сложной функции $y'_x = y'_u u'_x$, *получаем* $(\ln u)'_x = (\ln u)'_u u'_x$, т.е

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Производная функция $y = \ln u$ *равна дроби, знаменателем которй является промежуточный аргумент, а числителем производная по независимой переменной x.*

Примеры 30 – 32. Найти производные следующих функций:

30. $y = \ln x^2$

Р е ш е н и е.. $y' = \frac{1}{x^2} \cdot \left(x^2\right)' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}.$

31. $y = \ln\left(x^3 - 1\right).$

Р е ш е н и е. $y' = \frac{1}{x^3 - 1}\left(x^3 - 1\right)' = \frac{1}{x^3 - 1} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3 - 1}.$

32. Найти производную функции $y = \frac{x^3}{3} + 2\ln x + 5^x + 4$

Р е ш е н и е. Используя правила дифференцирования и таблицу производных, имеем

$$y' = \left(\frac{x^3}{3} + 2\ln x + 5^x + 4\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (2\ln x)' + (5^x)' + (4)' = \frac{1}{3} \cdot (x^3)'/ + 2(\ln x)' + 5^x \ln 5 + 0 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2 \cdot \frac{1}{x} + 5^x \ln 5 = x^2 + \frac{2}{x} + 5^x \ln 5$$

Задания 71 – 72. Найти производные следующих функций:

71. $y = \ln x^3$ **72.** $y = \ln\left(x^3 + 3\right).$

Примеры 33 – 34. Найти производные следующих функций:

33. $y = \ln\sin x.$

Р е ш е н и е. Здесь $u = \sin x.$ Тогда получим

$$y^1{}_x = \frac{u^1{}_x}{u} = \frac{(\sin x)^1}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx.$$

34. $f(x) = \ln^3 = x^2 - 1.$

Р е ш е н и е. Имеем $f(x) = \ln^3(x^2 - 1)$. Порядок следования промежуточных функций таков: $f(x) = u^3; u = \ln \upsilon; \upsilon = x^2 - 1.$ Следовательно,

$$f^1(x) = 3\ln^2(x^2 - 1)\cdot \frac{1}{x^2 - 1}\cdot 2x = \frac{6x}{x^2 - 1}\ln^2(x^2 - 1).$$

Задания 73– 78. Найти производные следующих функций:

73. $y = \ln \sin 3x$

74. $y = \ln^2 \sin 2x$

75. $y = \ln \sin^3 5x.$

76. $y = \ln \dfrac{x+2}{x-2}.$

77. $y = \ln \sqrt{2x - 1}.$

78. $y = \ln \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$

П р о и з в о д н ы е ф у н к ц и й $y = \log_a x$ и $y = \log_a u$, где $u = f(x)$.

Если дан десятичный логарифм или логарифм числа по любому другому основанию, то следует воспользоваться формулой перехода от одной системы логарифмов к другой.

Известно, что

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

Если положить $b=e$, то логарифм числа по основанию *a,* можно выразить через натуральный логарифм , а именно:

$$\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}.$$

Воспользоваться последней формулой для нахождения производной функции $y = \log_a x$. Имеем

$$\left(\log_a x\right)^1 = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)^1 = \frac{1}{x\ln a}.$$

Таким образом, *производная функции* $y = \log_a x$ *равна единице, деленной на произведение аргумента и натурального логарифма основания.*

Пусть теперь $y = \log_a u$, где $u = f(x)$. Тогда согласно правилу дифференцирования сложной функции имеем $y'_x = \left(\log_a u\right)'_u u'_{x}$. Но $\left(\log_a u\right)'_u = \dfrac{1}{u\ln a}$ и, следовательно,

$$\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u\ln a}.$$

Пример 35. Найти производную следующей функции:

$$y = \log_2 x.$$

Р е ш е н и е. $y' = \left(\log_2 x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 2}.$

Задания 79– 80. Найти производные следующих функций:

79. $y = \log_5 x$. **80.** $y = \log_{0,4} x.$

Пример 36. Найти производную следующей функции:

$$y = \log_3 4x$$

Р е ш е н и е. 1 с п о с о б. Так как $\log_3 4x = \log_3 4 + \log_3 x,$ то

$$y' = \left(\log_3 4 + \log_3 x\right)' = \left(\log_3 4\right)' + \left(\log_3 x\right)' = 0 + \frac{1}{x\ln 3} = \frac{1}{x\ln 3}$$

2 с п о с о б. $\left(\log_3 4x\right)' = \dfrac{1}{4x\ln 3}\cdot\left(4x\right)' = \dfrac{4}{4x\ln 3} = \dfrac{1}{x\ln 3}.$

Задания 81– 82. Найти производные следующих функций:

81. $y = \log_2 3x.$ **82.** $y = \log_{0,5} 5x.$

Пример 37. Найти производную следующей функции:

$$u = \log_7 x^5.$$

Р е ш е н и е. 1 с п о с о б . $\left(\log_7 x^5\right)' = \left(5\log_7 x\right)' = \dfrac{5}{x\ln 7}$

2 с п о с о б. $\left(\log_7 x^5\right)' = \dfrac{1}{x^5 \ln 7}\left(x^5\right)' = \dfrac{5x^4}{x^5 \ln 7} = \dfrac{5}{x\ln 7}$

Задания 83–84. Найти производные следующих функций:

83. $\upsilon = \log_5 t^3$ **84.** $s = \log_{1/3} t^4$

Пример 38. Найти производную следующей функции:

$$y = \lg(x-1)$$

Р е ш е н и е. $y' = \dfrac{1}{(x-1)\ln 10}$

Задания 85– 86. Найти производные следующих функций:

85. $y = \lg(x+3)$ **86.** $y = \lg(x-6)$

Пример 39. Найти производную следующей функции: $y = \log_3\left(x^2 + 3x - 1\right)$.

Р е ш е н и е. $y' = \dfrac{\left(x^3 + 3x - 1\right)'}{\left(x^2 + 3x - 1\right)\ln 3} = \dfrac{2x+3}{\left(x^2 + 3x - 1\right)\ln 3}$

Задания 87– 88. Найти производные следующих функций:

87. $y = \log_2\left(z^2 - 2z\right)$ **88.** $y = \log_{0,3}\left(x^2 + 4x - 3\right)$

Пример 40. Найти производную следующей функции: $u = \log_5 \cos 7x$

Р е ш е н и е. $u' = \dfrac{1}{\cos 7x \ln 5}\left(\cos 7x\right)^1 = \dfrac{-\sin 7x \cdot 7}{\cos 7x \ln 5} = -\dfrac{7tg7x}{\ln 5x}$

Задания 89– 90. Найти производные следующих функций:

89. $y = \log_7 \cos\sqrt{1+x}.$ **90.** $y = \lg ctgx.$

1.5.4. Производная степенной функции

Найдем производную функцию $y = x^n$, где n - любое действительное число. Для этого применим способ, который называется *логарифмическим дифференцированием.* Он заключается в том, что функцию сначала логарифмируют, а затем находят производную.

Прологарифмируем функцию $y = x^n$ по основанию *e*:

$$\ln y = n \ln x.$$

Дифференцируя обе части этого равенства ,имеем

$$(\ln y)' = (n \ln x)'$$

Левую часть последнего равенства можно записать в виде $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'_x$(так как *y* - сложная функция от *x*), а правую часть - в виде $(n \ln x)' = \frac{n}{x}$. Поэтому $\frac{1}{y} \cdot y'_x = \frac{n}{x}$, т.е $y'_x = y \times \frac{n}{x}$, Но $y = x^n$ и, следовательно, $y'_x = x^n \cdot \frac{n}{x} = n \cdot x^{n-1}$.

Откуда

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}.$$

Мы получили обобщение известной формулы производной степени, справедливое для любого показателя.

Найдем производную функции $y = u^n$, где $u = f(x)$. Воспользовавшись правилом дифференцирования сложной функция, получим $y' = y' \cdot u'_x = nu^{n-1}u'$

Примеры 41 – 42. Найти производные следующих функций:

41. $y = 2x^3 - 4x + 2$

Р е ш е н и е. $y' = \left(2x^3 - 4x + 2\right)' = \left(2x^3\right)' - (4x)' + (2)' = 6x^2 - 4$

42. $y=\dfrac{3}{5x^2}$

Р е ш е н и е. Преобразуем данную функцию к виду $y=\dfrac{3}{5x^2}=\dfrac{3}{5}x^{-2}$. Тогда получим

$$y'=\left(\frac{3}{5}x^{-2}\right)'=\frac{3}{5}\left(x^{-2}\right)'=\frac{3}{5}(-2)x^{-3}=-\frac{6}{5}x^{-3}=-\frac{6}{5x^3}$$

Задания 91– 94. Найти производные следующих функций:

91. $y=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{6}+3x+x-3.$

92. $y=\dfrac{3}{8x^4}$

93. $y=\dfrac{1}{3}x^6+\dfrac{7}{10x^5}-\dfrac{1}{6}x^3.$

94. $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{6}{x^3}$

Примеры 43 – 47. Найти производные следующих функций:

43. $f(x)=\sqrt[4]{x^3}.$

Р е ш е н и е. Так как $f(x)=\sqrt[4]{x^3}=x^{3/4}$, то

$$f'(x)=\left(x^{3/4}\right)'=\frac{3}{4}x^{3/4-1}=\frac{3}{4\sqrt{x}}.$$

44. $y=\dfrac{2}{3x\sqrt{x}}.$

Р е ш е н и е. Здесь $y=\dfrac{2}{3x\sqrt{x}}=\dfrac{2}{3}x^{-3/2}$, откуда

$$y'=\left(\frac{2}{3}x^{-3/2}\right)^1=-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{-5/4}=\frac{1}{x^2\sqrt{x}}.$$

45. $y=x^2+\dfrac{2}{x^4}-\sqrt[3]{x}.$

Р е ш е н и е. Имеем $y=x^2+2x^{-4}-x^{1/3}$.Следовательно,

$$y'=\left(x^2+2x^{-4}-x^{1/3}\right)'=\left(x^2\right)'+\left(2x^{-4}\right)'-\left(x^{1/3}\right)'=2x-8x^{-5}-\frac{1}{3}x^{-2/3}=2x-\frac{8}{x^5}-\frac{1}{3\sqrt{x^2}}$$

46. $y=\dfrac{3x^2-4x+1}{2x+1}$

Р е ш е н и е. Применениям правило дифференцирования частного и формулу X:

$$y' = \frac{\left(3x^2-4x+1\right)'(2x+1)-(2x+1)'\left(3x^2 4x+1\right)}{(2x+1)^2} = \frac{(6x-4)(2x+1)-2\left(3x^2-4x+1\right)}{(2x+1)^2}$$
$$= \frac{12x^2+6x-8x-4-6x^{2+-2}}{(2x+1)^2} = \frac{6x^2+6x-6}{(2x+1)^2} = \frac{6\left(x^3+x-1\right)}{(2x+1)^2}.$$

47. $y=\sqrt{x}\left(x^2+2x-5\right)$.

Р е ш е н и е. Здесь следует воспользоваться правилом дифференцирования произведения и формулой X. Имеем.

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)'(x^2+2x-5)+(x^2+2x-5)'\sqrt{x}.$$

Так как $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x^2+2-5)' = 2x+2$, то $y' =$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+2x-5)+(2x+2)\sqrt{x} = \frac{x^2}{2\sqrt{x}}+\frac{2x}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}+2\sqrt{x} = \frac{1}{2}x\sqrt{x}+$

$\sqrt{x}-\frac{5}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}+2\sqrt{x} = 2{,}5x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-\frac{5}{2\sqrt{x}}.$

Задания 95– 99. Найти производные следующих функций:

95. $y=\sqrt[5]{x^3}$. **96.** $f(x)=2x\sqrt[3]{x^2}$.

97. $u(t)=t^3-\frac{1}{t^2}+t\sqrt[3]{t}$. **98.** $y=\frac{\frac{1}{3}x^3-2x^2+x}{x^4-1}$.

99. $y=\frac{x^3+3x^2}{3x-1}$.

Пример 48. Найти производную следующей функции:

$$f(x)=x^3\sin x.$$

Р е ш е н и е. Применяя формулы IV, X и учитывая , что $(\sin x)'=\cos x$, находим $f'(x)=(x^3)'\sin x+(\sin x)'x^3 = 3x^2\sin x+x^3\cos x = x^2(3\sin x+x\cos x)$.

Задания 100 – 102. Найти производные следующих функций:

100. $f(x)=x^2\left(\sqrt{x}+x-1\right)$. **101**. $y=\sqrt[3]{x^2}\left(2\sqrt{x}-3\right)$.

101. $s(t)=t\left(\sqrt{t}-5\right)$. **102.** $s(t)=\sqrt[3]{t}\left(t^2-\sqrt{5}\right)$.

Пример 49. Найти производную функции $y=5^x$.

Р е ш е н и е. Используя формулу $(a^x)' = a^x \ln a$, получим

$$y' = (5^x)' = 5^x \ln 5.$$

Пример 50. Продифференцировать функцию $y = 2^{\sin x}$.

Р е ш е н и е. $y' = 2^{\sin x} \ln 2 (\sin x)' = 2^{\sin x} \ln 2 \cos x$.

Пример 51. Найти производную функцию $y = 0{,}5^{\sin 4x}$.

Р е ш е н и е. $y' = 0{,}5^{\sin 4x} \ln 0{,}5\, (\sin 4x)' = 0{,}5^{\sin 4x} \ln 0{,}5 \cdot \cos 4x \cdot 4 = 4 \cos 4x \cdot 0{,}5^{\sin 4x} \ln 0{,}5$.

Пример 52. Найти значение производной функции $y = e^{x^2}$.

Р е ш е н и е. Используем формулу $e^u = e^u u'$:

$y' = \left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2x e^{x^2}$.

Пример 53. Найти значение производной функции $y = 2^x$ в точке $x = 1$.

Р е ш е н и е. Найдем производную по формуле XI: $y' = 2^x \ln 2$. Вычислим частное значение производной при $x = 1$.

$$y'(1) = (2^x \ln 2)_{x=1} = 2 \ln 2 = \ln 4.$$

Задания 103– 108. Найти производные следующих функции:

103. $y = 3^x$. **104**. $f(x) = x^3 + 2^x$.

105. $f(x) = 3^{\sin x} - 2^{2x} + x^2$. **106**. $y = 2^{\sin 5x}$.

107. $f(x) = 3^{\sin 2x}$. **108**. $y = a^{3x}$

109. Найти значение производной функции: $f(x) = 3^{2x}$ в точке $x = 2$.

110. Найти значение производной функции:$y = 2^{x^2}$ в точке $x = -1$.

1.5.5. *Дифференцирование тригонометрических функций*

П р о и з в о д н ы е ф у н к ц и й $y = sinx$ и $y = sinu$, где $u = f(x)$.

Найдем производную функции $y = sinx$ по общему правилу нахождения производной. Отметим, что функция $y = sinx$ имеет производную при любом значении x.

1°. Придадим аргументу x приращение Δx; тогда функция получит приращение Δy:

$$y_H = y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

2°. Вычитая из нового значения функции первоначальное, найдем значение приращения Δy:

$$\begin{array}{c} y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \\ y = sinx \\ \hline \Delta y = \sin(x + \Delta x) - sinx \end{array}$$

Применим формулу разности синусов:

$$sina - sin\beta = 2cos\frac{a + \beta}{2} sin\frac{a - \beta}{2}.$$

Тогда получим

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - sinx = 2cos\frac{x+\Delta x+x}{2} sin\frac{x+\Delta x-x}{2} =$$

$$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) sin\frac{\Delta x}{2}.$$

3°. Находим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

4°. Перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta}{2}})=\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Если $\Delta x\to 0,$ то и $\frac{\Delta x}{2}\to 0$. Поэтому, полагая $\frac{\Delta x}{2}=t,$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{t\to 0}cos\,(t+x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}.$$

Но $\lim_{t\to 0}cos\,(x+t)=cosx,$ так как функция $y=\cos x$ непрерывна, а $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ (первый замечательный предел). Значит, $y'=cosx,$ т.е.

$$(\boldsymbol{sinx})'=\boldsymbol{cosx}$$

Итак, производная функции $y=\sin x$ равна $\cos x$.

Выведем формулу дифференцирования функции $y=\sin u,$ где u-функция от x. Применяя формулу $y_x{}'=y'_u u'_x,$ находим

$$y'_x=(\sin u)'_u\,u'_x=\cos u\cdot u'_x.$$

Итак

$$(\mathbf{sin}\,\boldsymbol{u})'=\mathbf{cos}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}'.$$

Пример 54. Найти производную функции $y=\sin(x^3-3x^2)$.

Р е ш е н и е. Здесь $u=x^3-3x^2,$ $y=\sin u.$ Находим $u'_x=(x^3-3x^2)'=3x^2-6x$. Тогда $y'_x=y'_u u'_x=(3x^2-6x)\cos(x^3-3x^2)$.

Пример 55. Продифференцировать функцию $y=sin^3 4x$.

Р е ш е н и е. Применяем формулы VII, X, XIII:

$y'=(sin^3 4x)'=3sin^2 4x(sin4x)'=3sin^2 4xcos4x(4x)'=3sin^2 4xcos4x\cdot 4=12sin^2 4xcos4x$.

Пример 56. Найти значение производной функции $f(x) = sin^4 x$ при $x = \frac{\pi}{6}$.

Р е ш е н и е. Используя формулы VII, X, XIII, найдем производную:

$$f'(x) = 4sin^3 x \cos x.$$

Подставив значение $x = \frac{\pi}{6}$, вычислим значение производной:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4sin^{\,3}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Пример 57. Найти y′, если $y = \ln sin^3 5x$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулами VII, VIII, VIII:

$$y' = \frac{1}{sin^3 5x} \cdot 3sin^2 5xcos5x \cdot 5 = \frac{15cos5x}{sin5x} = 15ctg5x.$$

Пример 58: Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x} \cdot \cos x$

Р е ш е н и е.

$$y' = \left(\sqrt[5]{x}\cos x\right)' = \left(\sqrt[5]{x}\right)'\cos x + \sqrt[5]{x}(\cos x)' = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)'\cos x + \sqrt[5]{x}(-\sin x) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}\cos x - \sqrt[5]{x}\sin x =$$

$$= \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\cos x - \sqrt[5]{x}\sin x$$

Пример 59. Найти производную $\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)'$.

Р е ш е н и е. $\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(\sin x)'\sqrt{x} - \left(\sqrt{x}\right)'\sin x}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\cos x \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x}{x} = \frac{2x \cdot \cos x - \sin x}{2x\sqrt{x}}$

Пример 60. Найти производную функции y = $\sin^3$x .

Р е ш е н и е. y = u^3, где u = sinx. Поэтому

$$y' = \left(u^3\right)' \cdot u' = 3u^2 \cdot u' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x$$.

Пример 61. Найти производную функции $y = \sqrt{x^2+1}\,e^{\cos x}$

Р е ш е н и е.

$$y' = \left(\sqrt{x^2+1}e^{\cos x}\right)' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)'e^{\cos x} + \sqrt{x^2+1}(e^{\cos x})' = \frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}e^{\cos x} + \sqrt{x^2+1}e^{\cos x} \cdot (\cos x)' =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}e^{\cos x} - \sqrt{x^2+1}e^{\cos x} \cdot \sin x$$

Задания 111– 116. Найти производные следующих функций:

111. $y = \sin(x^2 - 3x + 5)$. **112.** $f(x) = sin^2 5x$.

113. $y = sin^4 3x$. **114**. $y' = \ln sin^2 3x$.

115. $y = \ln sin \sqrt{x}.$ **116.** $y = ln^2 sinx$.

117. Найти $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$, если $f(x) = sin^2 x$.

118. Найти $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, если $f(x) = 2sin^3 2x$.

Производные функций $\boldsymbol{y = \cos x}$ и $\boldsymbol{y = \cos u}$, где $\boldsymbol{u = f(x)}$.

Выведем формулу для нахождения производной функции $y = \cos x$. Используя формулу приведения, получим $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Следовательно, $y' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)'$. Применим теперь правило дифференцирования сложной функции. Здесь $u = \frac{\pi}{2} - x$, $y = \sin u$. Найдем $y'_u = (\sin u)' = \cos u$, $u'_x = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -1$, Значит,

$y'_x = y'_u u'_x = \cos u\,(-1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x$, т.е.

$$\boldsymbol{(\cos x)' = -\sin x}.$$

Итак, производная функции $y = \cos x$ равна $-\sin x$.

Выведем формулу дифференцирования функции $y = cos\, u$, где u- функция от x, применяя формулу $y_x{}' = y'_x \cdot u'_{\boldsymbol{x}}$, получим

$$y'_{\boldsymbol{x}} = (cos)'_u \cdot u'_{\boldsymbol{x}} = -sinu \cdot u'_x.$$

Итак,

$$\boldsymbol{(cos\, u)' = -sin\, u \cdot u'}.$$

Пример 62. Найти производную функции $y = cos\, x^4$.

Р е ш е н и е. Здесь $u = x^4$, $y = cos\, u$. Находим $y'_{\boldsymbol{u}} = -sin\, u$, $u'_{\boldsymbol{x}} = 4x^3$.

Следовательно, $y_x{}' = y'_u \cdot u'_{\boldsymbol{x}} = -4x^3 sin\, x^4$.

Пример 63. Найти $(cos^3x)'$.

Р е ш е н и е. Здесь $u = cos\,x,\ \ y = u^3$. Находим $y'_u = 3x^2 = 3cos^2x$, $u'_x = (cosx)' = -sinx$; откуда $y'_x = \ 3\,cos^2x\,(-\,sin\,x)\ =\ -\,3cos^2x\,sin\,x$.

Пример 64. Найти производную функции $y = \ cos\,(\frac{x}{2} - x^5)$.

Р е ш е н и е. Имеем $u = \ \frac{x}{2} - x^5, y = \ cos\,u$. Далее, находим

$y'_u \ = \ -\,sin\,u, u'_x \ = \ \frac{1}{2} - 5x^4$, откуда $y'_x = \ -\,(\frac{1}{2} - 5x^4)\,sin\,(\frac{x}{2} - x^5)$.

Пример 65. Найти значение производной функции

$$f(x) \ = \ sin^4x - cos^4x \text{ при } x = \ {}^{\pi}/_{12}\,.$$

Р е ш е н и е. Предварительно преобразуем данную функцию:

$$f(x) \ = \ (sin^2x + \ cos^2x)\,(sin^2x - cos^2x) \ = \ -\,cos2x$$

(Так как $sin^2a + \ cos^2a \ = \ 1,\ sin^2a - \ cos^2a = cos2a$). Используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$f'(x) \ = \ (-cos2x)' = -\,(-cos2x)' \ = \ -(-\,sin2x)\cdot(2x)' = \ 2sin2x.$$

При $x \ = \ \frac{\pi}{12}$ имеем $f'\,(\frac{\pi}{12}) \ = \ 2\,sin\,\frac{\pi}{6} \ = \ 1.$

Пример 66. Найти y', если $y \ = \ \sqrt{x} + \ cos^2 3x$.

Р е ш е н и е $\quad y' = \left(\sqrt{x} + \ cos^2 3x\right)' = \ \left(\sqrt{x}\right)' + (cos^2 3x)' = \ \frac{1}{2\sqrt{x}} \ +$

$+2cos3x\,(-sin3x)\ \cdot\ 3 = \ \frac{1}{2\sqrt{x}} - \ 3sin6x.$

Здесь мы воспользовались тем, что $(\sqrt{x})' = \ (x^{\frac{1}{2}})' = \ \frac{1}{2}\ x^{-\frac{1}{2}} \ = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \ \frac{1}{2\sqrt{x}}$, а $2sin3xcos3x = sin6x$ (по формуле синуса двойного угла).

Задания 119– 124. Найти производные следующих функций:

119. $y = cosx^2$. **120.** $y = cos^2 x$.

121. $y = cos\,(x^2 - 3x)$. **122.** $y = cos^3 5x$.

123. $y = cos^4(\frac{1}{3}x^3 - \sqrt{x} + 3x)$. **124.** $y = sin^2 3x - cos^2 3x$.

Задание 125. Найти $f'(\pi\backslash 4)$, если $f(x) = 3\ln\cos^2 x$.

П р о и з в о д н ы е   ф у н к ц и й $\boldsymbol{tgx}$ и $\boldsymbol{y = tgu}$, где $\boldsymbol{u = f(x)}$.

Для нахождения производной функции $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ воспользуемся правилом дифференцирования дроби: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'-v'u}{v^2}$. Тогда получим

$$(tg\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}}.$$

Если $y = tg\,u,$ где $u = f(x)$, то, используя правило дифференцирования сложной функции, находим $y_x{}' = y'_x \cdot u'_x = \frac{1}{cos^2x} \cdot u'$.

Итак,

$$\boldsymbol{(tg\,u)' = \frac{u'}{cos^2u}}.$$

Пример 67. Найти производную функции $y = tg3x$.

Р е ш е н и е. Это сложная функция: $y = f(u)$, где $u = 3x$. По правилу дифференцирование сложной функции имеем,

$$y' = f'(u)\cdot u' = (tgu)'\cdot u' = \frac{1}{\cos^2 3x}\cdot(3x)' = \frac{3}{\cos^2 3x}.$$

Пример 68. Найти производную функции $y = tgx^5$.

Р е ш е н и е. Здесь $u = x^5, y = tg\,u$. Следовательно,

$$(tg\,x^5)' = \frac{1}{cos^2x^5}\cdot(x^5)' = \frac{5x^4}{cos^2x^5}.$$

П р о и з в о д н ы е   ф у н к ц и й $\boldsymbol{y = ctg\,x}$ и $\boldsymbol{y = ctg\,u}$, где $\boldsymbol{u = f(x)}$.

Найдем производную функции $y = ctg\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Согласно правилу VI имеем

$$(tgx)' = \left(\frac{cosx}{sinx}\right)' = \frac{(\cos x)'sinx - (sinx)'cosx}{sin^2x} = \frac{-sinx \cdot sinx - cosx \cdot cosx}{sin^2x}$$
$$= \frac{-sin^2x - cos^2x}{sin^2x} = -\frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x} = -\frac{1}{sin^2x}.$$

Значит,

$$\boldsymbol{(ctg\,x)' = -\frac{1}{sin^2x}}.$$

Если дана функция $y = ctg\,u,$ где $u = f(x)$, то, воспользовавшись формулой VI, получим

$$\boldsymbol{(ctg\,u)' = -\frac{u'}{sin^2u}}.$$

Пример 69. Найти производную функции $y = ctg^3x$.

Р е ш е н и е. $y' = (ctg^3x)' = 3ctg^2x\left(-\frac{1}{sin^2x}\right) = -\frac{3ctg^2x}{sin^2x}$.

Задание 70. Найти y' если $y = tgIn\,x - ctg^3x$.

Задание 71.Найти $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$, если $f(x) = In\,tg3x$.

Задание 128. Найти $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$, если $f(x) = tg^5 2x - cos^3 2x + sin^2x$.

1.5.6. Дифференцирование обратных тригонометрических функций

П р о и з в о д н ы е ф у н к ц и й $\boldsymbol{y = arcsinx}$ и $\boldsymbol{y = \arcsin u}$,

где $\boldsymbol{u = f(x)}$.

Найдем производную функции $y = arcsinx$. Согласно определению арксинуса, имеем $sin\,y = x,$ где $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. Продифференцируем по x обе части равенства, учитывая, что $sin\,y$ —сложная функция, так как yзависит от x. Получим$\cos y \cdot y' = 1$, откуда $y' = \frac{1}{cosy}$. Но $\cos y = \sqrt{1 - sin^2y}$ (берем только арифметический корень, поскольку для рассматриваемых значений y функция неотрицательна: $-\pi/2 \le y \le \pi/2$). Далее, заменяя $sin\,y$ на x, получим $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Так как по условию $y = arcsin\ x$, то окончательно находим

$$(\boldsymbol{asrsin\ x})' = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}.$$

Для функции $y = arcsin\ u$, где $u = f(x)$, используя формулу производной сложной функции $y'_x = y'_u u'_x$, получим

$$(\ \boldsymbol{arcsin\ u})' = \frac{\boldsymbol{u}'}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{u}^{\mathbf{2}}}}.$$

Пример 72. Найти y' если $y = \arcsin x^3$.

Р е ш е н и е. Используя формулу $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ имеем

$$y' = (\arcsin x^3)' = \frac{(x^3)'}{\sqrt{1 - (x^3)'}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1 - x^6}}$$

Пример 73. Найти производную функции $y = arcsin\ Inx$.

Р е ш е н и е. Снова применяем формулу $(arcsin\ u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^3}}$;

$$y' = (arcsin\ In\ x\ )' = \frac{(Inx)'}{\sqrt{1 - (Inx)^2}} = \frac{1}{x\sqrt{1 - In^2 x}}.$$

Пример 74. Продифференцировать функцию $y = arcsin\ tg^2 x$.

Р е ш е н и е. $y' = (arcsintg^2 x)' = \frac{(tg^2 x)}{\sqrt{1-(tg^2 x)^2}} = \frac{2tgx(tg\ x)}{\sqrt{1-tg\ x^4 x}} = \frac{2tg\ x\frac{1}{cos^2 x}}{\sqrt{1-tg^4 x}} =$

$\frac{2\ tg\ x}{cos^2 x\sqrt{1-tg^4 x}}$.

Здесь мы применили формулы $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $(tg\ x)' =$

$\frac{1}{cos^2 x}$.

Задание 129. Найти y', если $y = arcsin5x$.

Задание 130. Найти y', если $y = arcsinx^2$.

Задание 131. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \arcsin(\frac{x^3}{3})$.

П р о и з в о д н ы е   ф у н к ц и й $y = arcos\, x$ и $y = arcos\, u,$ где $u = f(x)$.
Найдем производную функции $y = arcos\, x$. По определению арккосинуса имеем $cos\, y = x$, где $0 \le y \le \pi$. Продифференцируем по x-обе части равенства, учитывая, что $cos\, y$ —сложная функция: $-sin\, y \cdot y' = 1$, откуда $y' = -\frac{1}{\sin y}$; Далее, после соответствующих замен получим

$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т. е.

$$(\mathbf{arccos}\, \boldsymbol{x})' = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}.$$

Для функции $y = arcos\, u$, где $u = f(x)$, используя формулу производной сложной функции, находим

$$(\boldsymbol{arcos\, u})' = -\frac{\boldsymbol{u}'}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{u}^{\mathbf{2}}}}.$$

Замечание. Производные функций $arcsin\, u$ и $arccos\, u$ отличаются только знаком.

Задания 132-122. Найти производные следующих функций:

132. $y = arccosx^2$. **133.** $y = arccos3x$

134. $y = arccoslnx$. **135.** $y = arccoslnx^3$.

Задание 136. Найти $f'(1/3)$, если $f(x) = arctg\, x$.

П р о и з в о д н ы е   ф у н к ц и й $y = arctg\, x$ и $y = arctg\, u,$ где $u = f(x)$.
Найдем производную функции $y = arctg\, x$. По определению арктангенса имеем $tgy = x$, где $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Продифференцируем по x обе части равенства, учитывая, что $tg\, y$ —сложная функция: $\frac{1}{cos^2 y} \cdot y' = 1$, откуда $y' = cos^2 y$. Далее, выразив $cos^2 y$ из известного соотношения $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$, находим $y' = \frac{1}{1+tg^2 y}$.

Отсюда, заменяя $tg\, y$ на x, а y на $arctg\, x$, получим

$$(\boldsymbol{arctg\, x})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}.$$

Для функции $y = arctg\, u$, где $u = f(x)$, используя формулу производной сложной функции, имеем

$$(\boldsymbol{arctg\, u})' = \frac{\boldsymbol{u}'}{\mathbf{1} + \boldsymbol{u}^{\mathbf{2}}}.$$

П р о и з в о д н ы е ф у н к ц и й $y = arcctg\, x$ и $y = arcctg\, u$,

где $u = f(x)$.

Найдем производную функции $y = arcctg\, x$. По определению арктангенса имеем $ctgy = x$, где $0 < y < \pi$. Продифференцируем по x обе части равенства, учитывая, что $ctg\, y$ −сложная функция:

$-\frac{1}{sin^2 y} \cdot y' = 1$, откуда $y' = -{sin^2}^2 y$. Выразив $sin^2 y$из известного соотношения $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$, получим $y' = -\frac{1}{1+ctg^2 y}$. Отсюда, заменяя $ctg\, y$ на x, а y на $arcctg\, x$, получим

$$(\boldsymbol{arcctg\, x})' = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}.$$

Для функции $y = arcctg\, u$, где $u = f(x)$, используя формулу производной сложной функции, имеем

$$(\boldsymbol{arcctg\, u})' = -\frac{\boldsymbol{u}'}{\mathbf{1} + \boldsymbol{u}^{\mathbf{2}}}.$$

Пример 75. Найти y', если $y = arctg\; 2x$.

Р е ш е н и е. $y' = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot (2x)' = \frac{3}{1+4x^2}$.

Пример 76. Найти y', если $y = arcctg\; 3x$.

Р е ш е н и е. $y' = -\frac{1}{1+(3x)^2} \cdot (3x)' = -\frac{3}{1+9x^2}$.

Пример 77. Найти y', если $y = arctg\, x^2$.

Р е ш е н и е. $y' = \frac{1}{1+x^4} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}$.

Пример 78. Найти $f'\,(1/5)$, если $f(x) = arctg\, 5x + x^2$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{1+5x^2} \cdot (5x)' + 2x = \frac{5}{1+25x^2} + 2x.$$

Следовательно,

$$f'(1/5) = \frac{5}{1+25\cdot\frac{1}{25}} + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = 2.5 + 0.4 = 2.9.$$

Пример 79. Дано: $f(x) = arcstg\frac{x}{2} - arctg\,\sqrt{x}.$ Найти $f'(1)$.

Р е ш е н и е. $f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' - \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}} - \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$-\frac{1}{2\left(1+\frac{x^2}{4}\right)} - \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$;

$$f'(1) = -\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2(1+1)} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{13}{20}.$$

Пример 80. Найти производную функции $y = e^{\sin x \ln \cos x}$.

Р е ш е н и е.

$$y' = \left(e^{\sin x \ln \cos x}\right)' = e^{\sin x \ln \cos x} \cdot (\sin x \ln \cos x)' =$$

$$= (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \ln \cos x + \frac{\sin x}{\cos x}(\cos x)'\right) =$$

$$= (\cos x)^{\sin x}(\cos x \ln \cos x - \sin x tgx).$$

Задания 137– 151. Найти производные следующих функций:

137. $y = arctg\, 3x$. **138.** $y = arcctg\, 5x$.

139. $y = arctgx^3.$ **140.** $y = arcctg\, x^2.$

141. $y = arctg\frac{2x}{1-x^2}.$ **142.** $y = arcctg\sqrt{x}.$

143. $y = Inarctg\frac{x}{2}.$ **144**. $y = arcctg\, e^x.$

145. $y = arctg\, In\, x^2.$ **146.** $y = arcctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$

148. $y = arctg\sqrt{x^2} + 2x.$ **149.**$y = arcctg\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$

150. $y = \frac{x^2}{arctg\, x}.$ **151.** $y = arcctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$

1.5.7. Дифференцирование функций заданных неявно и параметрически

Говорят, что уравнение

$$F(x, y) = 0 \qquad (4)$$

неявно задаёт функцию $y = f(x)$ в интервале $(a,\ b)$, если для любого $x_0 \in (a; b)$ уравнение $F(x_0; y)=0$ имеет единственное решение $y_0 = f(x_0)$.

Для нахождения производной функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением (6), следует продифференцировать обе части равенства (6), считая y функцией от x; затем полученное уравнение, в которое будут входить x, y и y', следует разрешить относительно y'. Для нахождения y'' равенство (4) дифференцируется дважды, в результате чего получается уравнение, содержащее x, y, y', y'', которое следует разрешить относительно y'', затем вместо y' подставить функцию от x и y, найденную указанным выше способом.

Пример 81. Найти значения $y'(0)$, $y''(0)$, если функция y задана неявно уравнением

$$e^y + xy = e. \qquad (5)$$

Решение. Считая y функцией от x, продифференцируем обе части равенства (5): $\left(e^y + xy\right)' = \left(e\right)'$;

$$\left(e^y\right)' + \left(xy\right)' = 0;\ e^y \cdot y' + y + xy' = 0. \qquad (6)$$

Отсюда находим

$$y' = -\frac{y}{x + e^y}; \qquad (7)$$

$$y'(0) = -\frac{y(0)}{0 + e^{y(0)}} = -\frac{y(0)}{e^{y(0)}}.$$

Для нахождения $y(0)$ в равенстве (5) положим $x = 0$:

$$e^{y(0)} + 0 \cdot y(0) = e;\ e^{y(0)} = e;\ y(0) = 1.$$

Таким образом,

$$y'(0) = -\frac{1}{e}.$$

Найдём y'', для чего продифференцируем равенство (6):

$$y''e^y + y'e^y \cdot y' + y' + y' + xy'' = 0;$$

$$y''\left(e^y + x\right) = -y'\left(y' \cdot e^y + 2\right);$$

$$y'' = -\frac{y'\left(e^y \cdot y' + 2\right)}{e^y + x}.$$

Подставив в последнем равенстве вместо y' выражение (6), получим

$$y'' = \frac{y\left(2x + 2e^y - ye^y\right)}{\left(x + e^y\right)^3},$$

откуда находим

$$y''(0) = \frac{y(0)\left(2 \cdot 0 + 2e^{y(0)} - y(0)e^{y(0)}\right)}{\left(0 + e^{y(0)}\right)^3} = \frac{1}{e^2}.$$

Если функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad t \in (\alpha;\, \beta), \end{cases}$$

то при условии существования производных $x'(t)$, $y'(t)$ и $x'(t) \neq 0$ существует производная y'_x и при этом

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (8)$$

Вторая производная y''_{xx} находится по формуле

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(y'_t / x'_t)'_t}{x'_t}, \qquad (9)$$

или (что то же самое)

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}. \qquad (10)$$

Пример 82. Найти y'_x, y''_{xx}, если

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = 1/t, \qquad t \in (-1;\, 0) \cup (0;\, 1). \end{cases}$$

Решение. Имеем:

$$x'_t = \left(\sqrt{1-t^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot (-2t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}; \quad y'_t = \left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2}.$$

По формуле (8) имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{1}{t^2} : \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}$$

По формуле (9) найдем y'': $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \left(\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}\right)' : \left(-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = -\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t} \times$

$$\times \frac{\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot t^3 - \sqrt{1-t^2} \cdot 3t^2}{\left(t^3\right)^2} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^7} \cdot \frac{t^4 + 3t^2\left(1-t^2\right)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{3-2t^2}{t^5}.$$

ГЛАВА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§2.1. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Нахождение дифференциала функции, так же, как и нахождение производной, является одной из основных задач дифференциального исчисления.

Пусть точка движется прямолинейно по закону $s=f(t)$; тогда её скорость равна $u=f'(t)$. За время Δt точка пройдет некоторый путь Δs. Если Δt невелико, то скорость не успеет существенно измениться и движения можно считать равномерным. При этом пройденный точкой путь составит $v\Delta t = f'_{(t)}\Delta t$; он пропорционален истёкшему времени Δt. Произведение $f'_{(t)}\Delta t$ называется *дифференциалом* пути и обозначается ds. Фактический путь Δs отличается от пути ds, но если промежуток времени Δt достаточно мал, то можно считать, что $ds \approx \Delta s$.

К такому же заключению можно прийти, рассматривая другие неравномерные процессы. Во всех случаях для перехода от неравномерных процессов к равномерным истинное изменение какой-либо величины заменяют её дифференциалом. Это замена основана, на то что на протяжении малого промежутка времени всякий процесс приближается к равномерному.

Дадим общее определение дифференциала.

Пусть дана функция $y=f(x)$, Дифференцируемая в точке x. Это значит, что функция в точке x имеет производную, т.е. существует $lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ Следовательно, для функции $f(x)$ выполняется равенство $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + a,$ где $a \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Умножив обе части этого равенство Δx, получим

$$\Delta y = y'\Delta x + a\Delta x. \qquad (2.1)$$

Здесь y' есть функция от x и не зависит от Δx; следовательно, Δx входит в первое слагаемое в первой степени (т.е. линейно). Поэтому первое слагаемое представляет собой линейную часть превращение функции (про второе слагаемое этого сказать нельзя, поскольку a также зависит от Δx).

Тогда при $\Delta x \to 0$ вторым слагаемым, $a\Delta x$ можно пренебречь, и первое слагаемое $y'\Delta x$ будет являться главной частью приращения функции (исключая случай, когда $y'=0$).

Определение: Главная часть приращения функции, линейная относительно приращения независимой переменной, называется дифференциалом функции и обозначается знаком d, то есть.

$$dy = y'\Delta x \qquad (2.2)$$

Таким образом, для всякой функции $y = f(x)$ производная y' зависит только от одной переменной x, тогда как ее дифференциал зависит от двух независимых друг от друга переменных: x и Δx.

Пример 83. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2$ в точке $y = 2$ при $\Delta x = 0{,}1$.

Решение: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$;

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0{,}1}} = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 0{,}4 + 0{,}01 = 0{,}41;$$

$$dy = y' \cdot \Delta x = (x^2)' \cdot \Delta x = 2x \cdot \Delta x; \ dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0{,}1}} = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}4.$$

Задание 152. Найти приращение функции $y = \frac{1}{2}x^2$ в точке $x = 3$ при $\Delta x = 0{,}01$.

Задание 153. Сравнить приращение и дифференциал функции $y = 2x^3 + 5x^2$.

Задание 154. Дана функция $y = 2x^2 - 3x = 3$. Вычислить приращение и дифференциал функции при переходе аргумента от значения $x_1 = 1$ к значению $x_2 = 1{,}001$.

§ 2.2. Геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$ (рис. 2.1). Производная функции в точке с абсциссой x равна тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox, т.е.

$$y' = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

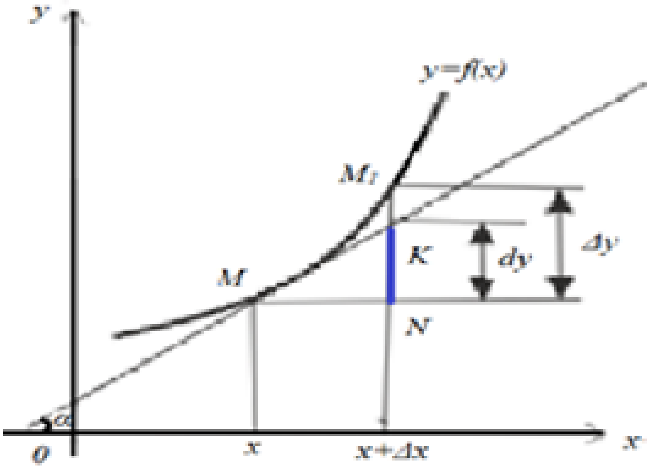


рис. 2.1

Из рисунка видно, что касательная разбивает приращение функции

$\Delta y = NM_1$ на два отрезка: M_1K, соответствующий в равенстве (2.1) слагаемому $\alpha\Delta x$, и NK, соответствующий слагаемому $y'\Delta x$.

Если приращение аргумента стремится к нулю (точка M_1стремится занять положение M),то отрезок M_1K уменьшается значительно быстрее, чем отрезок NK.

Таким образом, приращение ординаты касательной NK является главной частью приращения функции $y = f(x)$.

Из треугольника MNK находим $|NK| = |MN| \cdot tg\,\alpha$. Так как $|MN| = \Delta x$, $tg\alpha = y'$, *то* $|NK| = y'\Delta x = dy$.

Итак, дифференциал функции $y = f(x)$ геометрически изображается приращением ординаты касательной, проведенной в точке $M(x; y)$ при данных значениях x и Δx.

§ 2.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Рассмотрим функцию $y = x$. Из формулы $dy = y'\Delta x$ получаем $dx = \Delta x$, так как y можно заменить на x (по условию), а $y' = (x)' = 1$.

Итак, дифференциал независимой переменной dx совпадает с его приращением Δx.

Учитывая это, дифференциал функции можно вычислить по формуле.

$$\boldsymbol{dy = y'dx} \,. \qquad (2.3)$$

Так, если $y = x^3$, то $dy = (x^3)'dx = 3x^2dx$; если $y = \sin x$, то $dy = \cos x \; dx$.

Очевидно, чтобы вычислить дифференциал функции, нужно ее производную умножить на dx.

Отсюда следует, что правила нахождения дифференциала остаются теми же, что и для нахождения производных.

Для удобства пользования выпишем основные формулы нахождения дифференциалов в виде таблицы:

I $\boldsymbol{d(C) = 0}$	*II* $\boldsymbol{d(x) = dx}$.
III $\boldsymbol{d(u + v - \omega) = du + dv - d\omega}$.	*IV* $\boldsymbol{d(uv) = v\,du + u\,dv}$.
V $\boldsymbol{d(Cu) = C\,du}$.	*VI* $\boldsymbol{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}}$.
VII $\boldsymbol{d\Big(y\big(u(x)\big)\Big) = y'_u u'_x dx}$.	*VIII* $\boldsymbol{d(\ln x) = \frac{dx}{x}}$.
IX $\boldsymbol{d(log_a x) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}}$.	*X* $\boldsymbol{d(x^n) = nx^{n-1}dx}$.
XI $\boldsymbol{d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}}$.	*XII* $\boldsymbol{d(a^x) = a^x \ln a \; dx}$.

XIII $\boldsymbol{d(\sin x) = \cos x\, dx}$.	*XIV* $\boldsymbol{d\,(\cos x) = -\sin x\, dx}$.
XV $\boldsymbol{d(tg\, x) = \frac{dx}{\cos^2 x}}$.	*XVI* $\boldsymbol{d(ctg\, x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}}$.
XVII $\boldsymbol{d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}$.	*XVIII* $\boldsymbol{d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}$.
XIX $\boldsymbol{d(arctg\, x) = \frac{dx}{1+x^2}}$.	*XX* $\boldsymbol{d(arcctg\, x) = -\frac{dx}{1+x^2}}$.

Пример 84. Найти дифференциалы функций:

а) $y = \sqrt{x^3+3}$; б) $y = \frac{x-1}{x+2}$; в) $y = x(x+1)$.

Р е ш е н и я:

а) $dy = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^2+3}}dx$;

б) $dy = \frac{(x-1)'(x+2)-(x+2)'(x-1)}{(x+2)^2}dx = \frac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)^2}dx = \frac{3}{(x+2)^2}dx = \frac{3dx}{(x+2)^2}$;

в) $dy = (x'(x+1) + (x+1)'x)dx = (x+1+x)dx = (2x+1)dx$.

Задания 155-164. Найти дифференциалы функций:

155. $y = \sqrt{2x}$.

156. $y = \frac{x}{x+5}$.

157. $y = \frac{x^2-1}{x+2}$.

158. $y = x(x-3)$.

159. $y = (x-3)(x+2)$.

160. $y = \sqrt{x^2-3x}$.

161. $y = \frac{x-3}{x}$.

162. $y = \frac{x^2-3x+1}{x}$.

163. $y = x^2(x+5)$.

164. $y = (x^2-3x+2)(x^2+1)$.

§2.4. Дифференциал сложной функции

Выведем формулу дифференциала сложной функции. При этом мы, конечно, можем воспользоваться формулой производной сложной функции. Однако, сейчас мы убедимся в том, что нахождение дифференциала сложной функции имеет некоторые преимущества по сравнению с нахождением производной сложной функции.

Ранее было доказано, что $\Delta x = dx$ в том случае, когда аргумент x является независимой переменной. Поэтому и при решении предыдущих примеров, пользуясь формулой $dy = y'dx,$ мы вычисляли дифференциалы лишь для тех функций, для которых аргумент x есть независимая переменная.

Пусть теперь дана функция $y = f\big(u(x)\big)$, которая косвенно зависит от x через другую зависимую переменную u (например, $y = e^{sinx}$ или $y = tgx^5$) т.е. $f\big(u(x)\big) -$ функция от функции или сложная функция. Очевидно, здесь x является независимой переменной, в то время как аргумент $u(x)$ есть зависимая переменная.

Найдем дифференциал данной функции: $dy = (f\big(u(x)\big))'dx.$ Но $(f\big(u(x)\big) = (f\big(u(x)\big))' = f'_u u'_x$ согласно правилу производной сложной функции. Тогда

$$dy = f'_u u'_x dx.$$

Так как выражение $u'(x)dx$ есть дифференциал функции $u\,(x)$, то $u'(x)dx = du$ и, следовательно,

$$\boldsymbol{dy = f'(u)du}. \qquad (2.4)$$

Сравним теперь полученную формулу с формулой $dy = f'(x)dx,$ где аргумент x есть независимая переменная и $dx = \Delta x.$

Хотя в формуле (2.4) аргумент u является зависимой переменной и $du \neq \Delta u,$ но в этом случаем дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента.

Это свойство дифференциала сохранять неизменной формулу вычисления по отношению к любому преобразованию аргумента называется *инвариантностью* дифференциала.

Свойство инвариантности дифференциала позволяет вычисление дифференциала производить более наглядно.

Так, если $y_1 = e^{\sin x}$, то, используя формулу (2.4), получим $dy_1 = e^{\sin x} d(\sin x)$; если $y_2 = sin3x$, то $dy_2 = cos3x\, d(3x)$ и т.д.

При необходимости вычисление дифференциала можно продолжить, раскрыв выражение $du = u'(x)dx$. Для приведенных выше примеров имеем

$$dy_1 = e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} cosx\, dx;$$

$$dy_2 = cos3xd(3) = 3cos3x\, dx.$$

Пример 85. Найти $dy, df(2), df(2)$ *при* $dx = 0{,}2$, *если* $y = \ln(1+x^2)$.

Решение: По формуле $df = dy = f'(x)dx$, $dy = f'(x)dx = \frac{2x}{1+x^2}dx$. При *x=2* имеем $df(2) = \frac{4}{5}dx$. При $dx = 0{,}2$ имеем $df(2)\big|_{dx=0,2} = \frac{4}{5} \cdot 0{,}2 = 0{,}16$.

Задания 165-176. Найти дифференциалы функций:

165. $\mathrm{y} = \sin 5\mathrm{x}$.

166. $\mathrm{y} = \cos^2 x$.

167. $y = tg^3 4x$.

168. $\mathrm{y} = \mathrm{arctg} 2\mathrm{x}$.

169. $y = arccosx^3$.

170. $y = \ln \sin x$.

171. $y = \ln cosx^3$.

172. $y = In\ sin^3 5x$.

173. $y = \sqrt{\frac{1-x}{x^2}}$.

174. $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

175. $y = \frac{\cos x}{1-sinx}$.

176. $y = x^2 sin\sqrt{x}$.

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Пусть задана сложная функция $y = F(t) = f(g(t)), y = f(x), x = g(t)$. $dy = (f(g(t))'dt = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dg = f'(x)dx$. Вид первого дифференциала такой же, как если бы x являлось независимой переменной. Это свойство называется свойством инвариантности дифференциала первого порядка.

Для дифференциалов высших порядков свойства инвариантности, вообще говоря, нет.
$dy = f'dx,\ d^2y = f''dx^2 + f'd^2x$, например, для функции $x = t^2$, второй дифференциал $d^2x \neq 0$.

Замечание. (Важный частный случай, когда свойство инвариантности наблюдается и для старших дифференциалов). В случае, когда внутренняя функция суперпозиции линейна, свойство инвариантности сохраняется для дифференциалов произвольных порядков.

$d^ny,\ y = f(x),\ x = at + b,\ dx = adt,\ \ d^2x = \cdots = d^nx = 0$. Таким образом, n – ый дифференциал $d^nf = f^{(n)}dx^n$ имеет такой же вид, как и в случае независимого переменного x.

§ 2.5. Дифференцирование функций, заданных неявно

Рассмотрим функцию, заданную неявно уравнением $F(x, y) = 0$ и пусть $y = f(x)$ однозначная ветвь этой функции с областью определения X.
Для вычисления дифференциала $dy(x_0)$ функции достаточно продифференцировать равенство $F(x, y) = 0$. В результате такого дифференцирования получится соотношение вида

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0,$$

где $A(x, y), B(x, y)$ будут представлять собой некоторые выражения, включающие в себя x и y . Из последнего соотношения можно найти выражение для dy в нужной точке.

Пример 86: $x^2 + y^2 = 1,$ найти d^2y.

$2xdx + 2ydy = 0, dy = -\frac{x}{y}dx$. Для нахождения второго дифференциала следует использовать равенство $xdx + ydy = 0$, дифференцируя которое, получим

$dxdx + xd^2x + dydy + yd^2y = 0$ или $dx^2 + dy^2 + \ yd^2y = 0$, откуда получаем $d^2y = -\frac{dx^2+dy^2}{y} = -\frac{dx^2+\left(\frac{x}{y}\right)^2 dx^2}{y} = -\frac{y^2+x^2}{y^3}dx^2 = -\frac{1}{y^3}dx^2.$

§ 2.6. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Рассмотрим теперь вопрос об использовании дифференциала в приближенных вычислениях.

Для этого вернемся к формуле $\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x,$ которую запишем в виде

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x,$$

где Δy —приращение функции, dy —дифференциал функции, а $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Это позволяет сделать вывод о том, что

$$\boldsymbol{\Delta y \approx dy}, \qquad (2.5)$$

т.е. приближенное значение приращения функции совпадает с ее дифференциалом.

Функция может иметь довольно сложное выражение и ее приращение не всегда просто найти, но при достаточно малых значениях $|\Delta x|$ приращение функции можно заменить ее дифференциалом, исключая точки, где $y' = 0$. Равенство (2.5) применяется для приближенных вычислений.

Из рис. 2.2 видно, что дифференциал функции равен приращению $|NR|$ ординаты касательной, т.е. замена приращения функции на ее дифференциал геометрически обозначает, что график функции заменяет отрезком PR касательной, проведенной к нему в точке касания P. Такая замена естественна при достаточно малом $|\Delta x|$.Итак, при достаточно малом $|\Delta x|$ приближенное равенство $\Delta y \approx dy$ обладает достаточно высокой степенью точности. Отсюда находим

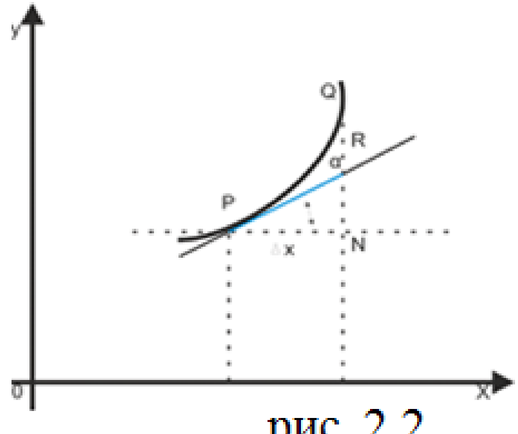


рис. 2.2

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$$

или

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+dy \qquad (2.6)$$

Это одна из основных формул для приближенных подсчетов.

Приближенное вычисление приращения функции

Пример 88. Пользуясь понятием дифференциала функции, вычислить приближенно изменение функции $y=x^3-7x^2+80$ при изменении аргумента x от 5 до 5.01.

Решение. Находим

$$\Delta y\approx dy=y\Delta x=(3x^2-14x)\Delta x$$

При $x=5, \Delta x=5.01-5=0.$ получим

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=5\\ \Delta x=0.01}}=(3\cdot 5^2-14\cdot 5)0.01=0.05$$

Задание 177. Как приближенно изменится значение функции $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-5$ при изменении аргумента x от 3 до 3.1?

Задание 178. Найти приближенное значение приращения функции $y=3x^2+5x+1$ при $x=3$ и $\Delta x=0.001$

Задание 179. С помощью дифференциала найти приближенно приращение функции $y=lnx$ при $x=10$ и $\Delta x=0.01$

Задание 180. На сколько увеличиться объем шара при нагревании, если его радиус R=5 см удлинится на $\Delta R=0.002$ см?

Задание 181. Найти увеличение объема куба при нагревании, если его ребро 10 см удлинится на 0.01см.

Вычисление погрешности приближенного приращения функции

Пример 89. Найти приближенно приращение функции $y=3x^2+2$ при $x=2$ и $\Delta x=0.001$. Определить абсолютную и относительную погрешности вычисления.

Р е ш е н и е. Так как приращение аргумента — величина малая, то приращение функции можно заменить ее дифференциалом:

$$\Delta \mathrm{y} \approx dy\Big|_{\substack{x=2\\ dx=0{,}001}} = 6xdx\Big|_{\substack{x=2\\ dx=0{,}001}} = 6\cdot 2\cdot 0{,}001 = 0{,}012.$$

Найдем ошибку, полученную при замене приращения функции ее дифференциалом. Для этого вычислим точное значение приращения функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 3(x+\Delta x)^2 + 2 - (3x^2 2) =$$

$$= 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2 - 3x^2 - 2 = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2;$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2,\\ \Delta x=0{,}001}} = 6\cdot 2\cdot 0.001 + 3\cdot 0.000001 = 0{,}012003.$$

Сравнивая точное значение Δy с приближенным, видим, что абсолютная погрешность есть

$$\Delta = |\Delta y - dy| = 0{,}000003.$$

Относительная погрешность составляет

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{dy}\right| = \frac{0{,}000003}{0{,}012003} \approx 0{,}00025 = 0{,}025\%.$$

Пример 90. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y = x^2 + 2x$ ее дифференциалом в точке $x = 2$ при $\Delta x = 0.1$.

Р е ш е н и е. $\Delta y = \big((x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)\big) - (x^3 + 2x) =$

$$= 3x^2\Delta x + 3x(dx)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x;$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.1}} = 3\cdot 2^2\cdot 0.1 + 3\cdot 2\cdot 0.1^2 + 0.1^3 + 2\cdot 0.1 = 1.461:$$

$$dy = y'\Delta x = 3(x^2+2)\Delta x;\ dy\Big|_{\substack{x=2,\\ \Delta x=0{,}1}} = (3\cdot 2^2 + 2)\cdot 0{,}1 = 1{,}4;$$

$$|\Delta y - dy| = 1{,}461 - 1.4 = 0{,}061;\ \delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0.061}{1.461} \approx 0.042 = 4\%$$

Задание 182. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене прирашения функции $y = x^2 - 2x$ ее дифференциалом в точке $x = 1$ при $\Delta x = 0.001$.

Задание 183. Найти абсолютную и относительную погрешности приближнего прирашения функции $y = 2x^3 + 5$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0.001$.

Задание 184. Ребро куба длиной 30 см увеличено на 0,1 см. Определить приближенно величину изменения объема куба и найти погрешность этого приближения.

Вычисление приращения функции с заданной точностью

Пример 91. С помощью дифференциала вычислить с точностью до *0,01* приращение функции $y = x\sqrt{x^2+5}$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}2$.

Решение. Находим дифференциал данной функции:

$$dy = y'dy = \left(\sqrt{x^2+5} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx.$$

При $x = 2$ и $\Delta x = 0.2$ получим

$$\Delta y \approx dy\Big|_{\substack{x=2,\\ dx=0{,}2}} = \left(\sqrt{4+5} + \frac{4}{\sqrt{4+5}}\right)\cdot 0.2 \approx 0.866 \approx 0.87.$$

Задание 185. С помощью дифференциала вычислить с точностью до *0,001* приращение функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ при x=1 и $\Delta x = 0.2$

Применение дифференциала для установления ошибок в вычислениях

Пример 92. Непосредственным измерением нашли, что диаметр круга равен *6.4* см, причем максимальная ошибка не превышает *0.05* см. Найти приближенно максимально ошибку в оценке площади вычисляемой по формуле $S = \frac{1}{4}\pi x^2$ (x– диаметр).

Р е ш е н и е. Очевидно, что точная величина максимальной ошибки есть ΔS, причем x изменяется от 6,4 до 6,45. Приближенная же величина максимальной ошибки есть соответствующий дифференциал dS.

Находим

$$dS = S'(x)dx = \tfrac{1}{2}\pi x\, dx\ \Big|_{\substack{x = 6,4 \\ dx = 0,05}} = \tfrac{1}{2}\pi \cdot 6,4 \cdot 0,05 = 0,5024\ (\text{см}^2).$$

Относительная ошибка в оценке площади составляет

$$\frac{ds}{s} = \frac{2dx}{x} = \frac{2 \cdot 0,05}{6,4} \approx 0,015 = 15\%$$

Задание 186. Найти относительную погрешность, допущенную при измерении площади квадратной комнаты, если длина стороны измерена с погрешностью не более *0,05* м и составляет *4,6* м.

Задание 187. Найти относительную погрешность, допущенную при измерении объема куба, если ребро равное 12.5 см. измерено с погрешностью, не превышающей 0,01 см.

Задание 188. Доказать, что относительная погрешность корня равна относительной погрешности подкоренного числа, на показатель степени корня.

Задание 189. Доказать что относительная погрешность корня $\sqrt[3]{x}$ равна ${}^{dx}/_{3x}$

Задание 190. Найти относительную погрешность допускаемую при вычислении стороны квадрата, если его площадь 68,5 см^2 измерена с погрешностью 0,05 см.

Задание 191. Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi R^2$. При измерении радиус R оказался равным 5,2 см, причем максимально возможная при этом погрешность измерения ΔR не превышает 0,05 см. Определить абсолютную и относительную погрешностью, допускаемые при вычислении площади круга по указанной формуле.

Нахождение приближенного значения функции

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Мы знаем, что при достаточно малом Δx имеет место приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy$$

Подставляя в это приближенное соотношение выражения для Δy и dy получим

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

Отсюда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x \qquad (2.7)$$

Формула (2.7) является основной в приближенных вычислениях. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$. Мы знаем, что $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.Если $x_0 = 1$ то $f(1) = 1.$ а $f'(1) = \frac{1}{2}$ и на основании (3.7) при малых $|\Delta x|$ имеем

$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1+\frac{1}{2}\Delta x \qquad (2.8)$$

Пример 93. Вычислить приближенно $\sqrt{1.03}$

Решение:

$$\sqrt{1.03}=\sqrt{1+0.03}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0.03=1+0.015=1.015$$

Аналогично можно вычислить значение $\sqrt{0.97}$. Представим корень в виде $\sqrt{1-0.03}$.Далее на основании формулы, получим

$$\sqrt{1-0.03} \approx 1+\frac{1}{2}(-0.03)=1-\frac{0.03}{2}=0.985$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[n]{x}$. Производная этой функции $f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

Хотим вычислить $\sqrt[n]{1+\Delta x}$, где Δx достаточно мала и о сравнению единицей, так как $f(1) = \sqrt[n]{1}=1$ и $f'(1) = \frac{1}{n}$ то формула (2.7) имеет вид

$$\sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1+\frac{1}{n}\Delta x \qquad (2.9)$$

Например, вычислить $\sqrt[3]{1.02}$.Представим этой корень в виде $\sqrt[3]{1+0.02}$. беря за $\Delta x = 0.02$ и используя формулу (3.9) при $n = 3$, получим

$$\sqrt[3]{1.02} = \sqrt[3]{1+0.002} \approx 1 + \frac{1}{3}\cdot 0.02 = 1.007$$

Пусть h весьма мало по сравнению с a^n.Тогда основании формулы (2.9) можно вычислить

$$\sqrt[n]{a^n + h} = \sqrt[n]{a^n\left(1 + \frac{h}{a^n}\right)} = a^n\sqrt{1 + \frac{h}{a^n}} \approx a\left(1 + \frac{h}{na^n}\right). \tag{2.10}$$

Например,

$$\sqrt{101} = \sqrt{100+1} = \sqrt{10^2 + 1} = \sqrt{10^2\left(1 + \frac{1}{10^2}\right)} = 10\sqrt{1 + \frac{1}{10^2}} \approx 10\left(1 + \frac{1}{2\cdot 10^2}\right) = 10 + \frac{1}{20} = 10 + 0.05 = 10.05$$

Другой пример, найти $\sqrt{67}$. Представим этой корень в виде

$$\sqrt{67} = \sqrt{8^2 + 3} = \sqrt{8^2\left(1 + \frac{3}{8^2}\right)} = 8\sqrt{1 + \frac{3}{8^2}} \approx 8 + \frac{3}{2\cdot 8} = 8\frac{3}{16}$$

Для функции $f(x) = x^n$ формула (2.7) имеет вид

$$(x_0 + \Delta x)^n \approx x_0{}^n + nx_0{}^{n-1}\Delta x \tag{2.11}$$

В частности для $f(x) = x^2$ имеем

$$(x_0 + \Delta x)^2 \approx x_0{}^2 + 2x_0\Delta x \tag{2.12}$$

Из соотношений (2.11) и (2.12) при $x_0 = 1$ соответственно получим

$$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\cdot\Delta x \tag{2.13}$$

$$(1 + \Delta x)^2 \approx 1 + 2\cdot\Delta x \tag{2.14}$$

Пример 94: Пусть требуется вычислить 1.032^2.

Р е ш е н и е: На основании (2.14), имеем

$$1.032^2 = (1 + 0.032)^2 \approx 1 + 2\cdot 0.032 = 1.064$$

Пример 95. Найти приближенное значение функции $y = \sqrt{3x^2} + 1$ при $x = 1{,}02$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (3.12), т.е. $f\ (x+\Delta x)\approx f\ (x)$+$dy$. В данном случае следует принять $x=1$. Тогда $\Delta x=1.02-1=0.02$. Значение функции при $x=1$ определяется легко:

$f(1)=\sqrt{3\cdot 1^2+1}=2$ Далее находим

$$dy=\left(\sqrt{3x^2+1}\right)\ dx=\frac{6xdx}{2\sqrt{3x^2}+1}=\frac{3xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$$

откуда

$$dy\Big|_{\Delta x=0{,}02}^{x=1}=\frac{3\cdot 1\cdot 0.02}{\sqrt{3\cdot 1^2+1}}=\frac{0{,}06}{2}=0.03$$

Следовательно,

$f(1{,}02)\approx\ f(1)+0.03=2.03.$

Если значение данной функции при $x=1.02$ вычислить непосредственно, то получим $f(1{,}02)=\sqrt{3\cdot 1{,}02^2+1}=2{,}03007\ \ldots$, т.е. разность между точным значением данной функции при $x=1{,}02$ и её приближенным значением является числом очень малым: 2.03007-2.03=0.00007

Замечания

1. Чтобы правильно применять формулу приближенного вычисления значение функции, нужно научиться подбирать функции $f(x)$. Так для нахождения 2.08^6 нужно взять $f(x)=x^6$, $x=2$, $\Delta x=0.08$; для вычисления $\sqrt[3]{9}$ — взять $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=8$, $\Delta x=1$.
2. При использовании дифференциала функции для приближенного вычисления значения функции и её приращения нужно помнить, что формулы $\Delta y\approx dy=f(x)\Delta x$ и $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy=f(x_0)+f'(x)\Delta x$ дают достаточно точные результаты только при условии, что $|\Delta x|$ близко к нулю.

Например, вычисляя значение функции $f(x)=x^3+2x$ при $x=3{,}986$. Следует положить $x_0=4, \Delta x=-0{,}014$ (Было бы ошибкой полагать $x_0=3; \Delta x=0.986$).

Пример 96. Вычислить $\operatorname{tg} 46°$, исходя из значения функции $y = \operatorname{tg} x$ при $x = 45°$ и заменяя её приращение дифференциалом.

Р е ш е н и е. Здесь $x = 45°$, $\Delta x = 46° - 45° = 1°$. Чтобы воспользоваться формулой (6), нужно углы выразить в радианах: $x = \frac{\pi}{4}$ и $\Delta x = 0.0175$.

Вычисляем дифференциал функции при $x = \pi/4$ и $dx = \Delta x = 0{,}0175$

$$dy = \frac{1}{\cos^1 x} dx \Big|_{dx = 0.0175}^{\pi/4} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \cdot 0.0175 = 0.035:$$

$$dy = \frac{1}{cos^2 x} dx \Big|_{\substack{x=\pi/4 \\ dx=0{,}0175}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \cdot 0{,}0175 = 0{,}0350.$$

Следовательно $\Delta y \approx 0.0350$. Теперь находим

$$tg46° = y + \Delta y|_{\substack{x=\pi/4 \\ dx=0{,}0175}} \approx tg45° + 0{,}0350 = 1{,}035.$$

Вычисления с помощью четырехзначных таблиц дают: $\operatorname{tg} 46° = 1{,}0355$.

Пример 97. Найти приближённое значение $\sqrt{15{,}75}$.

Р е ш е н и е: Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$.

Положим $x_0 = 16$; тогда $\Delta x = 15{,}75 - 16 = -1/4$. Используя формулу $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df$, имеем

$f(x_0) = \sqrt{16} = 4$; $df = f'(x_0)dx$, $dx = \Delta x = -1/4$, $f'(x) = \left(x^{1/2}\right)' = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$;

$f'(x_0) = 1/\left(2\sqrt{16}\right) = 1/8$.

Отсюда находим $df = \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1/32$,

$\sqrt{15{,}75} \approx 4 - 1/32 = 127/32 = 3{,}96875 \approx 3{,}97$.

Пример 98. Найти приближённое значение $\sqrt{1.03}$

Р е ш е н и е: Используя формулу $\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x$, имеем

$$\sqrt{1.03} = \sqrt{1+0.03} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.03 = 1 + 0.015 = 1.015.$$

Пример 99. Найти приближённое значение $\sqrt{0.97}$

Р е ш е н и е: Представим корень в виде $\sqrt{1-0.03}$.Далее на основании формулы $\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{2}\Delta x$, получим $\sqrt{1-0.03}\approx 1+\frac{1}{2}(-0.03)=1-\frac{0.03}{2}=0.985$

Пример 100. Найти приближенное значение $\sqrt[5]{31}$

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $y=\sqrt[5]{x}$ и найдем её дифференциал: $dy=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}dx$. Вычислим приращенные функции Δy при изменении x от 32 до 31, т. е. при $\Delta x=-1$:

$$\Delta y\approx dy=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}dx\Big|_{\substack{x=32\\ dx=-1}}\cdot\frac{1}{8}(-1)=-0{,}025$$

Следовательно,

$$\sqrt[5]{31}=y+\Delta y|_{\substack{x=32\\ x=-1}}\approx y+dy=\sqrt[5]{32}-0{,}025=1{,}975$$

Пример 101. Найти приближенное значение функции $y=\sqrt[3]{x^2+2x}$ при *x = 2,004*, исходя из ее точного значения при $x_0=2$ и заменяя Δy на dy.

Р е ш е н и е. Здесь начальное значение функции $x_0=2$, наращенное значение $x=x_0+\Delta x=2{,}004$, $\Delta x=2{,}004-2=0{,}004$.

Найдем начальное значение функции: $y|_{x=2}=\sqrt[3]{2^2+4}=\sqrt[3]{8}=2$.

Найдем дифференциал:

$$dy=\left(\sqrt[3]{x^2+2x}\right)'dx=\left((x^2+2x)^{\frac{1}{3}}\right)'dx=\frac{1}{3}(x^2+2x)^{-\frac{2}{3}}(2x+2)dx.$$

При *x=2* и *dx=0,004* получим $dy=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 6\cdot 0{,}004=0{,}002$.

Вычислим приближенное значение функции: $y|_{x=2{,}004}=2+0{,}002=2{,}002$.

Пример 102. Вычислить приближенно $3{,}002^4$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f(x)=x^4$. *Здесь* $x_1=3{,}002, x_0=3, \Delta x=0{,}002$ *и, следовательно,* $f(x_1)=f(3{,}002)=3{,}002^4$. Находим $f(x_0)=f(3)=3^4=81, f'(x_0)\Delta x=4\cdot 3^3\cdot 0{,}002=4\cdot 27\cdot 0{,}002=0{,}216$. Итак, $3{,}002^4\approx 81+0{,}216=81{,}216$

Проверка показывает, что точные значение числа $3{,}002^4$ равно *81,216116096016*. Относительная погрешность достаточно мала и составляет *0,00014%.*

Пример 103. Вычислить приближенно $1{,}998^5$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f(x) = x^5$. Здесь $x_1 = 1{,}998$, $x_0 = 2$, $\Delta x = -0{,}002$, $f(x_1) = f(1{,}998) = 1{,}998^5$. Далее, находим $f(x_0) = f(2) = 2^5 = 32$, $f'(x_0)\Delta x = 5 \cdot 2^4(-0{,}002) = 5 \cdot 16(-0{,}002) = -0{,}16$.

В результате получаем $1{,}998^5 \approx 32 - 0{,}16 = 31{,}84$.

Пример 104. Найти приближенн*о* $\sin 31\,°$.

Р е ш е н и е. Будем искать приближенное значение функции $y = \sin x = 31°$, исходя из ее точного значения пр*и* $x = 30°$. Имеем $\sin 30° = 0{,}5$, $dx \approx \Delta x = 31° - 30° = 1°$(или в радианах $dx = 0{,}175$).

Найдем $dy = \cos x\ dx$. *Д*алее, при *x=30*, $dx = 0{,}0175$ получим $dy = \cos 30° \cdot 0{,}0175 = 0{,}866 \cdot 0{,}0175 = 0{,}015$.

Таким образом, $\sin 31° \approx \sin 30° + dy = 0{,}5 + 0{,}015 = 0{,}515$.

Задания 192-195. Вычислить приближенные значения следующих функций:

192. y=x^3 при $x = 10{,}03$.

193. y= $x^4 - 2x + 4$ при $x = 3{,}002$.

194. y=$\sqrt{x}$ при $x = 24{,}99$.

195. y=$\sqrt{x^3 - 2x}$ при $x = 1{,}96$.

Задания 196-210. Найти приближенные значения:

196. $2{,}005^4$. **197.** $2{,}002^{10}$. **198.** $2{,}995^5$.

199. $1{,}995^{10}$. **200.** $1{,}998^6$. **201.** $\sqrt{1{,}07}$.

202. $\sqrt{0{,}84}$. **203.** $\sqrt[3]{0{,}95}$. **204.** $\sqrt{25{,}4}$.

205. $\sqrt{81`{,}8}$. **206.** $\sqrt{36{,}7}$. **207.** $\sqrt[3]{26{,}8}$.

208. $\cos 61^0$. **209.** $\sin 61^0 3'$. **210.** $2^{2{,}98}$.

§2.7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.7.1. Производные высших порядков

Определение. Пусть $f(x)$ *определена на* (a,b) *и имеет в некоторой окрестности точки* $x_0 \in (a,b)$ *производную* $g(x) = f'(x)$. *Если в точке* x_0 *существует* $g'(x_0)$, *то она называется производной второго порядка от* f *в точке* x_0 *и обозначается* $f''(x_0)$. *Производной* $n -$ го *порядка называется производная от производной* $(n-1) -$ го *порядка*

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Обозначение Лейбница $f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$.

Отметим, что для существования n-ой производной в точке, предыдущая $(n-1) -$ япроизводная должна существовать в некоторой окрестности.

Аналогично определяются односторонние производные старших *порядков.*

Функция f *называется* ***n-раз дифференцируемой*** *на* X, *если в каждой точке X существует* n*-ая производная* f *называется* n*-раз непрерывно дифференцируемой на X, если* n*-ая производная на X существует и непрерывна на X.*

Классы $C(X), C[a,b], C^n(X), C^n[a,b]$.

$C^n(X)$ *– множество всех n-раз непрерывно дифференцируемых на X функций.*

$C^n[a,b]$ *– множество всех n-раз непрерывно дифференцируемых на* $[a,b]$ *функций.*

$C(X)$ *–Множество всех непрерывных на X функций.*

$C[a,b]$ *–Множество всех непрерывных на* $[a,b]$ *функций.*

2.7.2. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

Дифференциалом второго порядка $d^2f(x)$ функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $df(x;\Delta x)$, где $df(x;\Delta x)$ рассматривается как функция от x: $d^2f = d(df)$. Дифференциалом третьего порядка d^3f называется дифференциал от второго дифференциала: $d^3f = d(d^2f)$; и т.д.

Если переменная x является независимой, то $d^2x = d^3x = \ldots = 0$. В этом случае

$$d^2 f = f''(x)\cdot(dx)^2,\ d^3 f = f'''(x)\cdot(dx)^3,\ldots,\ d^n f = f^{(n)}(x)\cdot(dx)^n,\ldots$$

Для краткости вместо $(dx)^n$ принято писать dx^n; с учётом этого

$$d^n f = f^{(n)}(x)\cdot dx^n. \quad (2.15)$$

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой окрестности имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно (т.е. дифференцируема $(n+1)$ раз), то справедлива формула Тейлора

$$f(x)= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}(x), \quad (2.16)$$

где $R_{n+1}(x)$ – остаточный член, являющийся бесконечно малой величиной при $x \to x_0$. Остаточный член обычно записывают в виде

$$R_{n+1}(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$$

в форме Пеано или в форме Лагранжа

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где c – некоторое число между x_0 и x.

Пример 105. С помощью формулы Тейлора найти приближённое значение sin 1 с точностью до 0,001.

Р е ш е н и е. Введём в рассмотрение функцию $f(x)=\sin x$. Положив $x_0 = 0$, получим

$$f(1) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

где 0 < с < 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

Имеем $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(0) = -\sin 0 = 0$, $f'''(0) = -\cos 0 = -1$, $f^{IV}(0) = \sin 0 = 0$, …, $|R_{n+1}| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| \le \frac{1}{(n+1)!}$. Для вычисления требуемого значения нужно взять n таким, чтобы $|R_{n+1}| < 0{,}001$, или

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}; \ (n+1)! > 1000.$$

Это неравенство достигается при $n = 6$, т.к.7 ! = 5040 >1000. Поэтому

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120} \approx 0{,}8417 \approx 0{,}842.$$

§2.8. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

2.8.1. Теорема Ферма о нуле производной

Теорема. Если $f(x)$ –определена на (a, b) и дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, принимает в точке x_0 наибольшее или наименьшее значение, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Для случая наименьшего значения

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0,$$

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0,$$

откуда следует, что $f'(x_0) = 0$.

Геометрическая интерпретация. Во внутренних точках, где функция принимает наибольшее или наименьшее значение, касательная к графику функции будет горизонтальна.

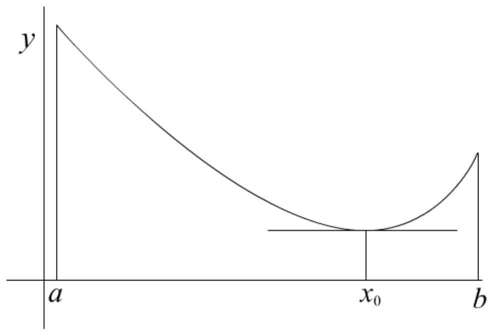


Рис. 2.3

2.8.2. Теорема Ролля о нуле производной

Теорема. Если f *непрерывна на* $[a, b]$, *дифференцируема на* (a, b) *и* $f(a) = f(b)$. *Тогда* $\exists\, x_0 \in (a, b)$: $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Положим,

$$m = \inf_{[a,b]} f(x) = f(x_1), \quad M = \sup_{[a,b]} f(x) = f(x_2),$$

Хотя бы одна из точек x_1, x_2 будет внутренней $M \in (a, b)$ и для этой точки утверждение следует из теоремы Ферма.

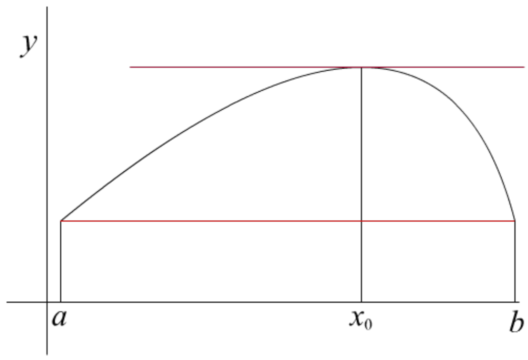


Рис. 2.4

2.8.3. Теорема Лагранжа о конечных приращениях

Теорема. Если f *непрерывна на* $[a, b]$, *дифференцируема на* (a, b),*то*

$$\exists \xi \in (a, b): f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$F(x) = f(x) - \left[f(a)\frac{b-x}{b-a} + f(b)\frac{x-a}{b-a}\right]$. Для этой функции

$F(a) = F(b) = 0$, и к ней применима теорема Ролля

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \left[f(a)\frac{-1}{b-a} + f(b)\frac{1}{b-a}\right] = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Геометрическая интерпретация

Существует точка, касательная в которой, параллельна хорде, соединяющей точки A и B графика функции.

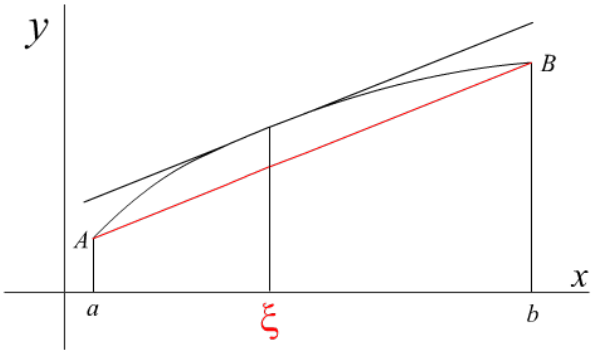


Рис. 2.5

Следствие 1. *Если* f *непрерывна на* $[a,b]$, *дифференцируема* на (a,b) и $f'(x) \equiv 0$ на (a,b), то $f(x) \equiv const$.

Применяя теорему к произвольному отрезку $[a,x]$, где x произвольная фиксированная точка, получим

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) = 0, \text{т. е.} f(x) = f(a).$$

Следствие 2. *Если* f *непрерывна на* $[a,b]$, *дифференцируема* на (a,b) и $f'(x) = g'(x)$ на (a,b), то $f(x) = g(x) + const$.

2.8.4. Теорема Коши о конечных приращениях

Теорема. Если f, g непрерывны на $[a,b]$, *дифференцируемы на* (a,b), *то существует* $\xi \in (a,b)$ *такая, что*

$$g'(\xi)\big(f(b)-f(a)\big)=f'(\xi)\big(g(b)-g(a)\big).$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a)).$$

Для этой функции будет выполнено

$F(a) = g(a)\big(f(b) - f(a)\big) - f(a)\big(g(b) - g(a)\big) == g(a)f(b) - f(a)g(b)$,

$F(b) = g(b)(f(b) - f(a)) - f(b)(g(b) - g(a)) = -f(a)g(b) + g(a)f(b)$,

таким образом, $F(a) = F(b)$ и к этой функции применима теорема Ролля: существует точка $\xi\in(a,b)$ для которой выполняется равенство

$$0 = F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) =$$

$$= [g'(\xi)(f(b) - f(a)) - f'(\xi)(g(b) - g(a))](b-a).$$

Следствие. Если $g'(x)\neq 0$ на (a,b), *то.*

$$\exists\xi:\quad \frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Доказательство. Если $g'(x) \neq 0$, то $g(b) - g(a) \neq 0$.Иначе, в случае $g(b) = g(a)$,по теореме Ролля нашлась бы точка ξ, где $g'(\xi) = 0$.

§2.9. Правило Лопиталя

Это правило нахождения некоторых пределов функций при помощи производных. Правило Лопиталя задается следующей теоремой.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в каждой точке некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0, и пусть $g'(x)\neq 0$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Эта теорема, называемая правилом Лопиталя, применяется для раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Неопределённости вида $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$ несложным алгебраическим преобразованием приводятся к неопределённостям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Неопределённости вида $1^\infty, \infty^0, 0^0$ приводятся к неопределённости вида $0\cdot\infty$ с помощью предварительного логарифмирования или тождества $\left(f(x)\right)^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$.

Пример 106. Применяя правило Лопиталя, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1+\ln x}{e^x-e}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^x$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(tgx)^{ctgx}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0+0}(ctgx+\ln x)$.

Р е ш е н и е. а) Первый способ. При $x\to 1$ числитель и знаменатель стремятся к 0, поэтому имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1+\ln x}{e^x-e}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3-1+\ln x\right)'}{\left(e^x-e\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1/x}{e^x}=\frac{3+1}{e}=\frac{4}{e}.$$

Второй способ. Неопределённость можно раскрыть и с помощью формулы Тейлора. Обозначим $f(x)=x^3-1+\ln x$, $g(x)=e^x-e$. Эти функции определены и дифференцируемы в окрестности точки $x_0=1$. Имеем $f(x_0)=1^3-1+\ln 1=0$, $f'(x)=3x^2+1/x$, $f'(x_0)=3+1=4$, $g(x_0)=e-e=0$, $g'(x)=e^x$, $g'(x_0)=e$. Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано,

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+o_1(x-1),$$

или $f(x)=4(x-1)+o_1(x-1)$, $\quad g(x)=e(x-1)+o_2(x-1)$.

Поэтому

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{4(x-1)+o_1(x-1)}{e(x-1)+o_2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(4+\frac{o_1(x-1)}{x-1}\right)}{(x-1)\left(e+\frac{o_2(x-1)}{x-1}\right)}==\lim_{x\to 1}\frac{4+\frac{o_1(x-1)}{x-1}}{e+\frac{o_2(x-1)}{x-1}}=\frac{4}{e}.$$

б) Здесь мы имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. В данном случае приходится трижды применять правило Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]==\lim_{x\to+\infty}\frac{(6x)'}{\left(e^x\right)'}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

в) Имеем неопределённость вида 0^0. Обозначим $y=x^x$. Тогда $\ln y=x\ln x$,

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y=\lim_{x\to 0+0}x\ln x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0+0}x=0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln y=0$, откуда, ввиду непрерывности логарифмической функции, $\lim\limits_{x\to 0+0}y=1$,то есть $\lim\limits_{x\to 0+0}x^x=1$.

г) Воспользуемся тождеством $(tgx)^{ctgx}=e^{ctgx\cdot\ln tgx}$, *0 < x < π/2*. Ввиду непрерывности показательной функции, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(tgx)^{ctgx}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(ctgx\cdot\ln tgx)}$.

Найдём $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(ctgx\cdot\ln tgx)$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(ctgx\cdot\ln tgx)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln tgx}{tgx}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{l} \textit{обозначим } tgx=t, \\ t\to+\infty \ \textit{при} \\ x\to\dfrac{\pi}{2}-0 \end{array}\right]=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln t)'}{(t)'}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1/t}{1}=0.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(tgx)^{ctgx}=e^0=1$.

д) Имеем неопределённость вида $\infty-\infty$. Переведём эту неопределённость в неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ и затем воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to0+0}(ctgx+\ln x)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to0+0}\frac{\cos x+\sin x\cdot\ln x}{\sin x}.$$

А так как

$$\lim_{x\to0+0}\sin x\cdot\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'}=\lim_{x\to0+0}\frac{1/x}{\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to0+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=-\lim_{x\to0+0}\frac{(\sin^2 x)'}{(x\cos x)'}=-\lim_{x\to0+0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos x-x\sin x}=-\frac{0}{1}=0,$$

то $\lim\limits_{x\to0+0}(ctgx+\ln x)=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\cos x+\sin x\cdot\ln x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{1+0}{\sin x}=+\infty$.

Глава 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

§3.1. Возрастание и убывание функций

Понятие производной – одно из важнейших в математике. С помощью производной, учитывая ее механический смысл (скорость изменения некоторого процесса) и геометрический смысл (угловой коэффициент касательной), можно решать самые разнообразные задачи, относящиеся к любой области человеческой деятельности. В частности, с помощью производных стало возможным подробное исследование функций, что позволило очень точно строить их графики, находить их наибольшие и наименьшие значения и т. д.

Познакомимся с основными идеями, связанными с исследованием функций. Для этого рассмотрим график какой-нибудь функций $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ (рис. 3.1) .

Интуитивно ясно, что в интервалах $(a,\ x_1)$ и $(x_2,\ b)$ данная функция возрастает, а в интервале $(x_1,\ x_2)$ – убывает.

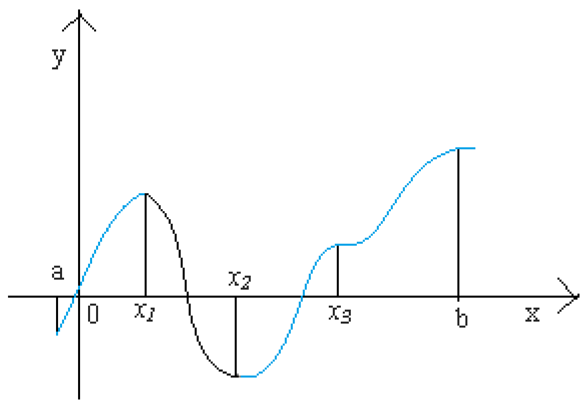


Рис. 3.1

С помощью производной легко устанавливается интервалы возрастание и убывание функции. Напомним, что функция *f(x)* называется возрастающей (убывающей), если при увеличении аргумента значения функции увеличиваются (уменьшаются). На рис. 3.2 и 3.3 изображены графики возрастающей и убывающей функций.

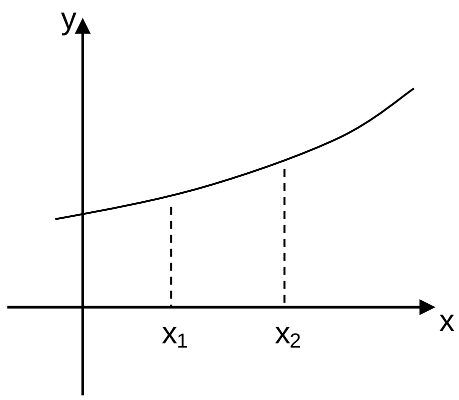


Рис 3.2.

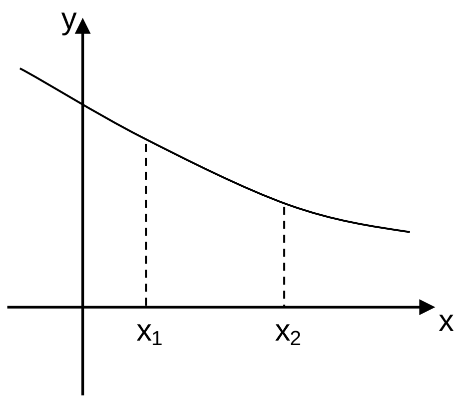


Рис 3.3.

По знаку производной легко судить является ли данная функция возрастающей или убывающей. Для решения этого вопроса следует вспомнить геометрический смысл производной. Вспомним тот факт, что производная $y' =$ *f'(x)* равна наклону касательной к графику функции в точке, абсцисса которой есть точка дифференцирования. Рассмотрим график возрастающей функции. Возьмем на графике произвольную точку *M* и проведем в ней касательную.

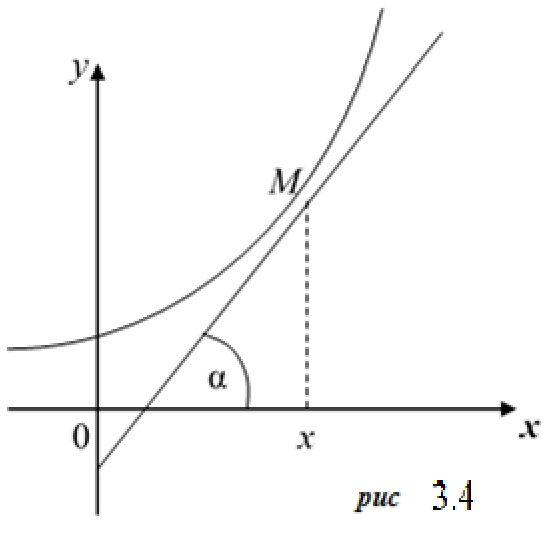


рис 3.4

Непосредственно из рисунка 3.4 видно, что угол α, образованный этой касательной с положительным направлением оси *Ox* , есть угол острый и потому тангенс его положителен:

$$tg\,\alpha > 0$$

Так как *tg α = f'(x),* то для любогохимеет место неравенство

$$f'(x) > 0$$

Таким образом, производная возрастающей функции никогда не отрицательной.

Аналогично, рассматривая график убывающей функции мы видим, что угол α тупой, так что его тангенс отрицателен: $tg\ \alpha < 0$ или, что то же самое

$$\boldsymbol{f'(x)} < 0$$

Итак, производная убывающей функции никогда не положительна. Полученные результаты в кратком виде можно сформулировать следующим образом. Если функция возрастает (убывает), то ее производная положительна (отрицательна).

Пример 108. Найти интервалы монотонности функции $y = 3x - 1$.

Р е ш е н и е: Имеем, $y' = 3$. Очевидно $y' = 3 > 0$ для любого x и поэтому функция возрастает на всей числовой оси.

Пример 108. Найти интервалы монотонности функции $y = -x^2 + 2x$.

Р е ш е н и е: Найдем производную $y' = -2x + 2$. Очевидно $y' > 0$ при $x< 1$ и $y' < 0$ при $x> 1$, т.е. функция возрастает на интервале $(-\infty, 1)$ и убывает на интервале $(1, +\infty)$, где $x_0 = 1$ абсцисса вершины параболы.

Пример 109. Найти интервалы монотонности функции $y = 4x - \frac{x^3}{3}$

Р е ш е н и е: Найдем производную $y' = 4 - x^2$. Пусть $y'=4-x^2>0$. Отсюда $x^2< 4$ или $|x| < 2$. Это равносильно двойному неравенству $-2 <x< 2$. Таким образом функция возрастает на интервале $(-2, 2)$. Теперь полагая $y' = 4 - x^2< 0$ имеем $x^2> 4$ или $|x| > 2$, отсюда $x> 2$ и $x< -2$. Итак, данная функция убывает на интервалах $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$.

§3.2. ПРОМЕЖУТКИ МОНОТОННОСТИ И ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в промежутке X если для любых различных точек $x_1, x_2 \in X$ из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$), т.е. если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

На рисунке 3.5 а функция возрастает в интервалах *(a,b),(c,d),* убывает в *(b,c).* Под *монотонностью* понимается либо возрастание, либо убывание.

Теорема (достаточное условие монотонности). Если *f(x)* дифференцируема в промежутке X и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любого $x \in X$, то *f(x)* возрастает (убывает) в промежутке X.

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции *f(x),* если она определёна в некоторой окрестности этой точки и для каждой точки $x \neq x_0$ этой окрестности $f(x) > f(x_0)$ (соответственно $f(x) < f(x_0)$); при этом $f(x_0)$ называют *минимумом* (соответственно *максимумом*) функции.

На рисунке 3.5 *а)* *c*- точка минимума, *b* -точка максимума.

Рис.3.5

Под экстремумом понимается либо максимума, либо минимум. Точка x_0 из области определения функции $y = f(x)$, называется *критической точкой,* если либо $f(x)$ дифференцируема в x_0 и $f'(x_0)=0$, либо $f(x)$ не дифференцируема в x_0. На рис. 3*б* и 3*в* точка x_0-критическая.

Необходимое условие экстремума. Если x_0- точка экстремума функции $f(x)$, то она является критической точкой этой функции.

На рис 4.5 б критическая точка x_0 является точкойм экстремума, а на рис 4.5 в критическая точка x_0 не является точкой экстремума. Таким образом, не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть $f(x)$ дифференцируема в окрестности критической точки x_0. Если при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет свой знак, то x_0 является точкой экстремума. А именно, если при переходе через точку x_0 $f'(x)$

а) меняет свой знак с минуса на плюс, то x_0 является точкой минимума;

б) меняет свой знак с плюса на минус, то x_0 является точкой максимума функции;

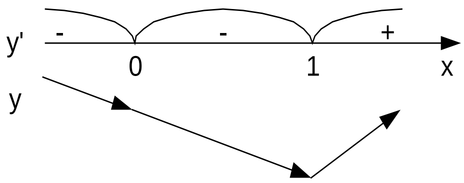
в) не меняет своего знака, то x_0 не является точкой экстремума.

Иногда удобно пользоваться другим достаточным условием экстремума.

Второе достаточное условие экстремума. Пусть x_0 – критическая точка функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в точке x_0. Если $f''(x_0)\neq 0$, то x_0 является точкой экстремума. Точнее говоря, если а) $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума; б) $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума.

Этим достаточным условием экстремума удобно пользоваться, если достаточно сложно установить знак первой производной в окрестности точки экстремума.

Пример 110. Найти точки экстремума функции $f(x)=x^4-\dfrac{4}{3}x^3$.



Р е ш е н и е. Наша функция дифференцируема на всей числовой оси. Найдём критические точки. $f'(x)=4x^3-4x^2=4x^2(x-1)$. Критическими точками являются $x_1=0, x_2=1$. При переходе через точку $x=0$ $f'(x)$ не меняет своего знака, поэтому эта точка не является точкой экстремума. При переходе через точку $x=1$ $f'(x)$ меняет свой знак с «–» на «+», следовательно, $x=1$ – точка минимума (на рисунке получается «впадина»).

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a, b]$ находят значения функции в критических точках, принадлежащих этому отрезку, и на концах отрезка, после чего сравнивают эти значения и выбирают наибольшее и наименьшее.

Пример 111. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2 - x + 3$.

Р е ш е н и е:

1)Находим производную $y' = 2x - 1$

2) Находим корни производной $2x - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$

3) Исследуем стационарную точку $x = \frac{1}{2}$. $y' > 0$, *если*

4) $x > \frac{1}{2}$ и $y' < 0$, если $x < \frac{1}{2}$. Значит, при переходе через значение $x = \frac{1}{2}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, при $x = \frac{1}{2}$ функция имеет минимум, а именно $y_{\min} = \frac{1}{2}^{2} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{11}{4}$

Пример 112. Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 2$

Р е ш е н и е:

1)Находим производную $y' = x^2 - 4x + 3$

2)Находим действительные корни производной: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Корни производной: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

3)Исследуем значение производной в окрестности стационарных точек.

Исследуем первую стационарную точку $x_1 = 1$. Возьмем любую точку слева от точки $x_1 = 1$, например $x = 0$. Значение $y'(0) = 3 > 0$. Возьмем любую точку справа от $x_1 = 1$ но меньшую или втором стационарной точки $x_2 = 3$, например $x = 2$;

В этой точке $y'(2) = -1 < 0$. Таким образом, при переходе (слева направо) через значение $x_1 = 1$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, при $x = 1$ функция имеет максимум и этой максимум равен $y_{\max} = \frac{10}{3}$

Исследуем вторую стационарную точку $x_2 = 3$. В точках лежащих слева от $x_2 = 3$, производная отрицательно, например, в точке $x = 2$: $y'(2) < 0$, а в точках справа от $x = 3$, производная положительно, например в точке $x = 4$: $y'(4) > 0$. Так как производная имеет знак с минуса на плюс при переходе через стационарную точку, то в этой точке минимум. Величина минимума равен : $y_{\min} = 2$

Пример 113. Найти наименьшее и наибольшее значение функции

$y = x^2 – 4x + 6$ на отрезке $[-3, 10]$.

Решение:

1) Находим производную $y' = 2x – 4$

2) Находим стационарную точку пологая $y' = 2x – 4 = 0$. Отсюда $x=2$.

3) Исследуем характер стационарной точки $x = 2$ при $x< 2$, $y' < 0$ при $x> 2$, $y' > 0$

Следовательно, при переходе через точку $x = 2$ производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому в точке $x = 2$ минимум, $y_{\min} = 2$

4) Найдем значения данной функции на концах отрезка $[-3, 10]$.

$$y(-3) = (-3)^2 – 4(-3) + 6 = 27$$

$$y(10) = (10)^2 – 4 \cdot 10 + 6 = 100 – 40 + 6 = 66$$

Итак, мы получим при значения $\{y_{min}, y(-3), y(10)\} = \{2, 27,66\}$

Из них наименьший равен 2, наибольший 66.

Пример 114. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^4-8x^2$ на отрезке *[–1; 3]*.

Р е ш е н и е. Функция дифференцируема на всей числовой оси. Найдём стационарные точки $f'(x)=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2)$. Стационарными точками являются $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=2$; из них лишь $x_2=0$ и $x_3=2$ принадлежат промежутку [–1; 3] . Найдём значения функции в точках $x=0$, $x=2$, а также на концах отрезка: $f(0)=0$, $f(2)=16-32=-16$, $f(-1)=1-8=-7$, $f(3)=81-72=9$. Сравнив полученные значения, находим: $\max\limits_{x\in[-1;\,3]} f(x)=f(3)=9$, $\min\limits_{x\in[-1;\,3]} f(x)=f(2)=-16$.

Задания 211– 220. Найти точки экстремумов функции:

211. $f(x)=4x+\dfrac{9}{x}.$

212. $f(x)=3x^2+\dfrac{48}{x}.$

213. $f(x)=4x+\dfrac{49}{x+3}.$

214. $f(x)=25x+\dfrac{36}{x-1}.$

215. $f(x)=\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}.$

216. $f(x)=\dfrac{10}{x}-\dfrac{7}{x^2}.$

217. $f(x)=4x^2+\dfrac{27}{x}.$

218. $f(x)=32x^3+\dfrac{6}{x}.$

219. $f(x)=x^3+\dfrac{243}{x}.$

220. $f(x)=12x^2+\dfrac{3}{x}.$

Задания 221– 230. Найти промежутки монотонного убывания функции:

221. $y=x^3+1{,}5x^2+2.$

222. $y=x^3-3x^2.$

223. $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1.$

224. $y=2x^3-6x+3.$

225. $y=\dfrac{x^3}{3}-4x.$

226. $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{4}-x.$

227. $y=2x^3+6x^2-18x+7.$ **228.** $y=2x^3-3x^2-12x+1.$

229. $y=3x^3+22{,}5x^2-9.$ **230.** $y=2x^3+7{,}5x^2-9x.$

Задания 231– 240. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке:

231. $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x,\quad x\in[0;3].$ **232.** $f(x)=18x^2+8x^3-3x^4,\quad x\in[0;4].$

233. $f(x)=\frac{x}{8}+\frac{2}{x},\quad x\in[1;6].$ **234.** $f(x)=x^4-2x^2,\quad x\in[0;2].$

235. $f(x)=x^3-3x^2,\quad x\in[-4;1].$ **236.** $f(x)=-\frac{x^5}{5}+x+4,\quad x\in[-2;-0{,}5].$

237. $f(x)=x^3-12x,\quad x\in[-1;3].$ **238.** $f(x)=2x^4-x-1,\quad x\in[0;1].$

239. $f(x)=\frac{x^4}{2}-2x+\frac{3}{2},\quad x\in[-1;2].$ **240.** $f(x)=x^3-3x^2,\quad x\in[1;3].$

§3.3. НАПРАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Пусть функция $y=f(x)$ имеет конечную или бесконечную производную в каждой точке интервала *X=(a,b)*. Обозначим *Г(X)* дугу графика функции $f(x)$, соответствующую интервалу *X*.

Определение. Если дуга *Г(X)* лежит не ниже (не выше) касательной к графику функции $y=f(x)$, проведенной в любой точке $M\in\Gamma(X)$, то функция или график функции называется *выпуклым вниз* (соответственно *выпуклым вверх*) в интервале *X* (рис 3.6 *а*)

Точка графика функции, разделяющая выпуклый и вогнутый участки графика, называется *точкой перегиба* (часто точкой перегиба называют абсциссу этой точки графика функции) (рис 3.6 *б*, 3.6 *в*).

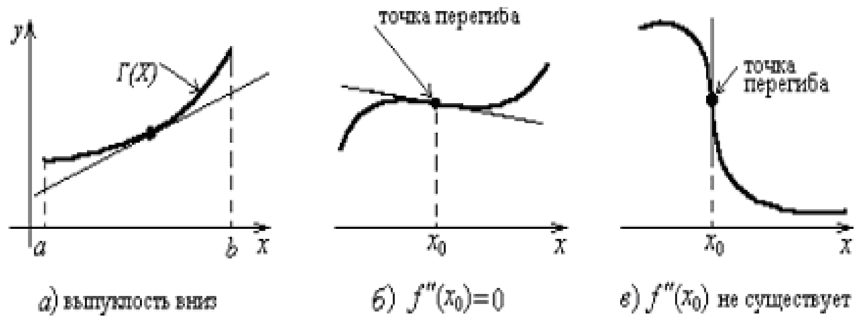


Рис. 3.6

Заметим, что в точке перегиба требуется существование касательной к графику.

В некоторых учебных пособиях выпуклую вверх функцию называют *выпуклой*, а выпуклую вниз функцию - *вогнутой.* Мы будем также пользоваться этими терминами, когда это удобно.

Теорема (достаточное условие выпуклости вверх и вниз)**.** Если для функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в *X,* $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) при всех $x \in X$, то функция $f(x)$ является вогнутой (выпуклой) в интервале X .

Необходимое условие точки перегиба. Если $M_0(x_0, f(x_0))$-точка перегиба функции $f(x)$, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует (рис 5*б,* 5*в*). Следовательно, абсциссы точек перегиба нужно искать в тех значениях *x*, при которых вторая производная либо равна нулю, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в интервале *X*. Точка $x_0 \in X$ является точкой перегиба, если одновременно выполняются два условия: 1) $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует; 2) при переходе через точку x_0 $f''(x)$ меняет свой знак.

Правило нахождения точек перегиба и промежутков выпуклости вверх и вниз

1) Найти область определения функции $f(x)$.
2) Найти $f''(x)$ и решить уравнение $f''(x)=0$ и найти точки x из области определения, в которых $f''(x)$ не существует.
3) Разбить область определения найденными в предыдущем пункте точками на промежутки и в них найти знаки второй производной.
4) Согласно теореме 5 в промежутках, где вторая производная положительна, функция выпукла вниз, а в промежутках, где вторая производная отрицательна, функция выпукла вверх.
5) В соответствии с необходимым условием абсциссы точек перегиба нужно искать среди значений, найденных в пункте 2. Пусть x_0- такое значение. Если производная в точке x_0(конечная или бесконечная) существует и в интервалах непосредственно слева и справа от x_0 вторая производная имеет разные знаки, то x_0- абсцисса точки перегиба.

Пример 115. Исследовать функцию $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ на выпуклость, вогнутость, найти точки перегиба.

Р е ш е н и е. **1)** Функция определена при всех действительных значениях x, таких, что $x^2-4\neq 0$ т.е. $x\neq \pm 2$.

2) Найдем вторую производную.

$$y' = \left(\frac{x}{x^2-4}\right)' = \frac{x^2-4-2x^2}{\left(x^2-4\right)^2} = -\frac{x^2+4}{\left(x^2-4\right)^2};$$

$$y'' = -\frac{2x\left(x^2-4\right)^2 - 2\left(x^2-4\right)2x\left(x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^4} =$$

$$= -\frac{2x\left(x^2-4\right)^2 - 2\left(x^2-4\right)2x\left(x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^4} =$$

$$= -\frac{2x\left(x^2-4-2x^2-8\right)}{\left(x^2-4\right)^3} = \frac{2x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

$y''=0$ при x=0. y'' не существует при $x=\pm 2$, но они не входят в область определения функции, поэтому они не могут быть абсциссами точек перегиба.

3) Разобьем область определения точкой x=0 на интервалы $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$, (0, 2), $(2,+\infty)$ в каждом из которых вторая производная сохраняет знак.

Определим знак второй производной в каждом из этих интервалов. В точке x=-3 из интервала $(-\infty,-2)$ $y''<0$, следовательно, $y''<0$ во всем интервале $(-\infty,-2)$. Аналогично определяем, что $y''>0$ в интервалах (-2,0) и $(2,+\infty)$, $y''<0$ в интервале (0, 2) (рис.3.7 а).

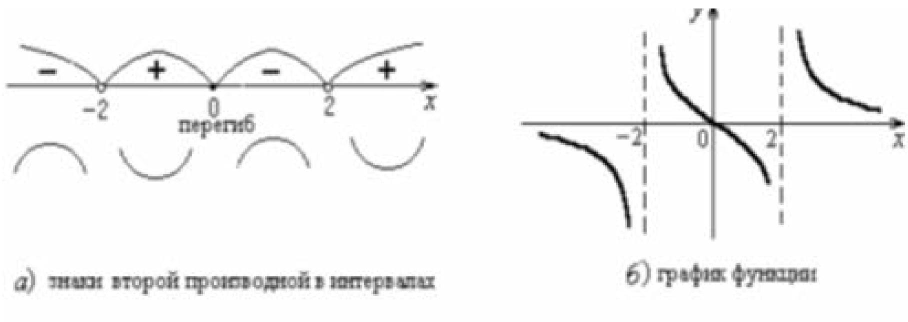


рис.3.7

6) В интервалах (-2,0), (0,2) y'' имеет разные знаки. Значит (0,0) является точкой перегиба функции. На рисунке 3.7 б приведен схематически график функции.

§3.4. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Прямая (L) называется *асимптотой* графика функции (или просто асимптотой функции), если расстояние d(M; (L)) от точки M на графике функции y = f(x) до прямой (L) стремится к 0 при неограниченном удалении точки M от начала координат (рис 6а)

Различают два вида асимптот: *вертикальные и наклонные.*

Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой, если, по крайней мере один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ равен $-\infty$ или $+\infty$.

Наклонная асимптота $y = kx + b$ соответствует случаю $x \to -\infty$ или $x \to +\infty$. Коэффициенты k и b при $x \to +\infty$ находятся из равенств

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) \qquad (3.1)$$

(то же при $x \to -\infty$). Если же не существует одного из пределов или один из этих пределов равен $-\infty$ или $+\infty$, то у функции отсутствует наклонная асимптота при $x \to +\infty$ (то же при $x \to -\infty$).

Замечание 4. Если пределы (4.1) конечны и $k=0$, то график имеет горизонтальную асимптоту $y=b$ при $x \to +\infty$ (или $-\infty$). Поэтому, если существует горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$ (или $-\infty$), то нет наклонной асимптоты при $x \to +\infty$ (или $-\infty$).

На рис. 3.8 *б* и 3.8 *в* прямые x=2, x=0 и x=-1 являются вертикальными асимптотами, прямая y=1-горизонтальной, прямая y=x+2 –наклонной.

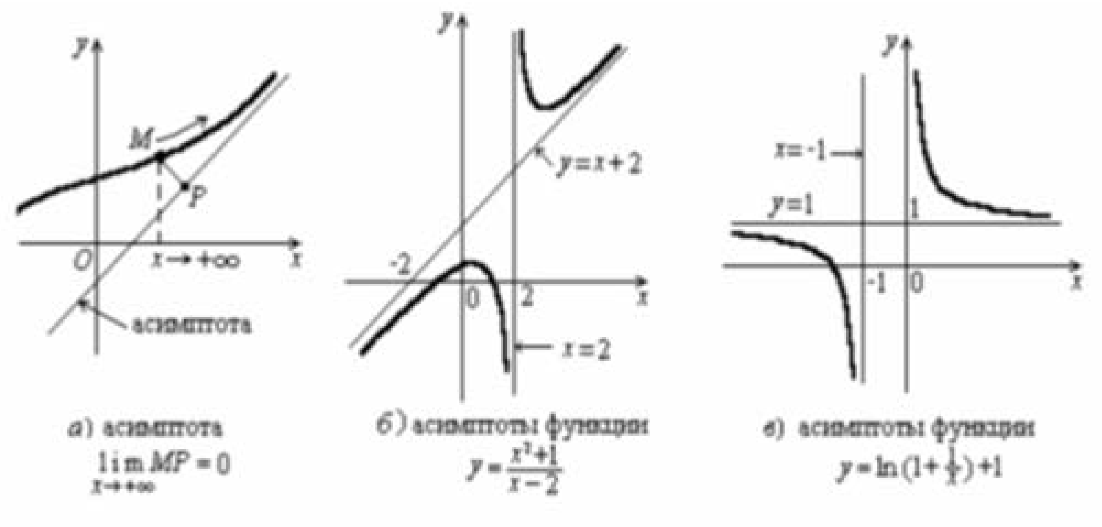


рис.3.8

Пример 116. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.

Р е ш е н и е. Точка x=2 является точкой разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции в этой точке

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2+1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x\to 2+0}\frac{x^2+1}{x-2} = +\infty.$$

Следовательно, прямая x=2 является вертикальной асимптотой при $y \to +\infty$ и $y \to -\infty$.

Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x-2} = \pm\infty$, то горизонтальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты по формулам (17).

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x(x-2)} = 1, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x-2} = 2,$$ следовательно,

прямая $y=x+2$ является наклонной асимптотой при $x \to \pm\infty$ (рис. 4.8 *б*).

Пример 117. Найти асимптоты графика функции $y = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+1$.

Р е ш е н и е. Областью определения функции является множество всех решений неравенства $1+\frac{1}{x}>0$. Решим его: $1+\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow x<-1$ или $x>0$.

Найдем односторонние пределы в границах области определения x=-1 и x=0:

$$\lim_{x\to -1-0}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+1\right)=-\infty,\quad \lim_{x\to 0+0}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+1\right)=+\infty.$$

Следовательно, прямая x=-1 является вертикальной асимптотой при $y\to-\infty$, а прямая x=0 является вертикальной асимптотой при $y\to+\infty$. (рис. 6 *в*).

Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+1\right)=1$, то прямая y=1 является горизонтальной асимптотой при $x\to\pm\infty$ (рис. 6 *в*). Наклонных асимптот нет.

§3.5. Исследование функции и построение ее графика

При построении графика функции сначала проводят исследование функции. При этом придерживаются следующего (примерного) плана:

1) Найти область определения функции;

2)Исследовать на четность, нечетность и периодичность.

3) Найти точки пересечения с осями координат;

4) Найти точки разрыва и установить тип разрыва;

5) С помощью первой производной установить интервалы монотонности (т.е. интервалы возрастания и убывания) функции и найти точки экстремума и значения функции в этих точках;

6) С помощью второй производной установить интервалы выпуклости, вогнутости и найти точки перегиба;

7) Найти асимптоты функции. Затем по этим данным строят график функции.

Пример 118. Построить график функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-4x-32}$.

Р е ш е н и е. 1) Нулями знаменателя являются $x=-4$ и $x = 8$. Следовательно, областью определения функции является множество

$$(-\infty;-4)\cup(-4;8)\cup(8;+\infty).$$

2) Функция не является четной, нечетной, периодической.

3) Найдём точки пересечения с осями координат.

а) С осью $0x$. Найдём нули функции: $\dfrac{x^3}{x^2-4x-32}=0$ лишь при $x = 0$; значит, график функции пересекает ось $0x$ (или касается оси $0x$) в точке $O(0; 0)$ – начале координат.

б) С осью $0y$. Для нахождения общей точки графика функции и оси $0y$ следует найти $f(0)$: $f(0) = 0$. Поэтому график пересекает ось $0y$ в точке $O(0; 0)$.

4) Наша функция представляет собой отношение двух многочленов, поэтому она непрерывна всюду, за исключением нулей знаменателя: $x=-4$ *и* $x = 8$. Найдём левые и правые пределы в этих точках.

Для точки $x=-4$:

$$\lim_{x\to-4-0} f(x)=\lim_{x\to-4-0}\frac{x^3}{(x+4)(x-8)}=-\infty; \quad \lim_{x\to-4+0} f(x)=\lim_{x\to-4+0}\frac{x^3}{(x+4)(x-8)}=+\infty$$

Отсюда делаем вывод, что $x=-4$ является точкой разрыва второго рода.

Для точки $x = 8$:

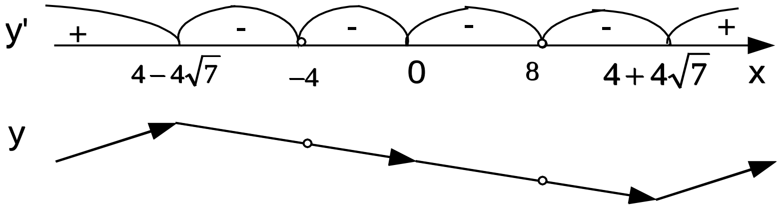
$$\lim_{x\to8-0} f(x)=\lim_{x\to8-0}\frac{x^3}{(x+4)(x-8)}=-\infty; \quad \lim_{x\to8+0} f(x)=\lim_{x\to8+0}\frac{x^3}{(x+4)(x-8)}=+\infty.$$

Поэтому $x = 8$ также является точкой разрыва второго рода.

5) Имеем

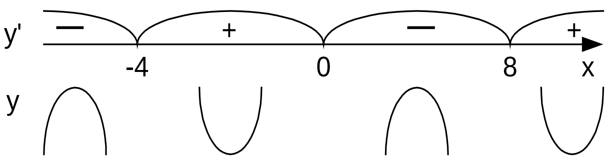
$$y'=\left(\frac{x^3}{x^2-4x-32}\right)'=\frac{x^2\left(x^2-8x-96\right)}{(x+4)^2(x-8)^2}=\frac{x^2\left(x-4+4\sqrt{7}\right)\left(x-4-4\sqrt{7}\right)}{(x+4)^2(x-8)^2}.$$

Критическими точками функции являются точки $x_1 = 4 - 4\sqrt{7}$, $x_2 = 4 + 4\sqrt{7}$, $x_3 = 0$. Знак y' совпадает со знаком выражения $x^2\left(x - 4 + 4\sqrt{7}\right)\left(x - 4 - 4\sqrt{7}\right)$.



Видно, что функция возрастает на промежутках $\left(-\infty; 4 - 4\sqrt{7}\right)$ и $\left(4 + 4\sqrt{7}; +\infty\right)$ и убывает на промежутках $\left(4 - 4\sqrt{7}; -4\right)$, $(-4;\ 8)$, $(8;\ 4+4\sqrt{7})$. Следовательно, точка $x = 4 - 4\sqrt{7}$ является точкой максимума (на рисунке ей соответствует «горка»), точка $x = 4 + 4\sqrt{7}$ – точкой минимума (ей соответствует «впадина»). Стационарная точка x = 0 не является точкой экстремума. Найдём значение функции в точках экстремума: $f(4 - 4\sqrt{7}) \approx$ -7,57; $f(4 + 4\sqrt{7}) \approx$ 25,35.

6) $y'' = \left(y'\right)' = \dfrac{96x\left(x^2 + 8x + 64\right)}{\left(x+4\right)^3\left(x-8\right)^3}$.



Трёхчлен $x^2 + 8x + 64 > 0$ при всех x (его дискриминант меньше 0). Поэтому знак y'' совпадает со знаком дроби $x/\left((x+4)^3(x-8)^3\right)$. Составим схему. Видно, что функция выпукла в интервалах

(–∞; –4) и (0; 8) и вогнута в интервалах (–4; 0) и (8; +∞). При переходе через точки – 4, 8, 0 y'' меняет свой знак. Поэтому точка $x = 0$ является точкой перегиба (в точках $x = -4$, $x = 8$ функция не определена).

7) Так как $f(-4 \pm 0) = \mp\infty$, $f(8 \pm 0) = \pm\infty$, то прямые $x = -4$ и $x = 8$ являются вертикальными асимптотами. Найдём наклонные асимптоты при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$. Уравнения этих асимптот будем искать в виде $y = kx + b$.

а) $x \to -\infty$.

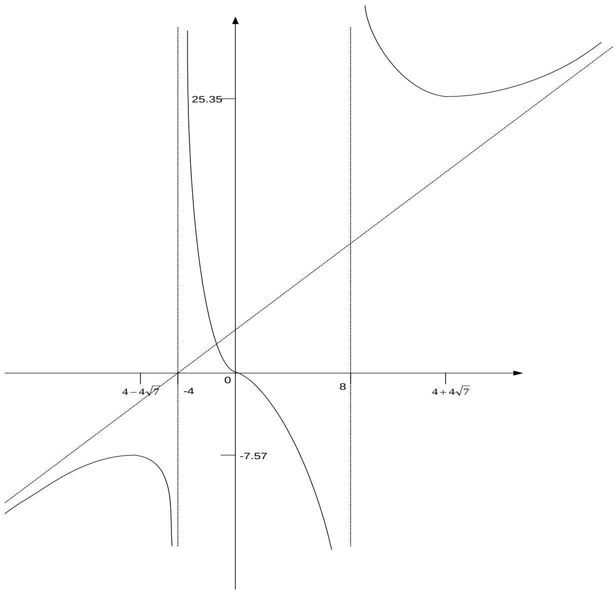
$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x - 32} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - kx \big) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4x - 32} - x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 32x}{x^2 - 4x - 32} = 4.$$

Таким образом, прямая $y = x + 4$ является асимптотой при $x \to -\infty$.

б) При $x \to +\infty$ получим тот же результат: прямая $y = x + 4$ является асимптотой.

Основываясь на полученных данных, построим график функции.



Пример 119. Построить график функции $y = e^{-(x-2)^2}$.

Р е ш е н и е. 1) Областью определения функции является $(-\infty; +\infty)$.

2) Функция не является четной, нечетной, периодической.

3) Найдём точки пересечения с осями координат.

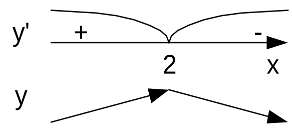
а) С осью $0x$. Функция не имеет нулей, следовательно, она не имеет общих точек с осью $0x$.

б) С осью $0y$. Имеем $f(0) = e^{-4} \approx 0{,}0183$. Точка (0; e^{-4}) является точкой пересечения графика с осью $0y$.

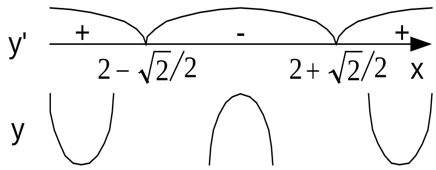
4) Наша функция является суперпозицией непрерывных функций, поэтому она непрерывна на всей числовой оси.

5) Найдем первую производную функции

$$y' = \left(e^{-(x-2)^2}\right)' = -2(x-2)e^{-(x-2)^2}.$$



Функция имеет одну критическую точку $x = 2$. $y = f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 2)$ и убывает на промежутке $(2; +\infty)$, точка $x = 2$ является точкой максимума. Максимум функции равен $f(2) = 1$.



6)Найдем вторую производную $y'' = (y')' = 2(2x^2 - 8x + 7)e^{-(x-2)^2}$. Функция y'' имеет нули

$x_1 = 2-\sqrt{2}/2$, $x_2 = 2+\sqrt{2}/2$. Она выпукла на интервале

$(2-\sqrt{2}/2; 2+\sqrt{2})$ и вогнута на интервалах $(-\infty; 2-\sqrt{2}/2)$, $(2+\sqrt{2}/2; +\infty)$. Точки $x = 2 - \sqrt{2}/2$ и $x = 2 + \sqrt{2}/2$ являются точками перегиба.

7) Так как функция определена и непрерывна на всей числовой оси, то она не имеет вертикальных асимптот. Найдём наклонные асимптоты.

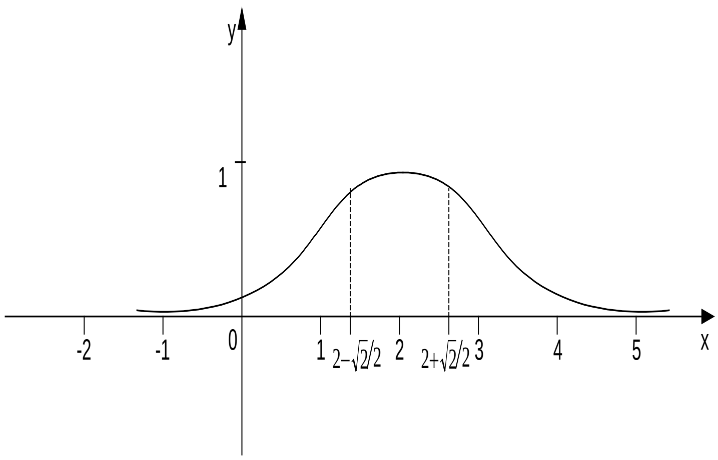
а) $x \to -\infty$. Ищем асимптоту в виде $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-(x-2)^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{(x-2)^2}} = 0.\ b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} e^{-(x-2)^2} = 0.$$

Таким образом, прямая $y = 0$ является асимптотой функции при $x \to -\infty$.

б) При $x \to +\infty$ получим тот же результат: $y = 0$ является асимптотой при $x \to +\infty$.

По полученным данным построим график функции.



Задания 241– 258. Постройте графики функций

241. $y = 8 - 2x - x^2$.

242. $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

243. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$.

244. $f(x) = x^3 - 3x$.

245. $y = 4x^2 - x^4 - 3$.

246. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

247. $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$.

248. $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - x^5$.

249. $y = \frac{4x^3 - x^4}{5}$.

250. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

251. $y = sin^4 x + cos^4 x$.

252. $y = \frac{1}{1+x^2}$.

253. $f(x) = \frac{1}{3} - 4x + 2{,}5x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

254. $y = 3 - 3x + x^3$.

255. $y = \frac{2x^2}{1+x^2}$.

256. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x$.

257. $y = 2x^3 - 6x$.

258. $y = \frac{1}{9}x(x-4)^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л.* Математика: Учеб. пособие для техникумов. – М.: Высш. шк. 1991. – 304 с. Часть 1.
2. *П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я.* Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах – М.: Мир и образование. 2003. – 480 с.
3. http://www.academiaxxi.ru/WWW_Books/HM/Ma/toc.htm
4. https://youclever.org/book/proizvodnaya-1

А.А. Касымалиева

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Учебное пособие

Ответственный за выпуск *В. Г. Рудов*

Верстка *Г. Н. Кирпа*

Подписано в печать 25.08.2020. Формат $84\times108^1/_8$

Печать офсетная. Тираж 100 экз. Заказ 15

Объем 13,75 п.л.

Издание подготовлено и отпечатано

в отделе оперативной полиграфии

Кыргызско-Российский Славянский университет

720000, Кыргызстан, г. Бишкек, ул. Киевская, 44