**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра прикладной математики и информатики

Красниченко Л.С.

ТЕОРИЯ ИГР
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Бишкек 2020

УДК 519.6
ББК 22.18
К36

Рецензенты:
Е.Л. Миркин, д-р техн. наук, проф.,
Ж. А. Мусакулова, канд. техн. наук, доцент
Сейдакмат кызы Эркеаим, к.ф.-м.н.

Красниченко Л.С.
ТЕОРИЯ ИГР. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ: Учебно-методическое пособие. Бишкек. КРСУ, 2020. 96с.

Учебно-методическое пособие содержит основной теоретический материал по теории игр, а также рекомендации по использованию этого материала для решения практических задач, большое количество решенных задач. Для самостоятельного решения предложены типовые задачи по всем разделам.

Круг вопросов и задач настоящего пособия определяется действующей программой подготовки бакалавров по направлению «Прикладная математика и информатика».

Для студентов, аспирантов и преподавателей вузов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория игр - раздел математики, в котором анализируются и решаются задачи исследования операций, в которых приходится сталкиваться с проблемой принятия решения в условиях неопределенности.

Неопределенными могут быть как условия выполнения операции, так и сознательные действия противников или других лиц, от которых зависит успех операции. Кроме того, неопределенность в той или другой степени может относиться также и к целям (задачам) операции, успех которой далеко не всегда может быть исчерпывающим образом охарактеризован одним-единственным числом — показателем эффективности.

Разработаны специальные математические методы, предназначенные для обоснования решений в условиях неопределенности. В некоторых, наиболее простых случаях эти методы дают возможность фактически найти и выбрать оптимальное решение. В более сложных случаях эти методы доставляют вспомогательный материал, позволяющий глубже разобраться в сложной ситуации и оценить каждое из возможных решений с различных (иногда противоречивых) точек зрении, взвесить его преимущества и недостатки и в конечном счете принять решение, если не единственно правильное, то, по крайней мере, до конца продуманное.

Необходимо учитывать, что при выборе решения в условиях неопределенности всегда неизбежен элемент произвола и, значит, «риск». Недостаточность информации всегда опасна, и за нее приходится платить. Однако в условиях сложной ситуации всегда полезно представить варианты решения и их возможные последствия в такой форме, чтобы сделать произвол выбора менее грубым, а риск - минимальным.

В ряде случаев задача о принятии решения в условиях неопределенности ставится в таком виде: какой ценой можно заплатить за недостающую информацию, чтобы экономический эффект всей операции был максимальным?

При решении ряда практических задач исследования операций (и области экономики, военного дела и т. д.) приходится анализировать ситуации, в которых сталкиваются две (или более) враждующие стороны, преследующие различные цели, причем результат любого мероприятия каждой из сторон зависит от того, какой образ действий выберет противник.

Примеры конфликтных ситуаций весьма многообразны. Любая ситуация, складывающаяся в ходе военных действий, принадлежит к конфликтным: каждое решение в этой области должно приниматься с учетом сознательного противодействия разумного противника. Ряд ситуаций в области экономики (особенно при наличии капиталистической конкуренции) также принадлежит к конфликтным; в роли борющихся сторон выступают торговые фирмы, промышленные предприятия, тресты, монополии и т. д. Встречаются конфликтные ситуации также в судопроизводстве, спорте и в других областях человеческой деятельности.

Необходимость анализировать такие ситуации вызвала к жизни специальный математический аппарат — теорию игр. Теория игр есть математическая теория конфликтных ситуаций. Задача этой теории — выработка рекомендаций по рациональному образу действий участников конфликта.

Каждая непосредственно взятая из практики конфликтная ситуация очень сложна, и ее анализ затруднен наличием многих привходящих, несущественных факторов. Чтобы сделать возможным математический анализ ситуации, надо отвлечься от этих второстепенных факторов и построить упрощенную, схематизированную модель ситуации. Такую модель называют игрой.

От реальной конфликтной ситуации игра отличается тем, что ведется по вполне определенным правилам. Человечество издавна пользуется такими формализованными моделями конфликтов — «играми» в буквальном смысле слова (шашки, шахматы, карточные игры и т. д.). Все эти игры носят характер соревнования, происходящего по известным правилам и заканчивающегося «победой» (выигрышем) того или другого игрока.

Такие формализованные игры представляют собой наиболее удобный материал для иллюстрации н усвоения основных понятий теории игр. Это отразилось и на ее терминологии: стороны, участвующие

Настоящий курс «Теория игр и исследование операций» как дисциплина, относящаяся к прикладной математике, изучает задачи о принятии решений в условиях неопределенности являющейся как следствие конфликтной ситуации

В данном учебно-методическом пособии излагаются основные методы, используемые в настоящее время в теоретических и прикладных работах по решению задач, реализованных в «матричных играх»

При написании методического пособия использован опыт преподавания общего курса «Теория игр» для студентов четвертого курса факультета прикладной математики и информатики Кыргызско – Российского Славянского Университета.

В каждой главе излагается основной теоретический материал, сопровождающийся большим количеством примеров с решениями. В конце каждой темы предложены примеры для самостоятельного решения.

При составлении задач автор пользовался многочисленными источниками.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Теория игр была основана Джоном фон Нейманом и Оскаром Моргенштерном в их первой работе «The Theory of Games and Economic Behavior», изданной в 1944 году. В 1928 году в математических анналах фон Нейманом была опубликована статья «О теории общественных игр», в которой впервые было применено понятие «теория игр». Использование этого понятия объясняется схожестью логики принятия решений в таких играх, как шахматы, скат или покер, и в некоторых ситуациях общественной жизни, прежде всего в экономике, военном деле, политической, биологической и др. Характерным для таких ситуаций является то, что результат для принимающего решение зависит не только от его решения, но и от того, какое решение примут другие. Поэтому оптимальный исход не может быть получен в результате принятия решения одним лицом.

1. Теория игр как раздел теории принятия решений

Теория игр как раздел математики возникла сравнительно недавно. Она связана с такими концептуальными понятиями как принятие решений, исследование операций, конфликт, принцип оптимальности и т. д. Принятие решении - это достаточно широкое понятие. С точки зрения математического описания под **принятием решения** понимается выбор из не которого множества U элемента u**.** При этом определяется правило выбора $u \in U$ и целесообразность выбора.

Математическая теория принятия оптимальных (рациональных, целенаправленных) решений называется **теорией исследования операций**.

Таким образом, задачей теории исследования операций является построение количественных методов анализа процессов принятия решений во всех областях человеческой деятельности. Эта деятельность должна быть, во-первых, целенаправленна, т. е. направлена на достижение определенной цели или целей, и, во-вторых, при предварительном анализе целесообразности должны быть использованы количественные методы, т. е. формализованные (математические) модели. *Совокупность целенаправленных действий, т. е. действий, направленных на достижение некоторых целей, называется операцией.* Термины"операция", "исследование операций" впервые были введены при формализованном анализе военных операций. В настоящее время круг задач, входящих в теорию исследования операций, значительно расширен. Однако введенная ранее терминология устоялась и сохранилась.

Субъектами в анализе операции и принятия решения являются:

Оперирующая сторона - лицо (совокупность лиц), принимающее решение **(ЛПР)**, которые стремятся в данной операции к поставленной цели.

Исследователь операций проводит исследование в интересах оперирующей стороны. Он преследует ту же цель, но сам, как правило, не принимает окончательного решения, а дает научно-обоснованные рекомендации, т. е. проводит качественный и количественный анализ и обосновывает целесообразность принятия тех или иных решений.

Рассмотрим простейшую модель исследования операций. Она включает:

1) U – множество значений контролируемых факторов, которые выбираются оперирующей стороной;

2) *A – множество значений неконтролируемых факторов α,* которые выбираются партнерами по операции или определяются внешней средой ("природой").

Примером неконтролируемых факторов, выбираемых целенаправленно партнерами по операции, являются военные действия противника, экономические планы взаимодействующих экономических субъектов и т. п. Если неконтролируемые факторы определяются "природными" условиями, то в этом случае модель исследования операций можно свести к модели взаимодействия с разумным партнером. Действительно, если исследователь операции и оперирующая сторона осторожны, то они считают, что природные факторы "выбираются" природой из условия минимизации целевой функции g.

3) *g(u, α)- функцию* отражающую целенаправленность действий оперирующей стороны (например, стремление к максимизации этой функции водностью описывает интересы оперирующей стороны и, соответственно, исследователя операций).

Конфликтом (конфликтной ситуацией) называется процесс столкновения интересов нескольких участвующих сторон.

Он может быть задан следующими компонентами:

1) перечнем субъектов, участвующих в конфликте;
2) определением множеств их выборов;
3) интересами (мотивами), определяющими выбор.

При моделировании конфликта очень важно описать информационную обстановку, т. е. всю информацию, которая уже имеется у субъектов конфликта и может поступать со временем. Также необходимо учитывать возможность обмена информацией, добывания ее и добровольной передачи информации одним субъектом другому.

Математическая модель конфликтной ситуации называется игрой. Таким образом, теория игр - это математическая теория принятия решений в условиях конфликта.

Основной задачей игр является не описание, а разрешение конфликтов, т.е. построение компромиссных взаимовыгодных решений, которые полностью или хотя бы частично согласовывают интересы всех взаимодействующих сторон.

Если удается формализовать (смоделировать) конфликт и определить **принцип оптимальности,** т.е. принцип выбора оптимального решения в игре, то получается математическая задача, которую можно решать математическими методами, без учета ее содержательной постановки.

В теории игр используется разнообразный и хорошо разработанный математический аппарат (теория множеств, теория вероятностей, топология, теория функций, теория дифференциальных уравнений, методы оптимизации, вариационное исчисление, динамическое программирование, оптимальное управление и др.). Однако следует подчеркнуть, что математические модели теории игр (теоретико-игровые модели) описывают процесс принятия решений, которые трудно формализовать. Поэтому в рамках теории игр развивается специфический математический аппарат, направленный на моделирование процессов принятия решений в сложных социально-экономических, политических и прочих конфликтах. При этом возникают новые ранее не изученные математические задачи.

2. Основные понятия и классификация игр

Теория игр занимается исследованием математических моделей принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях. Формальное описание принятия решений удобно разбить на две части:

1) математическая модель конфликтной ситуации или игра — описание конфликтной ситуации, включающее в себя описание субъектов, принимающих решения, их возможностей и интересов;

2) принцип оптимальности - описание правил рационального поведения игроков.

Математическая модель конфликта и принцип оптимальности дают полное описание принятия решений в условиях конфликта.

В описании игры можно выделить следующие элементы:

1) коалиции действий - совокупность действующих совместно в данной конфликтной ситуации субъектов;

2) коалиции интересов - множество одинаково заинтересованных в исходе конфликта сторон;

3) множества возможных выборов каждой из коалиций действия;

4) описание предпочтений каждой из коалиций интересов;

5) множество возможных исходов конфликта.

Понятие ***«Коалиция»*** указывает на тот факт, что участниками конфликта могут быть не только отдельные лица, но и большие, сложно организованные группы лиц. Коалиции действия и интересов могут не совпадать. (Например, пассажиры самолета бывают заинтересованы в его скорейшем прибытии к месту назначения и, таким образом, образуют коалицию интересов, однако они не могут предпринять никаких действий, направленных на достижение этой цели, т. е. не являются коалицией действия.)

Если коалиция действия совпадает с коалицией интересов, то такую монолитную коалицию можно считать одним лицом, поэтому ее называют игроком. Если все коалиции действия совпадают с соответствующими коалициями интересов, то игру называют **бескоалиционной**, а ее участников - **игроками**.

Множество возможных исходов конфликта определяет совместные ограничения на действия участников конфликта. Если такие ограничения задаются формально (в виде прямого произведения множеств), то соответствующую называют **игрой без запрещенных ситуаций,** если эти ограничения существенны, то — **игрой с запрещенными ситуациями.**

Для принятия решений необходимо обладать определенной информацией. При этом как сам выбор из множества стратегий, так и ожидаемый результат зависят в значительной степени от информации, которой обладает игрок к моменту принятия решения: о множествах выбора, мотивах поведения или принципе оптимальности игроков, о природных неопределенных факторах, той информации, которую сейчас игрок не имеет, но которая будет поступать к нему, в том числе та, которой он будет обладать в результате добровольного обмена или ее добывания. Поэтому целесообразно дать общее определение **стратегии.**

Если множество B_i описывает информацию, которую коалиция действия (игрок) i использует при принятии решений, то под стратегией будем понимать отображение

u_i: $B_i \rightarrow U_i$, где U_i - множество выборов или управлений коалиции действия i.

В результате выбора каждой *коалиции действия* (i) элемента u_i множества управлений определяется **исход конфликта.** Соответственно выбор коалициями действия стратегии определяет ситуацию в множестве стратегий $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$.

Таким образом, можно трактовать:

- ! множество ***управлений U*** как «физические» возможности;
- ! множество ***стратегий U*** как «физические и информационные» возможности.

Заинтересованность j-го субъекта (коалиция интересов) формализуется функцией выигрыша, которая определяется отображением $g_j : U \rightarrow S$, где S– множество исходов. Выбор стратегии или управления определяется принципом оптимальности.

Таким образом, для описания конфликтной ситуации необходимо задать систему:

$$\Gamma = \{N, K_g, K_u, \{U_i\}_{i \in Ku}, \{g_j\}_{j \in Kg}, S\},$$ где

N – множество игроков,

Kg – множество коалиций интересов,

Ku – множество коалиций действия,

Ui – множество выборов коалиции действия $i \in K_u$,

g_j – функция выигрыша коалиции интересов $j \in K_g$,

S – множество возможных исходов игры.

Игры, как и все задачи исследования операций бывают статическими и динамическими.

Фиксация параметров, а также различная их суперпозиция позволяют классифицировать игры. Рассмотрим основные классы теоретико-игровых моделей.

1. *Множество игроков*. Различают игры 2-х лиц и игры n лиц (n>2). Игры 2-х лиц называются **антагонистическими,** если игроки преследуют противоположные цели. Если в антагонистической игре игрок 1 стремится максимизировать свой выигрыш g1, то целью игрока 2 является минимизация выигрыша игрока 1, так что g1 = -*g*2.

Поэтому антагонистическую игру можно задать следующим образом:

$\Gamma=(U_1, U_2, g)$, где *g* - выигрыш игрока 1.

Антагонистические игры получаются не только при описании конфликтов типа военных, но и при описании игры с природой, когда исследователь операции или оперирующая сторона проявляет осторожность при принятии решений в условиях неопределенности. Можно говорить так же о неантагонистических играх 2-х лиц ($g1 \neq -g2$).

Отдельный класс составляют игры с бесконечным числом игроков.

2. *Допустимость образования коалиций*.

Если в игре образование коалиций недопустимо, то такая игра называется **бескоалиционной.** Она определяется заданием множества игроков, пространств их стратегий и набором их функций выигрыша.

К бескоалиционным играм могут быть сведены также игры, в которых $Kg=Ku$. В истинно же коалиционных играх разрешены такие коалиции, что $Kg \neq Ku$. Среди подобных игр наиболее распространены **кооперативные игры,** в которых образуется одна коалиция. Целью этой коалиции является максимизация суммарного выигрыша, с тем чтобы впоследствии разделить его между членами коалиции по соглашению.

3. *Множество стратегий*.

Если множество стратегий всех игроков конечно, то игра называется **конечной.** Когда хотя бы одно из множеств

Ui , $i=1…n$, бесконечно, игра называется **бесконечной.** Для теоретического анализа более удобны конечные игры, однако они имеют меньшую практическую ценность, чем бесконечные.

4. *Форма задания.*

При этом различают **позиционные игры** и **игры в нормальной форме**.

Если процесс принятия решений описывается в виде динамического процесса, где игроки выбирают свои стратегии последовательно по шагам, обладая при этом определенной информацией при каждой шаге выбора стратегии, то такие игры называются **позиционными.** Классическим примером такой игры являются шахматы. Если в динамических играх конфликт моделируется дифференциальными уравнениями, то такие игры называют

дифференциальными. Если же в игре стратегия представлена как одноактный выбор, то такая игра считается заданной в **нормальной форме.**

5. *Задание функции выигрыша.*

Интерес представляют игры с **непрерывными функциями выигрышей:** классы выпуклых, вогнутых, выпукло-вогнутых игр.

Кроме упомянутых классов существует множество их модификаций. При проведении предварительного анализа конфликта использование исходных множеств управлений *Ui* может привести к нежелательному для оперирующей стороны результату: либо решения не существует, либо (если это решение существует) количественная оценка этого решения неудовлетворительна. Тогда целесообразно расширить класс используемых управлений. Расширения класса стратегий можно добиться путем расширения либо области определения функции (информированности игроков), либо за счет расширения множества значений, т. е. физических возможностей. Достаточно традиционным способом расширения множества значений является использование выпуклой оболочки множества управлений путем перехода в пространство вероятностных мер. Исходные элементы множества *Ui* называются **чистыми стратегиями,** а их произвольная выпуклая комбинация (мера) **- смешанной стратегией.**

Существует два способа реализации смешанных стратегий:

1) введение искусственной рандомизации, т. е. использование функции распределения на исходном множестве управлений;

2) введение повторения, т.е. проведения конфликта многократно. При этом с определенной частотой выбирают некоторые элементы исходного множества.

В обоих способах соответствующим образом определяются функции выигрыша. При расширении класса стратегий прежде всего преследуется задача не построения более сложной модели конфликтной ситуации, адекватно отражающей реальность, а осмысленного и целенаправленного изменения реальности и построения соответственно этой усложненной реальности более сложной модели конфликтной ситуации. При этом следует учитывать и затраты на расширение множества стратегий: проведение повторных операций, увеличение информированности и т. д. Далее эти затраты должны быть соотнесены с тем выигрышем, который можно получить дополнительно за счет расширения класса стратегий.

Наиболее интересная постановка проблемы расширения класса стратегий связана с *увеличением информированности игроков*. Действительно, чем больше неопределенность, тем больше разброс в ожидаемом результате при реализации выбранной стратегии. Таким образом, оказывается очень выгодно делать ситуацию более определенной. Для этого необходимо четко фиксировать ожидаемую информацию, уметь ее структурировать с целью возможности ее математической записи, оценивать результаты реализации стратегий, построенных в заданной информации, и, наконец, видеть пути увеличения объема информации и оценивать, с одной стороны, ее результат и, с другой стороны, затраты на получение дополнительной информации.

МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

1. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой может рассматриваться как следующая абстрактная игра двух игроков.

Первый игрок имеет m стратегий $i = 1,2,\ldots,m$, второй имеет n стратегий $j = 1,2,\ldots,n$. Каждой паре стратегий (i,j) поставлено в соответствие число a_{ij}, выражающее выигрыш игрока 1 за счёт игрока 2, если первый игрок примет свою i-ю стратегию, а 2-ой свою j-ю стратегию.

Каждый из игроков делает один ход: игрок 1 выбирает свою i-ю стратегию ($i=\overline{1,m}$), 2-ой свою j-ю стратегию ($j=\overline{1,n}$), после чего игрок 1 получает выигрыш a_{ij} за счёт игрока 2 (если $a_{ij} \geq 0$, то это значит, что игрок 1 платит второму сумму a_{ij}). На этом игра заканчивается.

Каждая стратегия игрока $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$ часто называется чистой стратегией.

Если рассмотреть матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

то проведение каждой партии матричной игры с матрицей A сводится к выбору игроком 1 i-й строки, а игроком 2 j-го столбца и получения игроком 1 (за счёт игрока 2) выигрыша a_{ij}.

Главным в исследовании игр является понятие оптимальных стратегий игроков. В это понятие интуитивно вкладывается такой смысл: стратегия игрока является оптимальной, если применение этой стратегии обеспечивает ему наибольший гарантированный выигрыш при всевозможных стратегиях другого игрока. Исходя из этих позиций, игрок 1 исследует матрицу выигрышей A следующим образом: для каждого значения i $(i=\overline{1,m})$ определяется минимальное значение выигрыша в зависимости от применяемых стратегий игрока 2:

$$\min_j a_{ij} \quad \left(i=\overline{1,m}\right)$$

т.е. определяется минимальный выигрыш для игрока 1 при условии, что он примет свою i-ю чистую стратегию, затем из этих минимальных выигрышей отыскивается такая стратегия $i = i_o$, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т.е. находится

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \underline{a} \qquad (1).$$

Число $\underline{\alpha}$, определённое по формуле (1) называется *нижней чистой ценой игры* и показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе игрок 1, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях игрока 2.

Игрок 2 при оптимальном своём поведении должен стремится по возможности за счёт своих стратегий максимально уменьшить выигрыш игрока 1. Поэтому для игрока 2 определяется

$$\max_i a_{ij}, \quad i = \overline{1, \mathrm{m}}$$

выигрыш игрока 1, при условии, что игрок 2 применит свою j-ю чистую стратегию, затем игрок 2 отыскивает такую свою j стратегию, при которой игрок 1 получит минимальный выигрыш, т.е. находит

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \overline{a} \qquad (2).$$

Число $\overline{a}$, определяемое по формуле (2), называется *чистой верхней ценой игры* и показывает, какой максимальный выигрыш за счёт своих стратегий может себе гарантировать игрок 1.

Другими словами, применяя свои чистые стратегии игрок 1 может обеспечить себе выигрыш не меньше $\underline{a}$, а игрок 2 за счёт применения своих чистых стратегий может не допустить выигрыш игрока 1 больше, чем $\overline{a}$.

Если в игре с матрицей A $\overline{a} = \underline{a}$, то говорят, что эта игра имеет *седловую точку* в чистых стратегиях и *чистую цену* игры $v = \overline{a} = \underline{a}$.

Седловая точка это пара чистых стратегий *(i_o,j_o)* соответственно игроков 1 и 2, при которых достигается равенство $\overline{a} = \underline{a}$. В это понятие вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии, соответствующей седловой точке, то другой игрок не сможет поступить лучше, чем придерживаться стратегии, соответствующей седловой точке. Математически это можно записать и иначе:

$$a_{ij_o} \le a_{i_o j_o} \le a_{i_o j} \qquad (3)$$

где *i и j* чистые стратегии соответственно игроков 1 и 2; (i_o,j_o) - стратегии, образующие седловую точку.

Таким образом, исходя из (3), седловой элемент $a_{i_o j_o}$ является минимальным в i_o-й строке и максимальным в j_o-м столбце в матрице А. Отыскание седловой точки матрицы А происходит следующим образом: в матрице А последовательно в каждой *строке* находят минимальный элемент и проверяют, является ли этот элемент максимальным в своём *столбце.* Если да, то он и есть седловый элемент, а пара стратегий, ему соответствующая, образует седловую точку. Пара чистых стратегий $\left(a_{i_o j_o}\right)$ игроков 1 и 2, образующая седловую точку и седловый элемент $a_{i_o j_o}$, называется *решением игры*. При этом i_o и j_o называются *оптимальными чистыми стратегиями* соответственно игроков 1 и 2.

Пример 1. Два игрока А и В кладут на стол по кружку красного (r), зеленного (g) и синего (b) цветов, сравнивают цвета кружков и расплачиваются друг с другом согласно платежной матрицы:

$$\begin{array}{c c} \begin{matrix} r \\ g \\ b \end{matrix} & \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} r & \;\; g & \;\; b \end{matrix} \end{array}$$

Строки матрицы соответствуют стратегиям игрока $A=(A_1, A_2, A_3)$, столбцы - игрока $B=(B_1, B_2, B_3)$.

Матрицу дополняют столбцом, составленным из минимумов строк, из элементов дополнительного столбца определяют максимум, т.е. $\max_i \min_j a_{ij} = \underline{a}$ и дополняют строкой, составленным из максимумов столбцов, из элементов дополнительной строки определяют минимум, т.е. $\min_j \max_i a_{ij} = \overline{a}$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} \min\limits_j a_{ij} \end{array} \\
A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & \boxed{1} \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} & \left.\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ -3 \end{array}\right\} \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 1 \\
\max\limits_i a_{ij} \quad \underbrace{3 \quad 2 \quad 1}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 1} &
\end{array}$$

Седловой точкой является пара $(i_o = 2; j_o = 3)$, при которой $v = \overline{a} = \underline{a} = 1$.

2. Смешанное расширение матричной игры

Исследование в матричных играх начинается с нахождения её седловой точки в чистых стратегиях. Если матричная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях, то нахождением этой седловой точки заканчивается исследование игры. Если же в игре нет седловой точки в чистых стратегиях, то можно найти нижнюю и верхнюю чистые цены этой игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. Улучшение решений матричных игр следует искать в использовании секретности применения чистых стратегий и возможности многократного повторения игр в виде партии. Этот результат достигается путём применения чистых стратегий случайно, с определённой вероятностью.

Смешанной стратегией игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Таким образом, если игрок 1 имеет m чистых стратегий $1,2,...,m$, то его смешанная стратегия p это набор чисел $p = (p_1, ..., p_m)$ удовлетворяющих соотношениям

$$p_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}), \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Аналогично для игрока 2, который имеет n чистых стратегий, смешанная стратегия - это набор чисел

$$q_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Так как каждый раз применение игроком одной чистой стратегии исключает применение другой, то чистые стратегии являются несовместными событиями. Кроме того, они являются единственными возможными событиями.

Чистая стратегия есть частный случай смешанной стратегии. Для соблюдения секретности каждый игрок применяет свои стратегии независимо от выбора другого игрока.

Средний выигрыш игрока 1 в матричной игре с матрицей A выражается в виде математического ожидания его выигрышей

$$E(A, p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j = pAq^T$$

Первый игрок имеет целью за счёт изменения своих смешанных стратегий p максимально увеличить свой средний выигрыш $E\,(A,\, p,\, q)$, а второй - за счёт своих смешанных стратегий стремится сделать $E\,(A,\, p,\, q)$ минимальным, т.е. для решения игры необходимо найти такие p и q, при которых достигается верхняя цена игры

$$\overline{\alpha} = \min_{q} \max_{p} E(A, p, q).$$

Аналогичной должна быть ситуация и для игрока 2, т.е. нижняя цена игры должна быть

$$\underline{\alpha} = \max_p \min_q E(A, p, q).$$

Подобно играм, имеющим седловые точки в чистых стратегиях, вводится следующее определение: *оптимальными смешанными стратегиями* игроков 1 и 2 называются такие наборы p^o, q^o соответственно, которые удовлетворяют равенству

$$\min_q \max_p E(A, p, q) = \max_p \min_q E(A, p, q) = E(A, p^0, q^0).$$

Величина E $(A,\ p^o\ , q^o)$ называется при этом *ценой игры* и обозначается через υ.

Имеется и другое определение оптимальных смешанных стратегий: p^o, q^o называются оптимальными смешанными стратегиями соответственно игроков 1 и 2, если они образуют седловую точку:

$E\ (A,\ p,\ q^o) \le E\ (A,\ p^o,\ q^o) \le E\ (A,\ p^o,\ q)$

Оптимальные смешанные стратегии и цена игры называются *решением матричной игры*.

Основная теорема матричных игр имеет вид:

***<u>Теорема</u>* (о минимаксе).** Для матричной игры с любой матрицей A величины

$$\underline{\alpha} = \max_p \min_q E(A, p, q) \text{ и } \overline{\alpha} = \min_q \max_p E(A, p, q)$$

существуют и равны между собой.

3. Свойства решений матричных игр

Обозначим через $G(P,Q,A)$ игру двух лиц с нулевой суммой, в которой игрок 1 выбирает стратегию $p \in P$, игрок 2 у $q \in Q$, после чего игрок 1 получает выигрыш $A=A(p,q)$ за счёт игрока 2.

Стратегия p^1 игрока 1 *доминирует* (*строго доминирует*) над стратегией p^2, если

$$A(p^1,q) \geq A(p^2,q) \quad (A(p^1,q) > A(p^2,q)),\ q \in Q.$$

Стратегия q^1 игрока 2 *доминирует* (*строго доминирует*) над стратегией q^2, если

$$A(p,q^1) \leq A(p,q^2) \quad (A(p,q^1) < A(p,q^2)),\ p \in P.$$

При этом стратегии p^2 и q^2 называются *доминируемыми* (*строго доминируемыми*).

Спектром смешанной стратегии игрока в конечной антагонистической игре называется множество всех его чистых стратегий, вероятность которых согласно этой стратегии положительна.

Игра $G' = (P',Q',A')$ называется *подыгрой игры* G (P,Q,A), если $P' \subset P$, $Q' \subset Q$, а матрица A' является подматрицей матрицы A. Матрица A' при этом строится следующим образом. В матрице A остаются строки и столбцы, соответствующие стратегиям P' и Q', а остальные «вычеркиваются». Всё то что «останется» после этого в матрице A и будет матрицей A'.

Замечание. Отметим, что исключение доминируемых (не строго) стратегий может привести к потере некоторых решений. Если же исключаются только строго доминируемые стратегии, то множество решений игры не изменится.

Свойство 1. Если чистая стратегия одного из игроков содержится в спектре некоторой его оптимальной стратегии, то выигрыш этого игрока в ситуации, образованной данной чистой стратегией и любой оптимальной стратегией другого игрока, равен значению конечной антагонистической игры.

Свойство 2. Ни одна строго доминируемая чистая стратегия игрока не содержится в спектре его оптимальной стратегии.

Свойство 3. Пусть $G= (P,Q,A)$ - конечная антагонистическая игра, $G' = (P \setminus p',Q,A)$ - подыгра игры G, а p' - чистая стратегия игрока 1 в игре G, доминируемая некоторой стратегией $\bar{p}$, спектр которой не содержит p'. Тогда всякое решение (p^o, Q^o, v) игры G' является решением игры G.

Свойство 4. Пусть $G = (P,Q,A)$ - конечная антагонистическая игра, $G' = (P,Q\setminus q',A)$ - подыгра игры G, а q' - чистая стратегия игрока 2 в игре G, доминируемая некоторой стратегией $\bar{q}$, спектр которой не содержит q'.Тогда всякое решение игры G' является решением G.

Свойство 5. Если для чистой стратегии p' игрока 1 выполнены условия свойства 3, а для чистой стратегии p' игрока 2 выполнены условия свойства 4, то всякое решение игры $G' = (P\setminus p',Q\setminus q',A)$ является решением игры $G = (P,Q,A)$.

Свойство 6. Тройка (p^o, q^o, v) является решением игры $G = (P,Q,A)$ тогда и только тогда, когда $(p^o, q^o, \kappa v + a)$ является решением игры $G=(P,Q,\kappa A+a)$, где a - любое вещественное число, $\kappa > 0$.

***Свойство** 7*. Для того, чтобы $p^0 = \left(p_1^0, p_2^0, \ldots, p_i^0, \ldots p_m^0\right)$ была *оптимальной смешанной стратегией* матричной игры с матрицей A и ценой игры v, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, p_i^0 \geq v, \quad (j = \overline{1,n}) \tag{4}$$

Аналогично для игрока 2 : чтобы $q^0 = \left(q_1^0, q_2^0, \ldots, q_j^0, \ldots, q_n^0\right)$ была оптимальной смешанной стратегией игрока 2 необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j^0 \le v \quad i=\overline{1,m} \tag{5}$$

Из последнего свойства вытекает: чтобы установить, является ли предполагаемые (p, q) и v решением матричной игры, достаточно проверить, удовлетворяют ли они неравенствам (4) и (5). С другой стороны, найдя неотрицательные решения неравенств (4) и (5) совместно со следующими уравнениями

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \tag{6}$$

получим решение матричной игры.

Таким образом, решение матричной игры сводится к нахождению неотрицательных параметров решений линейных неравенств (4) (5) и линейных уравнений (6). Однако это требует большого объёма вычислений, которое растёт с увеличением числа чистых стратегий игроков. Поэтому в первую очередь следует, по возможности используя свойства 2 и 3, уменьшить число чистых стратегий игроков. Затем следует во всех случаях проверить выполнение неравенства

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}\,.$$

Если оно выполняется, то игроки имеют чистые оптимальные стратегии (игрок 1 - чистую максиминая, а игрок 2 - чистую минимаксная). В противном случае хотя бы у одного игрока оптимальные стратегии будут смешанные. Для матричных игр небольшого размера эти решения можно найти, применяя свойства 1 - 5.

Пример 2. Пусть G = (P,Q,A), где P = (1, 2, 3, 4); Q = (1, 2, 3, 4), а функция выигрыша A задана следующим образом :

$$
A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Решение.

Задача не имеет решения в чистых стратегиях (убедитесь самостоятельно). Для уменьшения размерности платежной матрицы необходимо проверить наличие доминируемых стратегий:

Для первого игрока:

$$
A^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Третья стратегия доминирует четвертую (четвертую можно вычеркнуть).

Для второго игрока:

$$
A^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Третья стратегия доминирует первую стратегию;

$$
A^3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3/2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Четвертая стратегия доминирует третью

Для первого игрока:

$$A^4 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3/2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$ Третья стратегия доминирует вторую

Результат:

$$A^5 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Матрица A^5 не имеет седловой точки, т.к. не выполнено равенство

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij},$$

а игра A^5 не имеет решения в чистых стратегиях, т.е. оптимальные стратегии игроков являются смешанными. Эти стратегии (в данном случае) легко найти из анализа структуры матрицы A^5. Поскольку матрица A^5 симметрична, можно предположить, что игроки в оптимальной стратегии используют свои чистые стратегии с равными вероятностями.

Действительно, если игрок 1 выбирает с равными вероятностями стратегии 1 и 3, то при применении любой из двух чистых стратегий игроком 2 математическое ожидание выигрыша игрока 1 будет равным либо

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 = \frac{3}{2},$$

либо

$$\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Аналогично, если игрок 2 использует свои чистые стратегии 2 и 3 с равными вероятностями, то математическое ожидание его проигрыша будет равно $\frac{3}{2}$. Следовательно, указанные стратегии являются оптимальными в игре A^5, а величины $\frac{3}{2}$ - значением игры A^5. Из предыдущего следует, что эти стратегии оптимальны и в A.

Таким образом, стратегия $X = (\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0)$ является оптимальной стратегией игрока 1, стратегия $Y = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ - оптимальной стратегией игрока 2 в игре А, а значение игры v равно $\frac{3}{2}$.

4. Методы решения матричных игр

Графический метод

Если размер платежной матрицы $2 \times n$ или $m \times 2$ то для построения решения существует эффективный метод, основанный на простых геометрических соображениях, называемый графическим.

Игры $2 \times n$

Пусть платежная матрица $2 \times n$ игры имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Согласно свойства 7, нахождение цены игры v и оптимальных стратегий первого игрока p^o равносильно решению уравнения:

$$v = \min_{1 \le j \le n}\left(a_{1j}p^o + a_{2j}\left(1 - p^o\right)\right) = \max_{0 \le i \le p}\min_{1 \le j \le n}\left(a_{1j}p + a_{2j}\left(1 - p\right)\right).$$

Рассмотрим схему, приводящую к результату.

Максимум функции $\min\limits_{1 \le j \le n} \left(a_{1j} p + a_{2j} (1 - p) \right)$

можно найти, построив ее график. Предположим, что первый игрок выбрал смешанную стратегию $P = \{p, 1 - p\}$, а второй игрок *j-ю* чистую стратегию *j=1, 2, ...,n.* Тогда средний выигрыш первого игрока в ситуации *{P, j}* равен:

$w_j = a_{1j} p + a_{2j} (1 - p)$.

На плоскости *(p, w)* уравнение *w* описывает прямую. Тем самым, каждой чистой стратегии второго игрока на этой плоскости соответствует своя прямая. Поэтому на плоскости *(p, w)* последовательно рисуются все прямые (рис.1):

$$w_j = a_{1j} p + a_{2j} (1 - p), \quad j = 1, ..., n. \tag{7}$$

Затем для каждого значения *p*, $0 \le p \le 1$, путем визуального сравнения соответствующих ему значений *w* на каждой из построенных прямых (7) определяется и отмечается минимальное из них (рис. 2). В результате описанной процедуры получается ломаная, которая и является графиком функции (1) (выделена жирным на рис. 3).

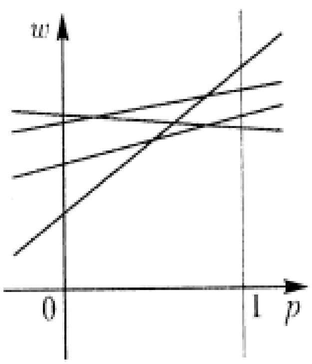

Рис. 1

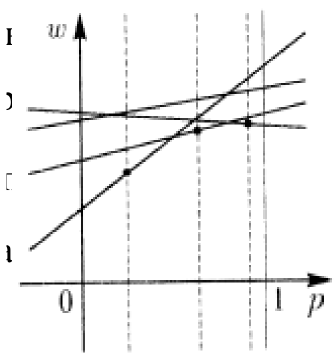

Рис. 2

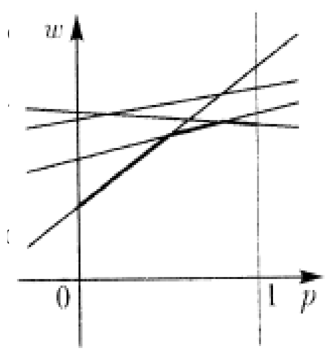

Рис. 3

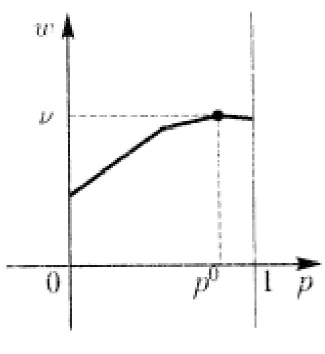

Рис. 4

Графический метод может рассматриваться как аналог максиминного подхода при отсутствии седловой точки.

Пример 3. Рассмотрим игру, заданную платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение.

1-й шаг. *Анализ игры на наличие седловой точки.* Нижняя цена игры равна -1, верхняя цена игры равна 1. Седловой точки нет. Решение игры нужно искать в смешанных стратегиях.

$$\begin{array}{cccccccc} \left(\begin{matrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \boxed{-1} \\ -2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 & 4 & 3 & \boxed{1} & 5 & 4 \end{matrix} & \end{array}$$

Далее задача решается относительно первого игрока.

2-й шаг. *Вычисление средних выигрышей игрока А* (проводится при условии, что второй игрок выбирает только чистые стратегии). Из таблицы

$$\begin{array}{r|cccccc} p & 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1-p & -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{array}$$

получим систему:

(1): $w = 6p - 2(1-p)$,

(2): $w = 4p - (1-p)$,

(3): $w = 3p + (1-p)$,

(4): $w = p$,

(5): $w = -p + 5(1-p)$,

(6): $w = 4(1-p)$.

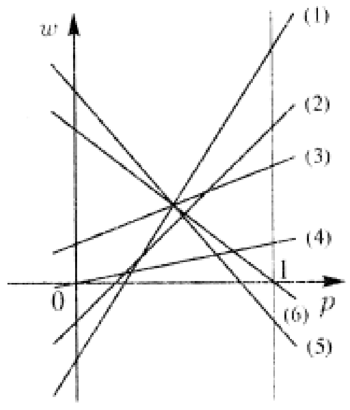

Рис. 5

3-й шаг. *Построение нижней огибающей.* Строим на координатной плоскости *(p, w)* все шесть прямых, уравнения которых получены на 2-м шаге (рис. 5), и находим их нижнюю огибающую.

4-й шаг. *Отыскание цены игры и оптимальной смешанной стратегии первого игрока.* При построении нижней огибающей надо определить, какие две из построенных шести прямых пересекаются в ее наивысшей точке. В данном случае это прямые (4) и (5).

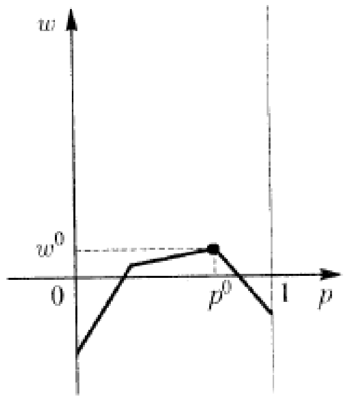

Рис. 6

Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} w = p \\ w = -p + 5(1-p) \end{cases}$$

получим: $p^0 = \dfrac{5}{7}$, $w^0 = \dfrac{5}{7}$ (рис. 6).

Для первого игрока решение: $v = \dfrac{5}{7}$, $P^0 = \left\{\dfrac{5}{7}, \dfrac{2}{7}\right\}$.

5-й шаг. *Отыскание цены игры и оптимальной смешанной стратегии второго игрока:* $Q^0 = \left\{q_1^0, q_2^0, q_3^0, q_4^0, q_5^0, q_6^0\right\}$.

Полагают:

$$q_1^0 = 0, q_2^0 = 0, q_3^0 = 0, q_4^0 = q, q_5^0 = 1-q, q_6^0 = 0$$

выделяя тем самым из шести чистых стратегий второго игрока стратегии которым соответствуют прямые (4) и (5), определяющие наивысшую точку нижней огибающей.

Приравнивают любой из двух средних выигрышей второго игрока (первый игрок выбирает только чистые стратегии), отвечающих предложенной смешанной стратегии

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & q & 1-q & 0 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

к цене игры: $q-(1-q)=\frac{5}{7}$ или $5(1-q)=\frac{5}{7}$. Результат: $q^0=\frac{6}{7}$

Полное решение игры имеет следующий вид:

$$P^0=\left\{\frac{5}{7},\frac{2}{7}\right\},\mathrm{Q}^0=\left\{0,0,0,\frac{6}{7},\frac{1}{7},0\right\},\quad v=\frac{5}{7}.$$

Ситуацию с наличием лишь двух конкурирующих стратегий игрока *нельзя* считать надуманной, поскольку на практике она возникает сравнительно часто; например, если нужно сравнить два образца некоторого изделия (скажем, старого и модернизированного) с целью выяснения возможности замены, это весьма удобно сделать при помощи платежной матрицы 2×n.

При определении стратегии второго игрока, в зависимости от формы нижней огибающей, может представиться несколько случаев.

1. Нижняя огибающая имеет ровно одну наивысшую точку $\left(p^0,w^0\right)$:

1.1. Если $\boldsymbol{p^0}$=0 (оптимальной стратегией первого игрока является вторая чистая стратегия), то второму игроку выгодно применять чистую стратегию, соответствующую номеру прямой, проходящей через точку $\left(0,w^0\right)$ и имеющей наибольший отрицательный наклон (рис. 7).

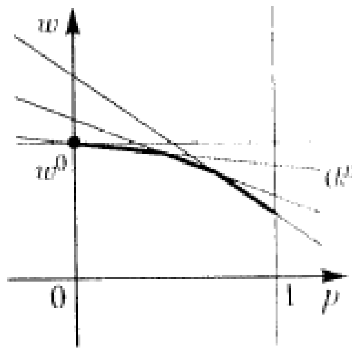

Рис. 7

1.2. Если $\boldsymbol{p^0}$=1 (оптимальной стратегией первого игрока является первая чистая стратегия), то второму игроку выгодно применять чистую стратегию, соответствующую номеру прямой, проходящей через точку $\left(1,w^0\right)$ и имеющей и имеющей наименьший положительный наклон (рис. 8).

1.3. Если $0<p^0<1$, то в наивысшей точке нижней огибающей пересекаются, по меньшей мере, две прямые, одна из которых (k) имеет положительный наклон, а другая (l) — отрицательный (рис.9), и оптимальная смешанная стратегия второго игрока получается, если положить:
$$q_k = q, q_l = 1 - q, q_j = 0,\ j \neq k, l$$

где q— решение уравнения:

$$a_{1k}q + a_{1l}(1-q) = a_{2k}q + a_{2l}(1-q).$$

2. Нижняя огибающая содержит горизонтальный участок, соответствующий чистой стратегии $\boldsymbol{\kappa^0}$ второго игрока**,** которая и является оптимальной для него (рис. 10).

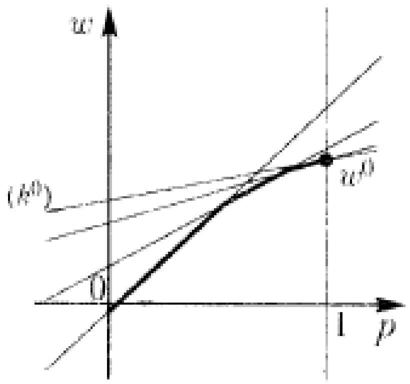

Рис. 8

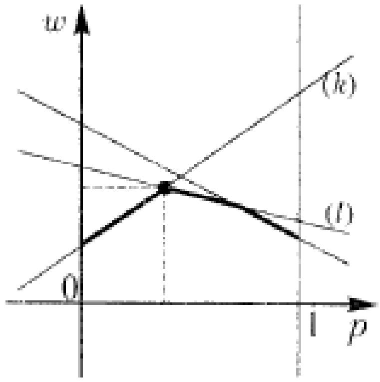

Рис. 9

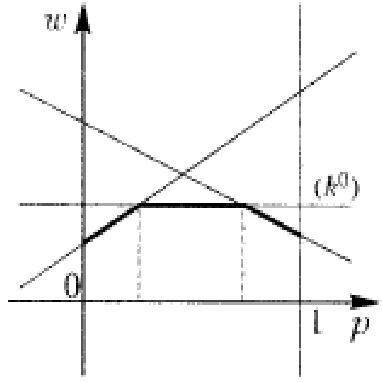

Рис. 10

Игры $m \times 2$

Пусть теперь в матричной игре две чистые стратегии имеет второй игрок, а число чистых стратегий у первого игрока произвольно (равно m). Это означает, что платежная матрица такой игры имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}.$$

Анализ такой игры во многом напоминает рассуждения, описанные для игры 2 x ***n*.**

Пусть $Q=\{q,1-q\}$ — произвольная смешанная стратегия второго игрока**.** Если первый игрок выбирает i-ю чистую стратегию, i=1,2,...,m, то средний выигрыш второго игрока в ситуации { i, Q**}** будет равным:

$$w=a_{i1}q+a_{i2}(1-q),\quad i=1,2,...,m \tag{8}$$

Зависимость этого выигрыша от переменной q описывается прямой.

Графиком функции $\max\limits_{1\le i\le m}\left(a_{i1}q+a_{i2}(1-q)\right)$ является верхняя огибающая семейства прямых (8), соответствующих чистым стратегиям первого игрока (рис. 11).

Абсцисса $\boldsymbol{q^{\circ}}$ нижней точки полученной ломаной определяет оптимальную смешанную стратегию второго игрока**,** а ордината $\boldsymbol{w^0}$ — цену игры.

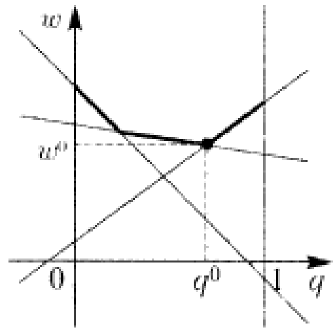

Рис. 11

Замечание. Отыскание оптимальной смешанной стратегии игрока *A* проводится по той же схеме, которая позволяет найти оптимальную смешанную стратегию второго игрока в игре $2\times n$.

Пример 4. Игра задана платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

1-й шаг. *Анализ игры на наличие седловой точки.* Нижняя цена игры равна 0, верхняя цена игры равна 3. Седловой точки нет. Решение игры нужно искать в смешанных стратегиях.

2-й *шаг. Вычисление средних выигрышей второго игрока* (проводится при условии, что первый игрок выбирает только чистые стратегии). Из таблицы:

q	$1-q$
3	-1
-1	3
1	0

получаем:

$$(1):\quad w=3q-(1-q),$$
$$(2):\quad w=-q+3(1-q),$$
$$(3):\quad w=q.$$

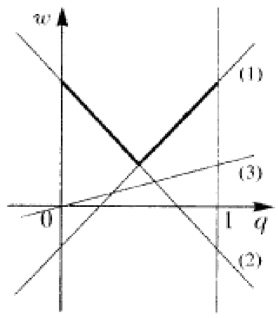

Рис. 12

3-й *шаг. Построение верхней огибающей.* Построим на координатной плоскости $(q,\ w)$ все три прямых, а затем и их верхнюю огибающую (рис. 12).

4-й *шаг. Отыскание цены игры и оптимальной смешанной стратегии второго игрока.* Нижняя точка верхней огибающей является точкой пересечения прямых (1) и (2). Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} w=3q-(1-q) \\ w=-q+3(1-q) \end{cases},$$

получаем: $q^0=\dfrac{1}{3},\quad w^0=1.$

5-й *шаг. Отыскание цены игры и оптимальной смешанной стратегии первого игрока.* Полагая $p_1^0=p,\quad p_2^0=1-p,\quad p_3^0=0,$ приравниваем средние выигрыши первого игрока, соответствующие чистым стратегиям второго игрока: $3p-(1-p)=-p+3(1-p)$, и находим $p^0=\dfrac{1}{2}.$

Таким образом, цена игры и оптимальные смешанные стратегии игроков соответственно равны:

$$v=1,\quad P^0=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right\},\quad Q^0=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти геометрическую интерпретацию игр, определяемых следующими матрицами:

1) $A=\begin{pmatrix}3&5&1&4&6\\7&4&9&5&3\end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix}3&4&5\\7&6&4\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}4&2&3&-1\\-4&0&-2&2\end{pmatrix}$ 4) $A=\begin{pmatrix}1&4\\3&-2\\0&5\end{pmatrix}$

5) $A=\begin{pmatrix}4&7\\9&3\\5&9\\6&9\end{pmatrix}$ 6) $A=\begin{pmatrix}3&9\\5&4\\1&7\\4&5\\6&3\end{pmatrix}$

Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Предположим, что цена игры положительна ($\upsilon > 0$). Если это не так, то согласно свойству 6 всегда можно подобрать такое число c, прибавление которого ко всем элементам матрицы выигрышей даёт матрицу с положительными элементами, и следовательно, с положительным значением цены игры. При этом оптимальные смешанные стратегии обоих игроков не изменяются.

Итак, пусть дана матричная игра с матрицей A порядка $m\times n$. Согласно свойству 7 оптимальные смешанные стратегии $p = (p_1, ..., p_m)$, $q = (q_1, ..., q_n)$ соответственно игроков 1 и 2 и цена игры υ должны удовлетворять соотношениям.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge \upsilon \quad (\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}}) \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \\ p_i \ge 0, \quad (\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{m}}) \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le \upsilon \quad (\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{m}}) \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \\ q_j \ge 0, \quad (\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}}) \end{cases} \tag{10}$$

Разделим все уравнения и неравенства в (9) и (10) на υ (это можно сделать, т.к. по предположению $\upsilon > 0$) и введём обозначения :

$$\frac{p_i}{\upsilon} = x_i, \quad (i=\overline{1,m}), \qquad \frac{q_j}{\upsilon} = y_j, \quad (j=\overline{1,n}),$$

Тогда (9) и (10) перепишется в виде:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{\upsilon}, \quad x_i \ge 0, \quad (i=\overline{1,m}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{\upsilon}, \quad y_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,n}).$$

Поскольку первый игрок стремится найти такие значения p_i и, следовательно, x_i , чтобы цена игры υ была максимальной, то решение первой задачи сводится к нахождению таких неотрицательных значений x_i $(i=\overline{1,m})$, при которых

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1. \tag{11}$$

Поскольку второй игрок стремится найти такие значения q_j и, следовательно, y_j, чтобы цена игры υ была наименьшей, то решение второй задачи сводится к нахождению таких неотрицательных значений y_j, $(j = \overline{1,n})$, при которых

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1. \tag{12}$$

Формулы (11) и (12) выражают двойственные друг другу задачи линейного программирования (ЗЛП).

Решив эти задачи, получим значения x_i $(i = \overline{1,m})$, y_j $(j = \overline{1,n})$ и υ.Тогда смешанные стратегии, т.е. p_i и q_j получаются по формулам :

$$\begin{aligned} p_i &= \upsilon x_i \quad (\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{m}}) \\ q_j &= \upsilon y_j \quad (\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}}) \end{aligned} \tag{13}$$

Пример 5. ***Игра «вооружение - помехи»***

Сторона А располагает тремя видами вооружения A_1, A_2, A_3, а сторона В тремя видами помех B_1, B_2, B_3. Вероятность решения боевой задачи стороной А при различных видах вооружения и помех задана матрицей:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	0,8	0,2	0,4
A_2	0,4	0,5	0,6
A_3	0,1	0,7	0,3

Сторона А стремится решить боевую задачу, сторона В – воспрепятствовать этому.

Решение:

Избавимся от дробей, перепишем матрицу в следующем виде:

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Обозначим цену новой игры $v'=10v$.

Составим пару взаимно-двойственных задач :

Задача линейного программирования (ЗЛП) для стороны А:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \to \min, \quad x_i = \frac{p_i}{v}\ i = 1,2,3$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \ge 1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \ge 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Задача линейного программирования для стороны В (является двойственной к ЗЛП стороны А):

$$Z = y_1 + y_2 + y_3 \to \max, \quad y_j = \frac{q_j}{v},\ j = 1,2,3$$

$$\begin{cases} 8y_1 + 2y_2 + 4y_3 \le 1 \\ 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \le 1 \\ y_1 + 7y_2 + 3y_3 \le 1 \end{cases}$$

$$y_1, \mathrm{y}_2, \mathrm{y}_3 \ge 0$$

Решим Симплекс-методом вторую из них, для стороны В.

Запишем условия в векторной форме;

$$\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}y_1+\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}y_2+\begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix}y_3+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}y_4+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}y_5+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}y_6=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

				Коэффициенты целевой функции при переменных *y*						Отношения
				1	1	1	0	0	0	
i	базис	Коэффициенты целевой функции при базисе	Решение, соответствующее текущему базису	**y_1**	**y_2**	**y_3**	**y_4**	**y_5**	**y_1**	
1	**y_4**	0	1	**8**	2	4	1	0	0	0,125
2	**y_5**	0	1	4	5	6	0	1	0	0,25
3	**y_6**	0	1	1	7	3	0	0	1	1
			0	-1	-1	-1	0	0	0	
1	**y_1**	1	0,125	1	0,25	0,5	0,13	0	0	0,5
2	**y_5**	0	0,5	0	**4**	4	-0,5	1	0	0,125
3	**y_6**	0	0,875	0	6,38	-2,25	0	0	1	0,137
			0,125	0	-0,75	-0,5	0,13	0	0	0,125
1	**y_1**	1	**0,094**	1	0	0,25	0,16	-0,07	0	
2	**y_2**	1	**0,125**	0	1	1	-0,13	0,25	0	
3	**y_6**	0	**0,078**	0	0	-8,63	-0,28	0	1	
			F_{max} =0,2187	0	0	0,25	**0,03**	**0,19**	**0**	

Из оптимальной симплекс-таблицы следует, что $v' = \frac{1}{F_{\max}} = \frac{1}{0,2187} = 4,57$

Y= (0,094; 0,125; 0),

а из соотношений двойственности следует, что

X= (0,03; 0,188)

Следовательно,

Вероятности применения вооружения стороной А:

$p_1 = x_1 \cdot v' = 0,03 \cdot 4,57 = 0,143$

$p_2 = x_2 \cdot v' = 0,188 \cdot 4,57 = 0,857$

$p_3 = x_3 \cdot v' = 0 \cdot 4,57 = 0$

(p_1, p_2, p_3) = (0,143; 0,857; 0).

Вероятности применения различными типами помех стороной В:

$$q_1 = y_1 \cdot v' = 0,094 \cdot 4,57 = 0,429$$

$$q_2 = y_2 \cdot v' = 0,125 \cdot 4,57 = 0,571$$

$$q_3 = y_3 \cdot v' = 0 \cdot 4,57 = 0$$

(q_1, q_2, q_3) = $(0,429; 0,571;\ 0)$.

Вероятность удачной атаки: $v = \dfrac{v'}{10} = 0,457$

Ответ: $\{(0,143; 0,857;\ 0), (0,429; 0,571;\ 0), v = 0,457\}$.

Итерационный метод решения матричных игр

Опишем метод отыскания решения матричной игры (цены игры и оптимальных смешанных стратегий), в известной степени верно отражающий некоторую реальную ситуацию накопления опыта постепенной выработки игроками ***хороших*** стратегий в результате многих повторений конфликтных ситуаций. Основная идея метода заключается в том, чтобы мысленно как бы смоделировать реальное практическое «обучение» игроков в ходе самой игры, когда каждый из игроков на собственном опыте прощупывает способ поведения противника и старается отвечать на него наиболее выгодным для себя образом. Иными словами, всякий раз при возобновлении игры игрок выбирает наиболее выгодную для себя стратегию, опираясь на предыдущий выбор противника.

Проиллюстрируем этот метод на примере игры, заданной матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

(здесь maxmin = 0, minmax = 2 и, следовательно, седловой точки нет).

Опишем правила выбора ходов игроками, предположив, для определенности, что начинает игрок *A:*

ход игрока A — стратегия $\boldsymbol{A_1}$ — (2 0 3);

игрок *B* выбирает свою стратегию так, чтобы выигрыш игрока *A* был минимален (отмечен полужирным шрифтом):

ход игрока B — стратегия B2 — $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

игрок *A* выбирает свою стратегию так, чтобы его выигрыш при стратегии B_2 игрока *B* был максимален (отмечен полужирным шрифтом):

ход игрока A — стратегия $\boldsymbol{A_2}$ — (1 3 -3);

игрок *B* выбирает свою стратегию так, чтобы «накопленный» выигрыш игрока *A* при стратегиях A_1 и A_2, был минимален:

(2 0 3) + (1 3 -3) = (3 3 **0),**

ход игрока B — стратегия $\boldsymbol{B_3}$ — $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

игрок *A* выбирает свою стратегию так, чтобы его «накопленный» выигрыш при стратегиях B_2 и B_3 игрока B,был максимален:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ход игрока A — стратегия $\boldsymbol{A_1}$ — (2 0 3);

игрок *B* выбирает свою стратегию так, чтобы «накопленный» выигрыш игрока *A* при стратегиях A_1, A_2 и A_1, был минимален:

(3 3 0) + (2 0 3) = (5 3 3),

ход игрока B — стратегия $\boldsymbol{B_2}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ и т. д.

Разобьем последовательные ходы игроков *A* и *B* на пары *(ход игрока* А, *ход игрока B) и* запишем результаты в таблице, требующей некоторых пояснений.

n	***i***	B_1	B_2	B_3	$v_*(n)$	***j***	A_1	A_2	$v^*(n)$	$v(n)$
1	1	2	**0**	3	0,00	2	0	**3**	3,00	1,50
2	2	3	3	**0**	0,00	3	**3**	0	1,50	0,75
3	1	5	3	3	1,00	2	**3**	3	1,00	1,00
4	1	7	3	6	0,75	2	3	**6**	1,50	1,12
5	2	8	6	3	0,60	3	**6**	3	1,20	0,90
6	1	10	**6**	6	1,00	2	**6**	6	1,00	1,00
7	1	12	**6**	9	0,86	2	6	**9**	1,44	1,15
8	2	13	9	**6**	0,75	3	**9**	6	1,13	0,93
9	1	15	**9**	9	1,00	2	**9**	9	1,00	1,00
10	1	17	**9**	12	0,90	2	9	**12**	1,20	1,05
11	2	18	12	**9**	0,82	3	**12**	9	1,09	0,96
12	1	20	**12**	12	1,00	2	**12**	12	1,00	1,00

Описание таблицы

1-й столбец – номер n шага (пары последовательных ходов игроков А и В)

2-й столбец - номер *i* стратегии, выбранной игроком А*;*

3-й столбец – «накопленный» суммарный выигрыш игрока *A* за первые *n* шагов при выборе игроком *B* стратегии $B_{1;}$

4-й столбец - накопленный» суммарный выигрыш игрока *A* за первые *n* шагов при выборе игроком *B* стратегии $B_{2;}$

5-й столбец - накопленный» суммарный выигрыш игрока *A* за первые *n* шагов при выборе игроком *B* стратегии B_3.

Замечание: в 3 – 5 столбцах, минимальный выигрыш выделяется полужирным шрифтом.

6-й столбец — минимальный средний выигрыш игрока ***A***, равный минимальному накопленному им выигрышу за первые ***n*** шагов, деленному на число этих шагов,

7-й столбец - номер k стратегии, выбранной игроком ***B***,

8-й столбец - «накопленный» суммарный выигрыш игрока ***A*** за первые n шагов при выборе им стратегии A_1;

9-й столбец — «накопленный» суммарный выигрыш игрока ***A*** за первые ***n*** шагов при выборе им стратегии A_2;

Замечание: в 8, 9 столбцах, максимальный выигрыш выделяется полужирным шрифтом.

10 - й столбец — максимальный средний выигрыш игрока ***A***, равный максимальному накопленному им выигрышу за первые ***n*** шагов, деленному на число этих шагов,

11-й столбец — среднее арифметическое минимального среднего выигрыша и максимального среднего выигрыша игрока ***A*.**

Решение игры определяется приближенно по окончании любого из шагов.

Например, за приближенную цену игры можно взять среднее арифметическое ***v(n)***, полученное на ***n-м*** шаге. Смешанные стратегии противников определяются частотами появления чистых стратегий.

После **9**-го шага имеем

$v(9) = 1{,}00$.

При этом игрок ***A*:** **6** раз использовал стратегию A_1 и **3** раза стратегию A_2.

В свою очередь игрок ***B:*** **6** раз применял стратегию $\mathbf{B_2}$**, 3** раза стратегию $\mathbf{B_3}$**,** а стратегией $\boldsymbol{B_1}$ не пользовался вообще. Отсюда получаем, что

$$P_9 = \left\{\frac{6}{9}, \frac{3}{9}\right\}, \quad Q_9 = \left\{0, \frac{6}{9}, \frac{3}{9}\right\}$$

Замечания

***Замечание** 1*. При увеличении числа шагов все три величины $v_*(n), v^*(n), v(n)$ будут приближаться к цене игры *v*, но среднее арифметическое $v(n)$ будет приближаться к *v* сравнительно быстрее.

Замечание 2. Хотя сходимость итераций весьма медленна, тем не менее даже небольшой расчет всегда дает возможность находить ориентировочное значение цены игры и доли чистых стратегий.

Замечание 3. Сравнительно медленную скорость сходимости можно объяснить целым рядом причин. Укажем одну из них, психологически наиболее интересную. Если, к примеру, игрок *А* уже получил оптимальную смешанную стратегию, то он не склонен останавливаться на ней. Отнюдь нет — он продолжит попытки выиграть у противника *В* побольше, особенно если последний еще не достиг оптимальной смешанной стратегии. Таким поведением игрок *А* может невольно ухудшить свое положение.

'Замечание 4. Отметим два основных преимущества описанного метода:

1)итерационный метод прост и одновременно универсален (при его помощи можно легко найти приближенное решение любой матричной игры);

2)объем и сложность вычислений сравнительно слабо растут по мере увеличения числа стратегий игроков (размеров матрицы игры).

Пример 5. *Игра «вооружение - помехи»* (продолжение)

n	***i***	B_1	B_2	B_3	***min***	$v_*(n)$	***j***	A_1	A_2	A_3	***max***	$v^*(n)$	$v(n)$
1	1	0,8	0,2	0,4	0,2	0,20	2	0,2	0,5	0,7	0,7	0,70	0,45
2	3	0,9	0,9	0,7	0,7	0,35	3	0,6	1,1	1	1,1	0,55	0,45
3	2	1,3	1,4	1,3	1,3	0,43	1	1,4	1,5	1,1	1,5	0,50	0,47
4	2	1,7	1,9	1,9	1,7	0,43	1	2,2	1,9	1,2	2,2	0,55	0,49
5	1	2,5	2,1	2,3	2,1	0,42	2	2,4	2,4	1,9	2,4	0,48	0,45
6	1	3,3	2,3	2,7	2,3	0,38	2	2,6	2,9	2,6	2,9	0,48	0,43
7	2	3,7	2,8	3,3	2,8	0,40	2	2,8	3,4	3,3	3,4	0,49	0,44
8	2	4,1	3,3	3,9	3,3	0,41	2	3	3,9	4	4	0,50	0,46
9	3	4,2	4	4,2	4	0,44	2	3,2	4,4	4,7	4,7	0,52	0,48
10	3	4,3	4,7	4,5	4,3	0,43	1	4	4,8	4,8	4,8	0,48	0,46
11	2	4,7	5,2	5,1	4,7	0,43	1	4,8	5,2	4,9	5,2	0,47	0,45
12	2	5,1	5,7	5,7	5,1	0,43	1	5,6	5,6	5	5,6	0,47	0,45
13	1	5,9	5,9	6,1	5,9	0,45	1	6,4	6	5,1	6,4	0,49	0,47
14	1	6,7	6,1	6,5	6,1	0,44	2	6,6	6,5	5,8	6,6	0,47	0,45
15	1	7,5	6,3	6,9	6,3	0,42	2	6,8	7	6,5	7	0,47	0,44
16	2	7,9	6,8	7,5	6,8	0,43	2	7	7,5	7,2	7,5	0,47	0,45
17	2	8,3	7,3	8,1	7,3	0,43	2	7,2	8	7,9	8	0,47	0,45

18	2	8,7	7,8	8,7	7,8	0,43	2	7,4	8,5	8,6	8,6	0,48	0,46
19	3	8,8	8,5	9	8,5	0,45	2	7,6	9	9,3	9,3	0,49	0,47
20	3	8,9	9,2	9,3	8,9	0,45	1	8,4	9,4	9,4	9,4	0,47	0,46

…

140	2	63,3	64	70,9	63,3	0,45	1	62,4	64,4	63,4	64,4	0,46	0,46
141	2	63,7	64,5	71,5	63,7	0,45	1	63,2	64,8	63,5	64,8	0,46	0,46
142	2	64,1	65	72,1	64,1	0,45	1	64	65,2	63,6	65,2	0,46	0,46
143	2	64,5	65,5	72,7	64,5	0,45	1	64,8	65,6	63,7	65,6	0,46	0,45
144	2	64,9	66	73,3	64,9	0,45	1	65,6	66	63,8	66	0,46	0,45
145	2	65,3	66,5	73,9	65,3	0,45	1	66,4	66,4	63,9	66,4	0,46	0,45
146	1	66,1	66,7	74,3	66,1	0,45	1	67,2	66,8	64	67,2	0,46	0,46
147	1	66,9	66,9	74,7	66,9	0,46	1	68	67,2	64,1	68	0,46	0,46

$w_A = \left(\frac{15}{147}, \frac{127}{147}, \frac{15}{147}\right)$, $\tilde{p} = (0,11; 0,86; 0,03)$, точные значения $p =$ (0,143; 0,857; 0).

$w_B = \left(\frac{63}{147}, \frac{83}{147}, \frac{1}{147}\right)$, $\tilde{q} = (0,43; 0,56; 0,007)$, точные значения $q =$ (0,429; 0,571; 0).

$\tilde{v} = 0,46$ точное значения v =0,457

Самостоятельная работа: «Матричные игры»

Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе.

Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из пяти различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведённой по каждой технологии, предприятия могут установить цену реализации единицы продукции. При этом предприятия имеют одинаковые затраты на производство единицы продукции.

Цена реализации и полная себестоимость единицы продукции в зависимости от технологий.

Для первого предприятия:

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.
		Предприятие 1
I	11	8
II	10	7
III	10	6
IV	9	5
V	5	4

Для второго предприятия:

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.
		Предприятие 2
I	12	8
II	11	7
III	10	6
IV	8	5
V	4	4

Функция спроса на продукцию: $|Y| = 8 - (0.3+0.1\cdot(N-1))\cdot X$

где

- X – средняя цена реализации товара двумя предприятиями при использовании различных технологий
- N – порядковый номер Вашей фамилии в списке студентов группы.

- Y – количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс. ед.).

Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию:

	доля 1-го предприятия				
	12	11	10	8	4
11	**0,65**	**0,33**	**0,25**	**0,3**	**0,15**
10	**0,52**	**0,75**	**0,32**	**0,28**	**0,14**
10	**0,58**	**0,48**	**0,49**	**0,44**	**0,32**
9	**0,71**	**0,58**	**0,65**	**0,35**	**0,44**
5	**0,75**	**0,8**	**0,7**	**0,5**	**0,55**

Задание:

1. Составьте платежную матрицу описывающую получение прибыли предприятиями в зависимости от продукции, произведённой по каждой технологии и цены реализации единицы продукции, учитывая затраты на производство единицы продукции и спрос.
2. Найти решение задачи, т.е. ситуацию равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями.
3. Проверьте результат итерационным методом (100 итераций) (MS Excel).

Вопросы:

4. Существует ли в данной задаче решение в чистых стратегиях?
5. Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?
6. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия?
7. Какое предприятие окажется в выигрышном положении?
8. Дайте краткую экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

5. Определение игры в развернутой форме

Развернутая форма – естественный способ представления *салонных игр*, вроде шахмат или преферанса. Однако и другие игры (по крайней мере, дискретные), обычно сначала рассматриваются в развернутой форме.

Игры в развернутой форме представляются в виде дерева, вершины которого представляют собой текущие игровые ситуации. Вершины соединяются дугами, которые означают возможные переходы между ситуациями. Если из данной вершины выходят несколько дуг, это значит, что в данной ситуации ход игры зависит от выбора одного из игроков или от реализации внешнего события. Самая левая вершина («*корень*» дерева) означает ситуацию в начале игры, *конечные* (*терминальные*) *вершины* означают возможные исходы игры. Каждой конечной вершине поставлен в соответствие *вектор выигрышей* игроков. В случае двух игроков этот вектор состоит из пары. Для каждой нетерминальной вершины необходимо указать, какой игрок *контролирует* данную вершину, то есть осуществляет выбор. Вершина может и не контролироваться ни одним из игроков, тогда эту вершину контролирует природа. Вершина, контролируемая игроком с номером *i*, называется еще «*точкой выбора i-го игрока*».

При каждом розыгрыше игроки (и реализация природных факторов) выбирают *путь* в этом дереве от стартовой вершины до одной из терминальных вершин.

Немаловажной деталью описания игры в развернутой форме является **информированность** игрока в каждой контролируемой им игровой ситуации. для полноты описания необходимо, помимо игрока, контролирующего данную вершину, указать информационное состояние, в котором он находится.

Заметим, что возможные альтернативы вершин, объединенных одним информационным состоянием, должны совпадать, иначе нарушается предположение об одинаковой информированности игрока в обеих ситуациях.

Для описания игры n лиц в развернутой форме необходимо определить:

Дерево, ребрам и вершинам которого присвоены следующие метки:

1. Каждой терминальной вершине g_i ставится в соответствие метка-«вектор выигрышей», то есть числовой вектор $G=(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ (размерности n) выигрышей (полезностей) игроков.
2. Каждой нетерминальной вершине ставится в соответствие метка контроля – номер игрока $i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$ контролирующего вершину. Если данную вершину контролирует природа (внешние обстоятельства, случай и т.д.), то эта метка равна нулю.
3. Каждой нетерминальной вершине ставится в соответствие метка информационного состояния игрока (обычно она отделяется от номера игрока точкой).
4. Каждое ребро помечено возможными альтернативами, доступными для выбора игрока, контролирующего вершину, из которой выходит данное ребро. Если вершину контролирует природа, метки должны обозначать вероятности реализации данной альтернативы, причем сумма вероятностей должна равняться единице.
5. Набор исходящих ребер множества вершин с одним информационным состоянием имеет одинаковый набор маркировок.

Определение 1: *Игрой в развернутой форме называется система 1-5.*

Определение 2: *Игра называется конечной, если ее дерево содержит конечное число вершин.*

Определение 3: *Говорят, что игрок i имеет полную информацию в игре I или, что I есть игра с полной информацией для игрока i если каждое его информационное множество состоит из одного элемента.*

Рассмотрим примеры двух игр, состоящих из двух ходов, которые последовательно делают участвующие в ней игроки *A* и *B*. Начинает игрок *A:* он выбирает одну из двух возможных альтернатив — число *x*, равное либо 1 (первая альтернатива), либо 2 (вторая альтернатива). На ход игрока *A* игрок *B* отвечает своим ходом, выбирая одну из двух возможных альтернатив — число *y*, равное либо 1 (первая альтернатива), либо 2 (вторая альтернатива). В результате игрок *А* получает вознаграждение или вынужден платить штраф.

Пример 6

1-й ход. Игрок ***А*** выбирает число ***x*** из множества двух чисел {1, 2}.

2-й ход. Игрок ***Б*** выбирает число ***y*** из множества двух чисел {1,2}, зная выбор числа ***x*** игроком ***А.***

Функция ***g(x,y)*** выплат игроку ***А*** за счет игрока ***Б*** задается так:

g(1,1)=1;   g(1,2)=-1;

g(2,1)=-2;   g(2,2)=2;

На рисунке 13 показаны дерево игры и информационные множества. Позиции, принадлежащие одному и тому же информационному множеству, объединяются пунктирными линиями.

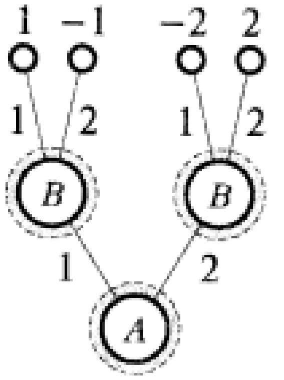

Рис. 13

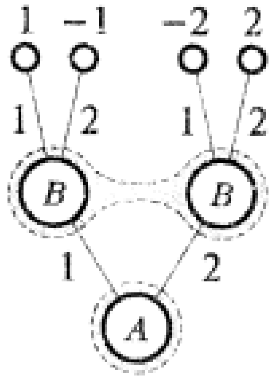

Рис. 14

Пример 2**.** В случае, когда выполнены все условия предыдущего примера, кроме одного — игрок ***Б*** на 2-м ходе выбирает число ***y*** из множества двух чисел {1,2}, не зная выбора числа ***x*** игроком ***А,*** - информационные множества выглядят так, как показано на рисунке 14.

Это игра с неполной информацией: игрок **Б** при своем ходе знает, в каком информационном множестве он находится, но ему неизвестно, в какой именно позиции этого множества — левой или правой.

6. Нормализация позиционной игры

Игрой в нормальной форме называется совокупность:

$I = \{N, \{U_i\}_{i \in N}, \{g_i\}_{i \in N}\},$ где

N - множество всех игроков;

U_i — множество стратегий i— го игрока;

g_i -функция выигрыша i — го игрока, которую он стремится максимизировать.

Обычно игроков нумеруют в произвольном порядке от 1 до n (n - число игроков), поэтому $N = \{1,2,...,n\}$. Стратегия i - го игрока для игры в нормальной форме сводится к одноактному выбору любой точки из множества U_i. Функция выигрыша ставит в соответствие каждому элементу $u=(u_1,...,u_n)$ из множества $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$, называемому **исходом** или **ситуацией игры,** действительное число. Таким образом, g_i есть однозначное отображение множества $U \to R$.

Исходная постановка игры в нормальной форме не предполагает никакой дополнительной информации у игроков о действиях друг друга. Поэтому можно считать, что все игроки одновременно и независимо осуществляют выбор своих стратегий, т.е. элементов $u_i \in U_i$. В результате складывается ситуация u, однозначно определяющая выигрыши всех игроков $g_1(u),...g_n(u)$.

Если множества действий игроков конечны, то действия каждого игрока можно последовательно пронумеровать. Если, к тому же, игроков двое, выигрыши первого игрока можно представить в виде матрицы, в которой он выбирает действие – номер строки, его противник выбирает действие – номер столбца, а на пересечении столбца и строки находится число, соответствующее выигрышу первого игрока. Аналогичную матрицу можно построить и для второго игрока. Определенная с помощью пары таких матриц игра в нормальной форме называется *биматричной*.

Процесс сведения позиционной игры к матричной называется *нормализацией игры*.

Пример 6 (продолжение)

Опишем стратегии игроков.

Стратегию игрока ***A*** можно задать одним числом ***x,*** показывающим, какую альтернативу, первую или вторую, выбрал игрок.

Тем самым, у игрока ***A*** две чистых стратегии:

$\boldsymbol{A_1}$ — «выбрать $\boldsymbol{x=1}$», $\boldsymbol{A_2}$ — «выбрать $\boldsymbol{x=2}$».

Стратегию игрока ***B*** (принимая **во** внимание, **что** выбор игрока ***A*** на 1-м ходе ему известен) удобно описывать упорядоченной парой: $[y_1, y_2]$. Здесь $\mathbf{y_1}$ ($y_1 = \{1,2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком ***B*** при условии, что игрок ***A*** выбрал первую альтернативу, $\boldsymbol{x}=1$, а $\mathbf{y_2}$ ($y_2=\{1,2\}$) — альтернатива, выбираемая игроком ***B*** при условии, что игрок ***A*** выбрал вторую альтернативу, $\boldsymbol{x}= 2$.

Таким образом, у игрока ***B*** четыре чистых стратегии:

$\boldsymbol{B_1}$ – [1, 1] («$\boldsymbol{y=1}$ при любом выборе $\boldsymbol{x}$»);

$\boldsymbol{B_2}$ – [1, 2] («$\boldsymbol{y=x}$ при любом выборе $\boldsymbol{x}$»);

$\boldsymbol{B_3}$ – [2, 1] («$\boldsymbol{y\neq x}$ при любом выборе $\boldsymbol{x}$»);

B_4 – [2, 2] («$\boldsymbol{y}$=2 при любом выборе $\boldsymbol{x}$»).

Покажем теперь, как рассчитываются выигрыши игрока ***A*** в зависимости от примененных стратегий.

Пусть, например, игрок ***A*** выбрал стратегию $\boldsymbol{A_1}$ - (1), а игрок ***B*** — стратегию $\boldsymbol{B_2}$ - [1,2]. Тогда $\boldsymbol{x}$= а из стратегии [1,2] вытекает, что $\boldsymbol{y}$=1. Отсюда $g(x,y)=g(1,1)=1$. Остальные выигрыши рассчитываются аналогично.

Результаты расчетов записываются обычно или в виде таблицы выигрышей игрока ***A:***

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	x=1	g(1,1)	g(1,1)	g(1,2)	g(1,2)
A_2	x=2	g(2,1)	g(2,2)	g(2,1)	g(2,2)

или в виде матрицы игры:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

где, как обычно, строки соответствуют стратегиям игрока ***A,*** а столбцы — стратегиям игрока ***B.***

Полученная матрица имеет седловую точку. Оптимальные стратегии игроков: A_1 — (1) и B_3 — [2, 1]. Тем самым, игрок A на 1-м ходе выбирает $x = 1$, а игрок B на 2-м ходе выбирает $y= 2$. Цена игры v=-1.

Пример 6 (продолжение). Опишем стратегии игроков.

У игрока A две чистых стратегии: A_1 — «выбрать $x=1$», A_2 — «выбрать $x=2$». Так как игроку B выбор игрока А неизвестен, то есть игрок B не знает, в какой именно из двух позиций он находится (рис. 14), то у него те же две стратегии:

B_1— «выбрать $y= 1$», B— «выбрать $y = 2$».

Соответствующие таблица выигрышей игрока A и матрица игры имеют следующий вид

		B_1	B_2
		y=1	y=2
A_1	x=1	g(1,1)	g(1,2)
A_2	x=2	g(2,1)	g(2,2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Полученная матрица седловой точки не имеет.

Замечание 1. На этих двух примерах хорошо видно, что результат сведения позиционной игры к матричной напрямую зависит от степени информированности игроков. В частности, отсутствие у игрока B сведений о выборе, сделанном игроком А, приводит к уменьшению количества его возможных стратегий. Сравнивая ответы, полученные в примере 6 замечаем, что снижение уровня информированности игрока (в данном случае — игрока B) делает для него исход игры менее благоприятным. Заметим, что это легко следует и из общих соображений.

Замечание 2. Приведенные выше примеры не исчерпывают всех возможных вариантов даже в этом, самом простом, случае двухходовых позиционных игр.

Рассмотрим теперь несколько примеров сведения к матричным играм - позиционных игр, состоящих из трех ходов, сосредоточив при этом основное внимание на одном из наиболее ответственных шагов нормализации - описании стратегий игроков.

Пример 7

1-й ***ход*** делает игрок ***A:*** он выбирает число ***x*** из множества двух чисел **{1,2}.**

2-й ход делает игрок ***B:*** зная выбранное игроком ***A*** число ***x,*** он выбирает число ***y*** из множества двух чисел **{1,2}.**

3-й ход делает игрок ***A.*** не зная о выбранном игроке ***B*** числе ***y*** на **2**-м ходе и забыв выбранное им самим на 1-м ходе число ***x,*** он выбирает число *z* из множества двух чисел **{1,2}.**

После этого игрок ***A*** получает вознаграждение *g(x,y,z)* за счет игрока В, например такое:

g(1, 1, 1)=2	g(2, 1, 1)=-1
g(1, 1, 2)=-2	g(2, 1, 2)=3
g(1, 2, 1)=1	g(2, 2, 1)=0
g(1, 2, 2)=0	g(2, 2, 2)=-3

На рисунке 15 показаны дерево игры и информационные множества.

Нормализуем эту игру.

Поскольку игроку ***B*** выбор игрока ***A*** на 1-м ходе известен, то у игрока ***B*** те же четыре стратегии, что и в примере 6:

$В_1$-[1,1], $В_2$-[1,2], $Б_3$-[2, 1], $В_4$-[2,2].

Игрок ***A*** на 3-м ходе не знает предыдущих выборов - ни значения ***x,*** ни значения ***y.***

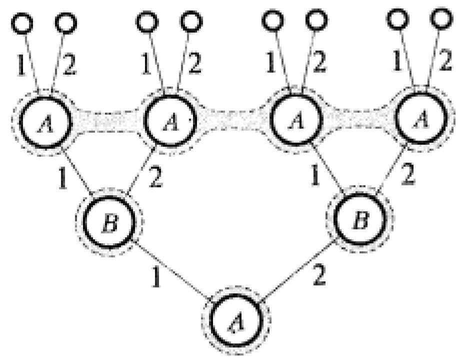

Рис. 15

Поэтому каждая его стратегия состоит просто из пары чисел (x,z), где ***x***-(x=1, 2) — альтернатива, выбираемая игроком ***A*** на 1-м ходе, а *z*-(*z*=1, 2) — альтернатива, выбираемая игроком ***A*** на 3-м ходе.

Например, выбор игроком ***A*** стратегии (2, 1) означает, что на 1-м ходе он выбирает ***x***= 2, а на 3-м ходе - ***z*** = 1.

Таким образом, у игрока 4 четыре стратегии:

A_1 =(1,1), A_2=(1,2), A_3 =(2; 1), A_4 =(2, 2).

Покажем теперь, как рассчитываются выигрыши игрока .**А** в зависимости от стратегий, применяемых игроками в данной игре. Пусть, например, игрок ***A*** выбрал стратегию A_2 - (1,2), а игрок ***B*** - стратегию B_3 - [2, 1]. Тогда ***x***=1, откуда вытекает, что ***y*=*2.*** Значение ***z***=2 выбрано игроком **А** независимо от выбора игрока **В.** Вычисляя значение функции выигрышей для этого набора, получаем

g(x, y, z) = g(l,2,2) = -4.

В результате подобных рассуждений получаются и остальные пятнадцать выигрышей. Это позволяет построить таблицу выигрышей игрока ***A.*** Имеем

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	(1,1)	g(1,1,1)	g(1,1,1)	g(1,2,1)	g(1,2,1)
A_2	(1,2)	g(1,1,2)	g(1,1,2)	g(1,2,2)	g(1,2,2)
A_3	(2,1)	g(2,1,1)	g(2,2,1)	g(2,1,1)	g(2,2,1)
A_4	(2,2)	g(2,1,2)	g(2,2,2)	g(2,1,2)	g(2,2,2)

или $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Пример 8:

1-й ход делает игрок А: он выбирает число ***x*** из множества двух чисел {1,2}.

2-й ход делает игрок В: не зная о выборе игрока А на 1-ом ходе, он выбирает число ***y*** из множества двух чисел {1,2}.

3-й ход делает игрок А: он выбирает число ***z*** из

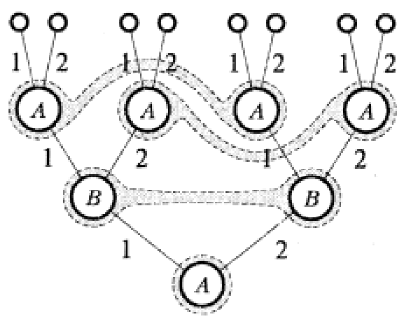

Рис. 16

множества двух чисел {1,2}, зная значение $\boldsymbol{y}$, выбранное игроком В на 2-м ходе, но не помня собственного выбора $\boldsymbol{x}$ на 1-м ходе.

Графическое представление этой игры показано на рисунке 16.

Поскольку игроку ***B*** неизвестен выбор игрока ***A*** на 1-м ходе, то, выполняя свой ход, он не знает, в какой именно из двух возможных позиций он находится. Поэтому у игрока ***B*** всего две стратегии:

$\boldsymbol{B_1}$ - «выбрать $\boldsymbol{y}$ = 1»;

$\boldsymbol{B_2}$ - «выбрать $\boldsymbol{y}$ =2».

При описании стратегий игрока ***A*** нужно исходить из того, что к 3-му ходу игрок ***A*** утратил сведения о собственном выборе на 1-м ходе, но ему известен выбор игрока ***B*** на 2-м ходе. Поэтому выбор числа $\boldsymbol{z}$ игроку ***A*** следует связать с известным ему к 3-му ходу значением $\boldsymbol{y}$. Удобнее всего это сделать при помощи упорядоченной пары: [$\boldsymbol{z_1}$, $\boldsymbol{z_2}$].

Здесь $\boldsymbol{z_1}$ ($\boldsymbol{z_1}$ =1,2) — альтернатива, выбираемая игроком ***A*** при условии, что игрок ***B*** выбрал первую альтернативу, ($\boldsymbol{y}$=1), а $\boldsymbol{z_2}$ ($\boldsymbol{z_2}$ =1,2) — альтернатива, выбираемая игроком ***A*** при условии, что игрок ***B*** выбрал вторую альтернативу, $\boldsymbol{y}$ = 2.

Чистую стратегию игрока, ***A*** в данной игре можно записать так ($\boldsymbol{x}$, [$\boldsymbol{z_1}$, $\boldsymbol{z_2}$]). Здесь $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x}$=1, 2) — альтернатива, которую игрок ***A*** выбирает на 1-м ходе, $\boldsymbol{z_1}$ ($\boldsymbol{z_1}$=1,2) — альтернатива, которую игрок ***A*** выбирает на 3-м ходе, если на 2-м ходе игрок ***B*** выбрал первую альтернативу ($\boldsymbol{y}$= 1), и $\boldsymbol{z_2}$ ($\boldsymbol{z_2}$ =1,2) альтернатива, которую игрок ***A*** выбирает на 3-м ходе, если на 2-м ходе игрок ***B*** выбрал вторую альтернативу ($\boldsymbol{y=2}$).

Например, выбор игроком ***A*** стратегии (2, [2, 1]) означает, что на 1-м ходе игрок ***A*** выбирает $\boldsymbol{x}$=2, а на 3-м $\boldsymbol{z}$=2, если игрок ***B*** выбрал $\boldsymbol{y}$= 1, и $\boldsymbol{z}$= 1, если игрок ***B*** выбрал $\boldsymbol{y=2}$.

Тем самым, у игрока ***A*** восемь чистых стратегий:

$\boldsymbol{A_1}$- (1, [1, 1]), $\boldsymbol{A_2}$- (1, [1, 2]), $\boldsymbol{A_3}$- (1, [2, 1]), $\boldsymbol{A_4}$- (1, [2, 2]),

A_5- (2, [1, 1]), A_6- (2, [1, 2]), A_7- (2, [2, 1]), A_8- (2, [2, 2]),

Покажем теперь, как в зависимости от применяемых стратегий определяются элементы таблицы выигрышей игрока ***A*.**

Пусть, например, игрок ***A*** выбрал стратегию A_2- (1, [1, 2]), а игрок ***B*** - стратегию B_2 — (2). Тогда x = 1, y = 2, а из [2, 1] вытекает, что z=1. Отсюда g(x,y, z)= g(1, 2, 1)=1.

По этой же схеме вычисляются и остальные элементы таблицы. В результате получаем:

		B_1	B_2
		(1)	(2)
A_1	(1, [1, 1])	g(1,1,1)	g(1,2,1)
A_2	(1, [1, 2])	g(1,1,1)	g(1,2,2)
A_3	(1, [2, 1])	g(1,1,2)	g(1,2,1)
A_4	(1, [2, 2])	g(1,1,2)	g(1,2,2)
A_5	(2, [1, 1])	g(2,1,1)	g(2,2,1)
A_6	(2, [1, 2])	g(2,1,1)	g(2,2,2)
A_7	(2, [2, 1])	g(2,1,2)	g(2,2,1)
A_8	(2, [2, 2])	g(2,1,2)	g(2,2,2)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -4 \\ 4 & 1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \\ 3 & 5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Оптимальные смешанные стратегии игроков и цена игры соответственно равны:

$$P = \left\{0, 0, \frac{2}{5}, 0, 0, \frac{3}{5}, 0, 0\right\},\ Q = \left\{\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right\},\ v = \frac{17}{5}.$$

Рассмотрим позиционную игру со случайным ходом.

Пример 9:

1) ***1-й ход*** делает игрок ***O***: он выбирает число ***x*** равное **«1»** с вероятностью 2/3 и **«2»** с вероятностью 2/3, из множества двух чисел {1,2}.

<u>если x=1</u>

2-й ход: игрок ***A*** выбирает число ***y*** из множества двух чисел {1,2}, зная результат случайного выбора на 1-ом ходе.

3-й ход: игрок ***B*** выбирает число ***z*** из множества двух чисел {1,2}, зная значение x, но не зная ***y***.

<u>Если x=2</u>

2-й ход: игрок ***B*** выбирает число ***y*** из множества двух чисел {1,2}, зная результат случайного выбора на 1-ом ходе.

3-й ход: игрок ***A*** выбирает число ***z*** из множества двух чисел {1,2}, зная значение ***x***, но не зная ***y***. Функция выигрыша сохранена:

g(1, 1, 1)=2	g(2, 1, 1)=-1
g(1, 1, 2)=-2	g(2, 1, 2)=3
g(1, 2, 1)=1	g(2, 2, 1)=0
g(1, 2, 2)=0	g(2, 2, 2)=-3

Графическое представление этой игры показано на рисунке 17. Чистую стратегию игрока ***A*** в данной игре можно описать упорядоченной парой [***y, z***] где ***y(y***=1,2) - выбор игрока ***A*** на 2-м ходе, если на случайном ходе выбрано ***x***=1, а ***z***(***z***=1,2) - выбор игрока ***A*** на 3-м ходе, если на 1-м ходе выбрано ***x***=2.

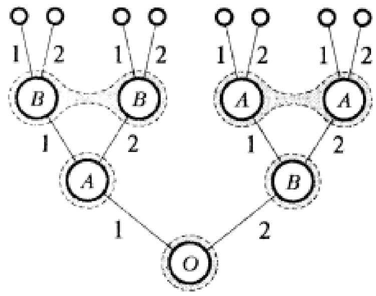

Рис. 17

Например, стратегия [1,2] означает, что на 2-м ходе игрок ***A*** выбирает ***y***=1, а на 3-м ходе – ***z***=2.

Тем самым, у игрока ***A*** четыре стратегии:

$\boldsymbol{A_1}$-[1, 1], $\boldsymbol{A_2}$-[1, 2], $\boldsymbol{A_3}$-[2, 1], $\boldsymbol{A_4}$-[2, 2].

У игрока ***B*** те же четыре стратегии:

$\boldsymbol{B_1}$-[1, 1], $\boldsymbol{B_2}$-[1, 2], $\boldsymbol{B_3}$-[2, 1], $\boldsymbol{B_4}$-[2, 2].

Покажем теперь, как находятся элементы матрицы выигрышей игрока ***A*.** Пусть, например, игрок ***A*** применяет стратегию $\boldsymbol{A_2}$-[1, 2], а игрок ***B***-стратегию $\boldsymbol{B_3}$-[2, 1].

Различаются два случая

$$1)\ \boldsymbol{x}=1 \quad \text{и} \quad 2)\ \boldsymbol{x}=2.$$

По условию при ***x***=1 игрок ***A*** имеет возможность сделать только 2-й ход (выбрать ***y*),** а игрок ***B*** - только 3-й (выбрать ***z*).** При ***x***=2 их возможности меняются местами: игроку ***B*** предоставлено право 2-го хода (выбрать ***y*),** а игроку ***A*** - 3-го (выбрать ***z*).**

Если ***x***=1, то стратегия $\boldsymbol{A_2}$ указывает игроку ***A*** при 2-м ходе взять ***y***=1, а стратегия $\boldsymbol{B_3}$ указывает игроку ***B*** при 3-м ходе взять ***z***=1. В результате

$$g(x, y, z)=g(1, 1, 1)=-2.$$

Если ***x*=2,** то стратегия $\boldsymbol{B_3}$ указывает игроку ***B*** при 2-м ходе взять ***y*=2**, а стратегия $\boldsymbol{A_2}$ указывает игроку ***A*** при 3-м ходе взять ***z***=2. В результате

$$g(x, y, z)=g(2, 2, 2)=5.$$

Поскольку первая и вторая альтернативы на 1-м ходе выбираются соответственно с вероятностями $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$ то и найденные выигрыши появляются с теми же вероятностями. Следовательно, математическое ожидание выигрыша игрока ***A*** при таких стратегиях рассчитывается так:

$$-2\times\frac{2}{3}+5\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Итак, при ***x*** =1

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	[1, 1]	g(1,1,1)	g(1,1,2)	g(1,1,1)	g(1,1,2)
A_2	[1, 2]	g(1,1,1)	g(1,1,2)	g(1,1,1)	g(1,1,2)
A_3	[2, 1]	g(1,2,1)	g(1,2,2)	g(1,2,1)	g(1,2,2)
A_4	[2, 2]	g(1,2,1)	g(1,2,2)	g(1,2,1)	g(1,2,2)

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{2}$

		B_1	B_2	B_3	B_4
		[1, 1]	[1, 2]	[2, 1]	[2, 2]
A_1	[1, 1]	g(2,1,1)	g(2,1,1)	g(2,2,1)	g(2,2,1)
A_2	[1, 2]	g(2,1,2)	g(2,1,2)	g(2,2,2)	g(2,2,2)
A_3	[2, 1]	g(2,1,1)	g(2,1,1)	g(2,2,1)	g(2,2,1)
A_4	[2, 2]	g(2,1,2)	g(2,1,2)	g(2,2,2)	g(2,2,2)

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Итоговая матрица:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 11 & -7 & 5 \\ -4 & 8 & 1 & 11 \\ 5 & -5 & -1 & -11 \\ 2 & -8 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Замечание. Графическое представление и функция выигрышей полностью определяют позиционную игру. В рассмотренных выше примерах мы пользовались одной и той же функцией и одним и тем же деревом. Отличие было только в маркировке вершин дерева и информационных множествах. При построении последних необходимо соблюдать два правила:

1. в одно информационное множество могут входить позиции только одного игрока;
2. цепь, определяющая партию игры, может иметь с информационным множеством не более одной общей позиции (то есть при разыгрывании партии игрок не может дважды попасть в одно и то же информационное множество).

Задание для самостоятельной работы

Для игр дайте графическое представление, позиционной игры со следующей функцией выигрышей g(x, y, z):

g(1, 1, 1)=2 g(2, 1, 1)=-1

g(1, 1, 2)=-2 g(2, 1, 2)=3

g(1, 2, 1)=1 g(2, 2, 1)=0

g(1, 2, 2)=0 g(2, 2, 2)=-3

Определите количество стратегий игрока А и В

1) 1-й ход делает игрок А: он выбирает число ***x*** из множества двух чисел $\{1,2\}$.

   2-й ход делает игрок В: не зная о выборе игрока А на 1-ом ходе, он выбирает число ***y*** из множества двух чисел $\{1,2\}$.

   3-й ход делает игрок А: он выбирает число ***z*** из множества двух чисел $\{1,2\}$, не зная значение ***y***, выбранное игроком В на 2-м ходе, и не помня собственного выбора ***x*** на 1-м ходе.

Ответ: $P=\left\{0,\frac{9}{13},0,\frac{4}{13}\right\},\quad Q=\left\{\frac{5}{13},\frac{8}{13}\right\},\quad v=\frac{20}{13}$

2) 1-й ход делает игрок А: он выбирает число ***x*** из множества двух чисел $\{1,2\}$.

   2-й ход делает игрок В: зная о выборе игрока А на 1-ом ходе, он выбирает число ***y*** из множества двух чисел $\{1,2\}$.

   3-й ход делает игрок А: он выбирает число ***z*** из множества двух чисел $\{1,2\}$, не зная значение ***y***, выбранное игроком В на 2-м ходе, но помня собственный выбор x на 1-м ходе.

3) 1-й ход производится случайно: игрок ***О*** выбирает число ***x***, равное 1, с вероятностью 0,5, и равное 2 — с такой же вероятностью 0,5.

   2-й ход делает игрок ***А:*** он выбирает число ***y*** из множества двух чисел $\{1, 2\}$, не зная результатов случайного выбора на 1-м ходе.

   3-й ход делает игрок ***В:*** он выбирает число ***z*** из множества двух чисел $\{1,2\}$, зная о том, какое именно число ***x*** случайно выбрано игроком О на 1-м ходе и не зная выбора ***y*** игрока ***А*** на 2-м ходе.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В задачах теории игр, рассматривая операции, проводимые в условиях неопределенности, мы связывали эту неопределенность с неизвестным для нас поведением противника и исходили из того, что этот противник является «разумным и злонамеренным» и предпринимает те и именно те действия, которые для нас наименее выгодны.

Однако при исследовании операций приходится встречаться не только с таким видом неопределенности. Очень часто неопределенность, сопровождающая операцию, связана не с сознательным противодействием противника, а просто с нашей недостаточной осведомленностью об условиях, в которых будет проводиться операция. Так, например, могут быть заранее неизвестны: погода в некотором районе, покупательский спрос на определенного вида продукцию, объем перевозок, который придется выполнять железной дороге, и т. д.

Во всех такого рода случаях условия выполнения операции зависят не от сознательно противодействующего нам противника, а от объективной действительности, которую в теории решений принято называть «природой». Соответствующие ситуации часто называются «играми с природой». «Природа» в теории статистических решений рассматривается как некая незаинтересованная инстанция, «поведение» которой неизвестно, но, во всяком случае, не содержит элемента сознательного противодействия нашим планам.

Рассмотрим такого рода ситуацию. Пусть у нас (сторона А) имеется m возможных стратегий: A_1 $A_2,\ldots,A_m$ что касается обстановки, то о ней можно сделать n предположений $П_1$, $П_2,\ldots,П_n$ - рассмотрим их как «стратегии природы». Наш выигрыш a_{ij} при каждой паре стратегий A_i, $П_j$ задан матрицей **(табл. 1):**

Таблица 1

A \ П	$П_1$	$П_2$	...	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	A_{21}	A_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Требуется выбрать такую стратегию игрока A (чистую или смешанную), которая является предпочтительной (более выгодной) по сравнению с другими.

С первого взгляда может показаться, что поставленная задача проще игровой, так как она не содержит противодействия. Действительно, принимающему решение в игре с природой легче в том отношении, что он, скорее всего, получит в этой игре больший выигрыш, чем в игре против сознательного противника; однако ему труднее принять обоснованное решение, которое даст хороший выигрыш. Дело в том, что в игровой конфликтной ситуации предположение о диаметральной противоположности интересов противника нашим в некотором смысле как бы снимает неопределенность. Если же такого предположения сделать нельзя, неопределенность сказывается в гораздо более сильной степени.

Наиболее простым случаем выбора решения в условиях неопределенности является случай, когда какая-то из стратегий игрока *А* превосходит другие («доминирует» над ними) как, например, показано в табл. 2.

Таблица 2

А \ П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	2	3	5
A_2	7	4	4	3
A_3	3	1	4	1
A_4	7	4	2	2

В этой таблице выигрыш при стратегии A_2 при любом состоянии природы *Пj* не меньше, чем выигрыш при любой другой стратегии; значит, стратегия A_2 является предпочтительной («доминирует» над всеми другими), и ею рекомендуется пользоваться.

Если даже в матрице нет доминирующей стратегии, все же следует просмотреть ее под углом зрения стратегий, заведомо невыгодных для игрока, худших, чем по крайней мере одна из остальных, или дублирующих, которые надо отбросить. Например, в табл. 3 можно отбросить стратегии A_1, A_2, заведомо невыгодные по сравнению с A_4, и стратегию A_5 — по сравнению с A_3, в результате чего матрица сведется к матрице 2x5 (см. табл. 4).

Таблица 3

$A \setminus П$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	5	3	4	2	1
A_2	5	3	2	1	1
A_3	1	2	5	4	3
A_4	7	6	7	3	1
A_5	1	2	3	4	3

Таблица 4

$A \setminus П$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_3	1	2	5	4	3
A_4	7	6	7	3	1

Обратим внимание на следующее: в игре против разумного противника мы бы отбросили за него стратегию $П_3$ как невыгодную по сравнению с $П_4$, а $П_4$ — по сравнению с $П_5$; в «игре против природы» этого делать нельзя, так как «природа» не выбирает свою стратегию (состояние) так, чтобы как можно больше нам «навредить».

В дальнейшем мы будет предполагать, что анализ матрицы и отбрасывание заведомо невыгодных и дублирующих стратегий уже произведены.

Чем же нам руководствоваться в деле принятия решения в ситуации неопределенности, если ни одна стратегия не доминирует над другими? Ясно, что мы должны исходить из матрицы выигрышей (a_{ij}). Однако иногда картина ситуации, которую дает матрица выигрышей, содержит своего рода «искажения».

Поясним, что мы имеем в виду. Предположим, что выигрыш при стратегии A_i и состоянии природы $П_j$, больше, чем при стратегии A_k и состоянии природы $П_l$: $a_{ij} > a_{kl}$.

Но первый выигрыш может быть больше второго не за счет того, что мы выбрали более удачную стратегию, а просто за счет того, что состояние природы $П_j$ «выгоднее» для нас, чем состояние $П_l$. Например, для какой-нибудь экономической операции состояние «отсутствие стихийных бедствий» вообще более благоприятно, чем состояния «наводнение», «землетрясение» и т. п. Представляется желательным ввести такие показатели, которые не просто давали бы выигрыш в каждой ситуации, а описывали бы «удачность» или «неудачность» применения данной стратегии в данной ситуации, с учетом того, насколько вообще эта ситуация благоприятна для нас.

С этой целью в теории решений вводится важное понятие «риска».

Риском игрока при пользовании стратегией A_i в условиях $П_j$ - называется разность между выигрышем, который он получил бы, если бы знал $Пj$, и выигрыше, который он получит в тех же условиях, применяя стратегию A_i.

Обозначим r_{ij} риск игрока при его стратегии A_i в условиях $П_j$ -. Выразим риск r_{ij} через элементы матрицы выигрышей (a_{ij}). Очевидно, если бы игрок знал заранее состояние природы (условия) $П_j$, он выбрал бы ту стратегию, которой соответствует максимальный выигрыш в данном столбце, короче, «максимум столбца» —- обозначим его β_j. Согласно определению риска,

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \qquad (14)$$

где $\beta_j = \max a_{ij}$.

Из этого определения следует, что риск не может быть отрицательным: $r_{ij} \geq 0$

При вычислении риска, соответствующего каждой стратегии в данных условиях, учитывается общая благоприятность или не благоприятность для нас данного состояния природы: величина β_j служит как бы мерилом благоприятности состояния.

Матрица рисков (r_{ij}) дает зачастую более наглядную картину неопределенной ситуации, чем матрица выигрышей (a_{ij}).

Пример **10.** Планируется операция в заранее неясных условиях, касающихся, например, рыночной конъюнктуры. Относительно этих условий можно сделать различные предположения: $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$.

Выгодность операции (ожидаемая прибыль) при наших стратегиях (A_i) для различных условий ($Пj$) задана матрицей выигрышей (a_{ij}) (табл. 5).

Таблица 5

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

Построить матрицу рисков (r_{ij}).

Решение. Каждый элемент матрицы вычитаем из максимального в данном столбце значения (в первом столбце это $\beta_1 = 4$, в остальных $\beta_2 = 8$, $\beta_3 = 6$, $\beta_4 = 9$. Получаем матрицу рисков (табл. 6).

Таблица 6

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	4	1	0
A_2	1	0	2	6
A_3	0	2	0	7

При взгляде на эту матрицу нам становятся яснее некоторые черты данной «игры с природой». Так, в матрице с выигрышей (a_{ij}) (см. табл. 5) во второй строке первый и последний элементы были равны друг другу: $a_{21} = a_{24} = 3$. Однако эти выигрыши совсем неравноценны друг другу в смысле того, насколько удачно выбрана стратегия: при состоянии природы $П_1$ мы могли выиграть самое большее всего 4, и выбор стратегии A_2 почти совершенно хорош; а вот при состоянии $П_4$ мы могли, выбрав стратегию A_1, выиграть на целых 6 единиц больше, т. е. выбор стратегии A_2 очень плох. Это отражается элементами матрицы рисков: $r_{21} = 1$, $r_{24} = 6$.

То, что мы делали до сих пор — всего лишь различные способы группировки исходных данных; что касается критериев для принятия решений, мы их рассмотрим в следующем параграфе.

1. Критерий, основанный на известных вероятностях условий

Наиболее просто решается задача о выборе решения в условиях неопределенности, когда нам хотя и неизвестны условия выполнения операции (состояние природы) $П_1, П_2, \ldots П_j$, но известны их вероятности: $p(П_1)=p_1$, $p(П_2)=p_2, \ldots p(П_n)=p_n$, . $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$

В этом случае в качестве показателя эффективности, который мы стремимся обратить в максимум, естественно взять *среднее значение* или *математическое ожидание* выигрыша с учетом вероятностей всех возможных условий. Обозначим это среднее значение для *i-й* стратегии игрока через $\bar{a}_i$:

$$\bar{a}_i = p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \ldots + p_n a_{in} = \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij} \qquad (15)$$

Очевидно, $\bar{a}_i$ есть не что иное, как *взвешенное среднее* выигрышей *i-й* строки, взятых с весами $p_1, p_2, \quad p_n$. В качестве оптимальной стратегии естественно выбрать ту из стратегий $A^* = A_i$, для которой величина a_t обращается в максимум.

С помощью такого приема задача о выборе решения в условиях неопределенности превращается в задачу о выборе решения в условиях определенности, только принятое решение является оптимальным не в каждом отдельном случае, а в среднем.

Пример 11. Планируется операция в заранее неизвестных метеорологических условиях; варианты этих условий; $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$. Согласно материалам метеосводок за много лет частоты (вероятности) этих вариантов равны соответственно:

p_1=0,1, p_2=0.2, p_3=0,5, p_4=0,2.

Возможные варианты организации операции в различных метеоусловиях приносят различную выгоду Значения «дохода» для каждого решения в разных условиях приведены в табл. 7

Таблица 7

	П₁	***П₂***	***П₃***	***П₄***	$\bar{a}_i$
$\boldsymbol{A_1}$	1	4	5	9	5,2*
$\boldsymbol{A_2}$	3	8	4	3	4,5
$\boldsymbol{A_3}$	4	6	6	2	5,0
$\boldsymbol{p_i}$	0,1	0,2	0,5	0,2	

В последней строке даны вероятности условий. Средние выигрыши $\bar{a}_i$ приведены в последнем столбце. Из него видно, что оптимальной стратегией игрока является его стратегия, дающая средний выигрыш $\bar{a}_1 = 5,2^*$.

При выборе оптимальной стратегии в неизвестных условиях с известными вероятностями можно пользоваться не только средним выигрышем $\bar{a}_i$, но и *средним риском:* $\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} p_j r_{ij}$, который, разумеется, нужно обратить не в максимум, а в минимум.

Покажем, что стратегия, максимизирующая средний выигрыш $\bar{a}_i$ совпадает со стратегией, минимизирующей средний риск $\bar{r}_j$. Вычислим оба эти показателя и сложим их:

$$\bar{a}_i + \bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\beta_j - a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} p_j \beta_j - \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} p_j \beta_j \quad (16)$$

Эта сумма (среднее взвешенное значение максимумов столбцов) для данной матрицы есть величина постоянная. Обозначим ее *C:* $\sum_{j=1}^{n} p_j \beta_j = C.$

Тогда $\overline{a}_i + \overline{r}_i = C$

откуда средний риск равен

$$\overline{r}_i = C - \overline{a}_i \tag{17}$$

Очевидно, эта величина обращается в минимум тогда же, когда a_i — в максимум, следовательно, стратегия, выбранная из условий минимального среднего риска, совпадает со стратегией, выбранной из условий максимального среднего выигрыша.

Заметим, что в случае, когда известны вероятности состояний природы $p_1,$ $p_2,$ p_n, при решении игры с природой всегда можно обойтись одними чистыми стратегиями, не применяя смешанных. Действительно, если мы будем применять какую-то смешанную стратегию $S_A=(p_1, p_2, \; p_m)$, т. е. стратегию A_1 с вероятностью p_1, стратегию A_2 с вероятностью p_2 и т.д., то средний выигрыш, осредненный и по условиям (состояниям природы) и по нашим стратегиям, будет: $\overline{\overline{a}} = p_1\overline{a}_1 + p_2\overline{a}_2 + \ldots + p_m\overline{a}_m$

Это — взвешенное среднее выигрышей $\overline{a}_i$, соответствующих чистым стратегиям. Но ясно, что любое среднее не может превосходить максимальной из усредняемых величин: $\overline{\overline{a}} \le \max\limits_i \overline{a}_i$

Поэтому применение смешанной стратегии S_A с любыми вероятностями $p_1,$ $p_2,$ ... не может быть выгоднее для игрока, чем применение чистой стратегии A^*.

Вероятности условий (состояний природы) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ могут быть определены из статистических данных, связанных с многократным выполнением подобных операций или просто с проведением наблюдений над состояниями природы. Например, если железной дороге за данный промежуток времени предстоит выполнить не вполне известный объем перевозок, то данные о распределении условий могут быть взяты из опыта прошлых лет.

Если, как в предыдущем примере, успех операции зависит от метеоусловий, данные о них могут быть взяты из статистики метеосводок.

Однако часто встречаются случаи, когда, приступая к выполнению операции, мы не имеем представления о вероятностях состояний природы; все наши сведения сводятся к перечню вариантов состояний, а оценить их вероятности мы не можем. Так, например, вряд ли нам удастся разумно оценить вероятность того, что в течение ближайших *k* лет будет предложено и реализовано важное техническое изобретение.

Разумеется, в подобных случаях вероятности условий (состояний природы) могут быть оценены субъективно: некоторые из них представляются нам более, а другие — менее правдоподобными. Для того чтобы субъективные представления о большей или меньшей «правдоподобности» той или другой гипотезы превратить в численные оценки, могут применяться различные технические приемы. Так, если нет возможности предпочесть ни одной гипотезы, если они все для нас равноправны, то естественно назначить их вероятности равными друг другу: $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$.

Это — ***«принцип недостаточного основания» Лапласа.*** Другой часто встречающийся случай — когда известны представление о том, какие условия более вероятны, а какие — менее, т. е. моно расположить имеющиеся гипотезы в порядке убывания их правдоподобности: всего правдоподобнее первая гипотеза **(**$П_1$**),** затем вторая ($П_2$) и т. д.; менее всего правдоподобна n-я гипотеза ($П_n$). Однако, насколько одна из них вероятнее другой —не известно. В этом случае можно, например, назначить вероятности гипотез пропорциональными членам убывающей арифметической прогрессии:

$$p_1 : p_1 : \ldots : p_n = n : n-1 : \ldots : 1,$$

или, учитывая, что $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$: $p_i = \dfrac{2(n-i+1)}{n(n+1)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

Иногда удается, исходя из опыта и здравого смысла, оценить и более тонкие различия между степенями правдоподобия гипотез.

Подобные методы субъективной оценки «вероятности-правдоподобности» разных гипотез о состоянии природы могут иногда помочь при выборе решения. Однако нельзя забывать, что «оптимальное решение», выбранное на основе субъективных вероятностей, неизбежно окажется тоже субъективным.

Выше мы осветили вопрос о выборе решения на основе объективно-вычисленных или субъективно назначенных вероятностей состояний природы. Этот подход в теории решений — не единственный. Кроме него существуют еще несколько «критериев» или подходов к выбору оптимального решения в условиях неопределенности. Остановимся на некоторых из них.

2. Максиминный критерий Вальда

Согласно этому критерию в качестве оптимальной выбирается та стратегия игрока *А,* при которой минимальный выигрыш максимален, т. е. стратегия, гарантирующая при любых условиях выигрыш, не меньший, чем максимин: $W = \max_i \min_j a_{ij}$.

Если руководствоваться этим критерием, надо всегда ориентироваться на худшие условия и выбирать ту стратегию, для которой в худших условиях выигрыш максимален. Пользуясь таким критерием в играх с природой, мы как бы ставим взамен этой безличной и незаинтересованной инстанции активного и злонамеренного противника. Очевидно, такой подход может быть продиктован только *крайним пессимизмом* в оценке обстановки.

3. Критерий минимаксного риска Сэвиджа

Этот критерий рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту.стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален): $S = \min_i \max_j a_{ij}$.

Сущность этого критерия в том, чтобы любыми путями избежать большого риска при принятии решения.

Критерий Сэвиджа, так же как п критерий Вальда — это критерий крайнего пессимизма, но только пессимизм здесь понимается по-другому: худшим объявляется не минимальный выигрыш, а максимальная потеря выигрыша по сравнению с тем, чего можно было бы достичь в данных условиях (максимальный риск).

4. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

Этот критерий рекомендует в условиях неопределенности при выборе решения не руководствоваться ни крайним пессимизмом ни крайним, легкомысленным оптимизмом Критерий Гурвица имеет вид:

$$H = \max_i \left\{ \varepsilon \min_j \alpha_{ij} + \varepsilon \max_j \left(1 - \alpha_{ij}\right) \right\},$$

где ε - коэффициент, выбираемый между нулем и единицей.

Проанализируем структуру выражения. При ε=1 критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда, а при ε = 0 — в критерий «крайнего оптимизма», рекомендующий выбирать ту стратегию, для которой в наилучших условиях выигрыш максимален. При 0 < ε < 1 получается нечто среднее между крайним пессимизмом и крайним оптимизмом (коэффициент ε выражает как бы «меру пессимизма» исследователя). Этот коэффициент выбирается из субъективных соображений — чем опаснее ситуация, чем больше мы хотим в ней «подстраховаться», тем ближе к единице выбирается ε**.**

Несмотря на то, что выбор критерия, как и выбор параметра в критерии Гурвица, являются субъективным, все же может оказаться полезным просмотреть ситуацию с точки зрения этих критериев. Если рекомендации, вытекающие из различных критериев, совпадают — тем лучше, можно смело выбирать рекомендуемое ими решение. Если же, как это часто бывает, рекомендации противоречат друг другу — всегда имеет смысл задуматься над этим и принять окончательное решение с учетом его сильных и слабых сторон.

Анализ матрицы игры с природой под углом зрения разных критериев часто дает лучшее представление о ситуации, о достоинствах и недостатках каждого решения, чем непосредственное рассмотрение матрицы, особенно, когда ее размеры велики.

Пример 12. Рассматривается игра с природой 4х3 с четырьмя стратегиями игрока: A_1, A_2, A_3, A_4 и тремя вариантами условий (состояний природы): $П_1$, $П_2$, $П_3$. Матрица выигрышей дана в табл. 8.

Таблица 8

A \ П	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	0,20	0,30	0,15
A_2	0,75	0,20	0,35
A_3	0,25	0,80	**0**,25
A_4	0,85	0,05	0,45

Найти оптимальное решение (стратегию), пользуясь критериями Вальда, Сэвиджа и критерием Гурвица при $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 0,6.

Решение.

1. *Критерий Вальда.*

В каждой строке матрицы определяют наименьший выигрыш α_j (табл. 9). Из величин полученного дополнительного столбца берут максимальное значение $\alpha_j = 0,\ 25$, следовательно, по критерию Вальда оптимальной является стратегия A_3.

Таблица 9

A \ П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	α_j
A_1	0,20	0,30	0,15	0,15
A_2	0,75	0,20	0,35	0,20
A_3	0,25	0,80	0,25	**0,25***
A_4	0,85	0,05	0,45	0,05

2. *Критерий Сэвиджа.*

Строим матрицу рисков и помещаем в правом добавочном столбце максимальный риск в каждой строке γ_i (табл. 10).

Таблица 10

А \ П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	γ_i
A_1	0,65	0,50	0,30	0,65
A_2	0,10	0,60	0,10	**0,60***
A_3	0,60	0	**0**,20	**0,60***
A_4	0	0,75	0	0,75

Минимальным из значений γ_i является 0,60 (отмечено звездочкой); следовательно, по критерию Сэвиджа, оптимальной является любая из стратегий A_2, A_3.

3. *Критерий Гурвица* (ε=0,6).

Записываем в правых трех столбцах матрицы (табл. 11) «пессимистическую» оценку выигрыша α_i, «оптимистическую» ω_i и их среднее взвешенное по формуле: $h_i = 0{,}6\alpha_i + 0{,}4\ \omega_i$,

Максимальное значение h_i (отмечено звездочкой) соответствует стратегии A_3. Следовательно, по критерию Гурвица с легким перевесом в сторону пессимизма (ε = 0,6) оптимальной стратегией является A_3.

Таблица 11

А \ П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	α_i	ω_i	h_i
A_1	0,20	0,30	0,15	0,15	0,30	0,21
A_2	0,75	0,20	0,35	0,20	0,75	0,42
A_3	0,25	0,80	0,25	0,25	0,80	**0,47***
A_4	0,85	0,05	0,45	0,05	0,85	0,37

Таким образом, все три критерия согласно говорят в пользу стратегии A_3, которую мы имеем все основания выбрать.

В заключение заметим следующее. Все три критерия — Вальда, Сэвиджа и Гурвица — были сформулированы для чистых стратегий; но совершенно таким же образом можно сформировать их и для смешанных стратегий. Например, согласно критерию Сэвиджа следует выбирать ту смешанную стратегию: $S_A=(p_i, p_2, \ldots, p_m)$, для которой достигается

$$\min_{(p_1, p_2, \ldots p_m)} \max_j \left(p_1 r_{1j} + p_2 r_{2j} + \ldots + p_m r_{mj} \right)$$

(минимум берется по всем $\boldsymbol{p_1}$ $\boldsymbol{p_2}$, ... ,$\boldsymbol{p_m}$ > 0, $\boldsymbol{p_1+p_2+\ldots+p_m} = \mathbf{1}$**).** Найти этот минимакс (или максимин в критерии Вальда) можно обычными методами линейного программирования.

Могут быть случаи, когда применение смешанных стратегий при пользовании критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица даст преимущество по сравнению с тем решением, где применяются одни чистые стратегии, однако будем рассматривать эти критерии только для чистых стратегий. Одна из причин этого — в том, что мы хотим избежать сложных вычислений, когда их результат можем быть сведен на нет недостатком сведений о ситуации (незнание вероятностей условий). Другая, более важная причина — в том, что основное содержание теории статистических решений (мы коснемся его в следующем параграфе) — это планирование получения и использования дополнительной информации о состоянии природы, которую можно добыть путем эксперимента. Исследования показывают, что в типичных случаях, когда речь идет о получении сколько-нибудь значительного количества дополнительной информации, критерии, не пользующиеся вероятностями состояний (Вальда и др.), становятся практически равносильными критерию, основанному на вероятностях состояний. Но мы знаем, что при пользовании таким критерием применение смешанных стратегий не имеет смысла; стало быть, если мы можем получить сколько-нибудь много дополнительной информации, применение смешанных стратегий теряет смысл (каким бы из критериев выбора решения мы ни пользовались). Если же мы не можем, производя эксперименты, добывать новую информацию, то различные критерии могут давать противоречащие друг другу.

5. Планирование эксперимента в условиях неопределенности

В этом параграфе рассмотрим очень важного в теории статистических решений вопроса о том, как нам могут помочь в принятии решения эксперименты, предпринятые с целью выяснения действительной обстановки? Этот вопрос является центральным в теории, как показывает само название: ведь слово «статистический» как раз и употребляется, когда речь идет о выводах из экспериментов, об их планировании и обработке.

Соответствующую теорию можно развивать как исходя из известных вероятностей состояний природы, так и из критериев, подобных критерию Вальда; мы будем здесь рассматривать теорию, исходящую из известных вероятностей состояний природы, как более простую.

Рассмотрим следующий вопрос. Нам предстоит предпринять некоторую операцию в недостаточно выясненных условиях. Имеет ли смысл для уточнения условий в нашей неопределенной ситуации предпринимать некоторый эксперимент? Естественно, этот вопрос возникает только тогда, когда затраты на эксперимент существенны и сравнимы с тем увеличением выигрыша, которое мы можем получить, узнав обстановку более точно. Если же затраты на эксперимент пренебрежимо малы, ответ на этот вопрос всегда положителен.

Рассмотрим сначала случай «идеального» эксперимента Q, приводящего к совершенно точному знанию того состояния природы $П_j$, которое имеет место в данной ситуации. Пусть задана матрица выигрышей a_{ij} $(i =1,..,m;$ $\boldsymbol{j}$ $=1,..,n),$ а, кроме того, известны вероятности $p_1, p_2, ..., p_n$ различных условий $П_1, П_2, ..., П_n$. Пусть затраты на проведение эксперимента Q равны C. Сравним наш средний выигрыш без проведения эксперимента C и средний выигрыш с проведением этого эксперимента.

Если не проводить дополнительно никакого эксперимента, то нужно в качестве решения выбрать ту стратегию $A^*=A_i$ для которой достигается максимальный средний выигрыш:

$$\max_i \{p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \ldots + p_n a_{in}\}, \qquad (18)$$

Это и будет наш выигрыш без проведения эксперимента C.

Теперь предположим, что мы произвели эксперимент C и выяснили, какое из состояний $П_1, П_2, \ldots, П_n$ является действительным состоянием природы. Если это оказалось $П_1$ то мы должны применять ту стратегию A_{i1}, для которой достигается

$$\max_i a_{i1} = \beta_1$$

и выигрыш будет равен β_1; если действительное состояние природы оказалось $П_2$, выигрыш будет β_2, и т. д. Вообще, при действительном состоянии природы $П_j$ выигрыш будет равен максимальному выигрышу в *j-м* столбце: $\max_i a_{ij} = \beta_j$

Пусть необходимо заранее решить, надо ли производить эксперимент Q или нет при условии, что неизвестно, какое из состояний $П_j$ имеет место и каков будет выигрыш β_j. Для этого усредним этот выигрыш с весами, равными вероятностям p_j:

$$p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + \ldots + p_n\beta_n \qquad (19)$$

С учетом стоимости эксперимента (которую нужно вычесть из выигрыша) наш средний выигрыш с применением идеального эксперимента Q равняется:

$$p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + \ldots + p_n\beta_n - C \qquad (20)$$

Итак, необходимо проводить эксперимент, если величина (20) больше, чем (19); если же, наоборот, величина (19) больше, то эксперимент Q не нужен.

Можно несколько видоизменить это правило, сделав его более простым. Мы видели, что эксперимент Q нам полезен (т. е. «по средствам»), если:

$$\max_i \left\{ p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \ldots + p_n a_{in} \right\} < p_1 \beta_1 + p_2 \beta_2 + \ldots + \beta_n a_n - C \qquad (21)$$

Перенесем С в левую часть, а «максимум» из левой части в правую, переменив знак перед суммой и заменяя «максимум» на «минимум»; условие (21) перепишется в виде:

$$C < \min_i \left\{ p_1 \left(\beta_1 - \alpha_{i1} \right) + p_2 \left(\beta_2 - \alpha_{i2} \right) + \ldots + p_n \left(\beta_n - \alpha_{in} \right) \right\}$$

или, короче

$$C < \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\beta_j - \alpha_{ij} \right) \right\}. \qquad (22)$$

Но β_j-α_{ij} есть не что иное, как риск r_{ij} а сумма в правой части — средний ожидаемый риск: $\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} p_j r_{ij}$.

Поэтому правило решения о выполнении эксперимента Q приобретает следующий вид.

Эксперимент Q нужно проводить, если затраты на его осуществление меньше минимального среднего риска:

$$C < \min_i \overline{r_i} \qquad (23)$$

В противном случае следует воздержаться от эксперимента, и применить ту стратегию А, для которой достигается этот минимум среднего риска.*

Пример 12.

Рассматривается игра с природой 3х4, условия которой приведены в табл. 12.

Таблица 12

А \ П	***П₁***	***П₂***	***П₃***	***П₄***
$\boldsymbol{A_1}$	1	4	5	9
$\boldsymbol{A_2}$	3	8	4	3
$\boldsymbol{A_3}$	4	6	6	2

Вероятности состояний природы $П_1$ $П_2$, $П_3$, $П_4$, равны соответственно:

p_1=0,1; p_2=0,2; p_3=0,5; p_4=0,2;

Определить, является ли целесообразным «идеальный» эксперимент, стоимость которого (в тех же единицах, в которых выражен выигрыш) равна 2.

Решение. Переходим от матрицы выигрышей к матрице рисков (табл. 13).

Таблица 13

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$\overline{r}_i$
A_1	3	4	1	0	**1,6***
A_2	1	0	2	6	2,3
A_3	0	2	0	7	1,8

В правом дополнительном столбце проставлены значения среднего риска. Минимальное из этих значений равно 1,6; следовательно, проведение эксперимента со стоимостью 2 единицы нецелесообразно.

Выше мы рассмотрели случай «идеального» эксперимента Q, в результате которого обстановка полностью выясняется.

Теперь рассмотрим случай не идеального эксперимента Q, который не приводит к выяснению в точности состояния природы $П_j$, а лишь дает какие-то косвенные свидетельства в пользу тех или других состояний. В наиболее общем виде мы можем предположить, что эксперимент Q приводит к появлению одного из k несовместных событий B_1, $B_2,...,B_k$, причем вероятности этих событий (исходов эксперимента) зависят от условий, в которых он проводится: $П_1$ $П_2$,...$П_n$. Обозначим условную вероятность появления события B, в условиях $П$, через

$$p(B_l/П_j), \ (j= 1, 2,\ldots,n, \ l= 1, 2,\ldots,k)$$

и будем считать, что все эти условные вероятности нам известны.

После осуществления эксперимента Q, давшего исход B_j надо пересмотреть вероятности условий: состояния природы $П_1$ $П_2$, ... $П_n$ будут характеризоваться не прежними (априорными) вероятностями p_1, p_2, ... p_n. а новыми, «апостериорными» вероятностями состояний: $\tilde{p}_{1l}, \tilde{p}_{2l}, \dots, \tilde{p}_{nl}$, т. е. условными вероятностями состояний $П_1$ $П_2$, ... $П_n$ при условии, что эксперимент дал результат B_l. Эти апостериорные вероятности подсчитываются по известной формуле Бейеса:

$$\tilde{p}_{nl} = \frac{p_j p\left(B_l / П_j\right)}{\sum_{j=1}^{n} p_j p\left(B_l / П_j\right)}, \quad \left(j = 1, \dots, n\right) \qquad (24)$$

(с этим как раз и связано то, что соответствующий подход к принятию решения в ситуации неопределенности называется *бейесовским*).

Поскольку априорные вероятности состояний природы p_1, p_2, ... p_n заменяются новыми, апостериорными $\tilde{p}_{1l}, \tilde{p}_{2l}, \dots, \tilde{p}_{nl}$ то, значит, и оптимальная стратегия A^* в общем случае заменится новой оптимальной стратегией $\tilde{A}_l^*$ вычисленной с учетом апостериорных вероятностей (при условии события B_l).

Пример 13. В условиях примера 12 с априорными вероятностями условий p_1=0,1; p_2=0,2; p_3=0,5; p_4=0,2;производится эксперимент Q, служащий для уточнения обстановки. Этот эксперимент, вообще говоря, может иметь три возможных исхода: B_1, B_2, B_3.

Условные вероятности этих исходов $p(B_l/П_j)$ для разных состояний природы $П_1$ $П_2$, $П_3$, $П_4$ приведены в матрице условных вероятностей (табл. 15).

Таблица 15

B_l \ $П_j$	***П₁***	***П₂***	***П₃***	***П₄***
$\boldsymbol{B_1}$	0,2	0,9	0,4	0,3
$\boldsymbol{B_2}$	0,1	0,1	0,5	0,3
$\boldsymbol{B_3}$	0,7	0	0,1	0,4

Известно, что в эксперименте Q имел место исход B_1. Вычислить апостериорные вероятности $\tilde{p}_{j1}$. Указать новую оптимальную стратегию A_1*.

Решение. По формуле (24) имеем:

$$\tilde{p}_{11} = \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,1 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,3} \approx 0,043$$

$$\tilde{p}_{11} = \frac{0,2 \cdot 0,9}{0,46} \approx 0,392; \quad \tilde{p}_{11} = \frac{0,2}{0,46} \approx 0,435; \quad \tilde{p}_{11} = \frac{0,06}{0,46} \approx 0,130.$$

Таблица 16

Ai \ Пj	***П₁***	***П₂***	***П₃***	***П₄***	$\tilde{\tilde{a}}_i^{(1)}$
A_1	1	4	5	9	4,96
A_2*	3	8	4	3	5,20*
A_3	4	6	6	2	5,09
$\tilde{p}_{j1}$	0,043	0,392	0,436	0,130	

Вычислим средние выигрыши $\tilde{\tilde{a}}_i^{(1)}$ при каждой стратегии с учетом найденных апостериорных вероятностей (табл. 16). В последней строке таблицы помещены апостериорные вероятности, в правом, дополнительном столбце — средние выигрыши при новых значениях вероятностей состояний, вычисленные по формуле

$$\tilde{\tilde{a}}_i^{(1)} = \tilde{p}_{11}a_{i1} + \tilde{p}_{21}a_{i2} + \tilde{p}_{31}a_{i3} + \tilde{p}_{41}a_{i4}$$

Значения $\tilde{p}_{j1}$ даны в нижней строке таблицы.

Таким образом, с учетом результата B_1 опыта Q, оптимальной стратегией будет уже не A_1, а A_2.

Конечно, для того чтобы заранее решить, стоит ли нам проводить эксперимент Q или нет, нужно заранее произвести подобные расчеты не только для одного исхода B_1 но и для всех остальных. Продолжим рассмотрение примеров.

Пример 14. В условиях примеров 1 и 2 выработать правило решения. которое указывало бы, при каком исходе эксперимента какую стратегию выбирать. Выяснить, насколько средний выигрыш при выполнении эксперимента Q больше среднего выигрыша без выполнения этого эксперимента

Решение. Вычислим остальные апостериорные вероятности **всех состояний** природы $\tilde{p}_{j2}, \tilde{p}_{j3}$ $(j = 1,2,3,4)$ при условии, что эксперимент дал исходы B_2, B_3 соответственно Вычисления будем производить по той же формуле (24):

$$\tilde{p}_{12} = \frac{0,1\cdot 0,1}{0,1\cdot 0,1+0,2\cdot 0,1+0,5\cdot 0,5+0,2\cdot 0,3} \approx 0,029$$

$$\tilde{p}_{22} = \frac{0,02}{0,34} \approx 0,059; \quad \tilde{p}_{32} = \frac{0,25}{0,34} \approx 0,735; \quad \tilde{p}_{42} = \frac{0,06}{0,34} \approx 0,177;$$

$$\tilde{p}_{13} = \frac{0,1\cdot 0,7}{0,1\cdot 0,7+0,2\cdot 0+0,5\cdot 0,1+0,2\cdot 0,4} \approx 0,35$$

$$\tilde{p}_{13} = \frac{0}{0,2} \approx 0; \quad \tilde{p}_{33} = \frac{0,05}{0,2} \approx 0,25; \quad \tilde{p}_{43} = \frac{0,08}{0,2} \approx 0,4;$$

Сведем все новые (апостериорные) вероятности состояний природы при каждом из исходов B_1, B_2, B_3, в табл. 17.

Таблица 17

B_l \ $П_j$	***П₁***	***П₂***	***П₃***	***П₄***
$\boldsymbol{B_1}$	0,043	0,392	0,435	0,130
$\boldsymbol{B_2}$	0,029	0,059	0,735	0,177
$\boldsymbol{B_3}$	0,350	0	0,250	0,400

Таблица 18

Ai \ Пj	$\boldsymbol{П_1}$	$\boldsymbol{П_2}$	$\boldsymbol{П_3}$	$\boldsymbol{П_4}$	$\tilde{\bar{a}}_i^{(2)}$
$\boldsymbol{A_1}$	1	4	5	9	5,53*
$\boldsymbol{A_2}$*	3	8	4	3	4,03
$\boldsymbol{A_3}$	4	6	6	2	5,23
$\tilde{p}_{j2}$	0,029	0,059	0,735	0,177	

Таблица 19

Ai \ Пj	$\boldsymbol{П_1}$	$\boldsymbol{П_2}$	$\boldsymbol{П_3}$	$\boldsymbol{П_4}$	$\tilde{\bar{a}}_i^{(3)}$
$\boldsymbol{A_1}$	1	4	5	9	5,20*
$\boldsymbol{A_2}$*	3	8	4	3	3,25
$\boldsymbol{A_3}$	4	6	6	2	3,70
$\tilde{p}_{j3}$	0,350	0	0,250	0,400	

Теперь для каждого из событий $\boldsymbol{B_2}$, $\boldsymbol{B_3}$ (для $\boldsymbol{B_1}$ мы уже это сделали) найдем средний выигрыш, осредняя его с весами, равными новым, апостериорным вероятностям Оптимальную стратегию отмечаем звездочкой. Результаты расчетов для событий B_2 и B_3 соответственно приводятся в табл. 18 и 19. В нижней строке каждой таблицы приведены апостериорные вероятности состояний, а в правом столбце — средние выигрыши.

Теперь, на основе таблиц 17, 18, и 19 мы можем сформулировать правило решения: если эксперимент Q дал результат B_1 — применять стратегию A_2; если он дал не B_1 (т.е B_2 или B_3) - применять стратегию A_1 При этом, если эксперимент дал исход B_1, наш средний выигрыш будет равен 5,20; если B_2=5,53, а если B_3= 5,20.

Среднее значение среднего выигрыша при данном правиле решения может быть вычислено так: найдем полную вероятность события B_1:

$$P(B_1) = p_1 p(B_1 / \Pi_1) + p_2 p(B_1 / \Pi_2) + p_3 p(B_1 / \Pi_3) + p_4 p(B_1 / \Pi_4) =$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}46;$$

Аналогично находим вероятности событий B_2 и B_3:

$$P(B_2) = p_1 p(B_2 / \Pi_1) + p_2 p(B_2 / \Pi_2) + p_3 p(B_2 / \Pi_3) + p_4 p(B_2 / \Pi_4) =$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}34;$$

$$P(B_3) = p_1 p(B_3 / \Pi_1) + p_2 p(B_3 / \Pi_2) + p_3 p(B_3 / \Pi_3) + p_4 p(B_3 / \Pi_4) =$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}2;$$

Полный средний выигрыш при данном правиле решения будет:

$$\tilde{\bar{a}}^* = 0{,}46 \cdot 5{,}20 + 0{,}34 \cdot 5{,}53 + 0{,}20 \cdot 5{,}20 = 5{,}345$$

Сравним этот выигрыш с тем, который мы получили бы при отсутствии эксперимента мы получили $\bar{a}^* = 5{,}20$. Таким образом, выполнение эксперимента увеличило наш средний выигрыш на 5,345 — 5,20 = 0,145. Отсюда следует вывод: если стоимость эксперимента меньше чем 0,145, то выполнение его целесообразно, если же она превышает 0,145 — нецелесообразно.

Расчеты целесообразности проведения эксперимента, разумеется, могут производиться исходя не из среднего выигрыша, а из среднего риска; при этом будут получаться те же самые результаты.

Аналогичным образом можно заранее подсчитать, выгодно ли нам несколько раз провести эксперимент Q. Действительно, пусть, скажем, есть возможность произвести два независимых повторения Q_1, Q_2 эксперимента Q, характеризующегося условными вероятностями исходов: $p(B_l/Пj)$ $(j = 1, 2,\ldots n, l= 1,2,\ldots,k)$ при условии данного состояния природы $Пj$. Это равносильно проведению одного сложного эксперимента Q с исходами B_{ls} $(l=1, 2,\ldots,k, \ s= 1,2,\ldots,k)$, где B_{ls} обозначено событие, состоящее в том, что первый эксперимент дал B_l, а второй — B_k. Условные вероятности этих исходов по правилу умножения вероятностей независимых событий будут: $p(B_{ls}/П_j)= p(B_l/П_j)\ p(B_s/П_j)$. Таким образом задача сводится к ранее рассмотренной, только в эксперименте будет уже не k возможных исходов, а k^2.

Так обстоит дело, когда повторное проведение экспериментов планируется заранее. Однако, когда речь идет о проведении ряда испытаний для уточнения сведений о действительных условиях в рассматриваемой ситуации, выгоднее не назначать число испытаний заранее, а решать после каждого испытания — стоит ли проводить следующее. Оказывается, что такой метод в ряде случаев дает заметную экономию в средствах, затрачиваемых на эксперимент.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах: учебное пособие. 3-е изд., стер.- СПб.: Лань., 2011. -352 с.
2. *Палий И.А.* Линейное программирование. Учебное пособие/ И.А. Палий.-М.: Эксмо, 2008.-256с.
3. *Шикин Е.В.* От игр к играм: Математическое введение. – М.: КомКнига, 2006. -112 с.
4. *Шикин Е.В., Шикина Г.Е.* Исследование операций: учеб. – М.: ТК Велди, Изд-во Проспект, 2006. -280 с.
5. *Лю Б.* Теория и практика неопределенного программирования/ Б.Лю; пер. с англ.-М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.-416с.
6. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология. -М.: Дрофа. 2004.-208 с.
7. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. Учебное пособие.- 5-е изд.,стереотип.-М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.-264 с.
8. *Конюховский П.В.* Математические методы исследования операций в экономике- СПб.: Питер, 2000. -208 с.
9. *Волков И.К., Загоруйко Е.А.* Исследование операций: Учеб. Для вузов/ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.-М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.-436 с.
10. *Банди Б.* Основы линейного программирования: Пер. с англ. -М.: Радио и связь, 1989. -176 с.

Красниченко Л.С.

ТЕОРИЯ ИГР. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск *В. Г. Рудов*
Компьютерная верстка *Г. Н. Кирпа*

Подписано в печать 27.11.2020.
Формат 60х84 $^{1}/_{8}$. Печать офсетная.
Объем 11,0 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 22

Издание подготовлено и отпечатано
в отделе оперативной полиграфии
Кыргызско-Российского Славянского университета
720000, г. Бишкек ул. Киевская, 44