

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. первого Президента РФ Б. Н. Ельцина

ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

НАУЧНО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
«ОПТИМАЛ»

Кафедра прикладной математики и информатики

А. К. Керимбеков
Л. С. Красниченко
Э. Сейдакмат кызы

**НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ**

Монография

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Бишкек 2020

УДК 517
ББК 22.161.6
К 36

Рецензенты:

А.Асанов, д-р физ.-мат. наук, профессор,
Б.К. Темиров, д-р физ.-мат. наук, профессор
К.Р. Карабакиров, канд-т физ.-мат. наук, доцент

Рекомендовано к печати решением кафедры прикладной математики и информатики, НИЦ ММО – «ОПТИМАЛ».

К36 Керимбеков А.К. и др.

НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ: монография
А.К. Керимбеков, Л.С. Красниченко, Э. Сейдакмат кызы – Бишкек:
Изд-во КРСУ, 2020 – 194с.

ISBN 978-9967-19-767-1

В монографии исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, когда управляемый процесс описываются дифференциальным уравнением в частных производных и вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением, а функции граничного воздействия нелинейно зависят от скалярного и векторного управления. Введено понятие слабо обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса и установлены достаточные условия существования и единственности задачи оптимизации. Разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказана его сходимость к точному решению по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

Монография может быть полезна для специалистов, занимающихся теорией оптимального управления системами с распределенными параметрами, а также для аспирантов и студентов старших курсов высших учебных заведений.

ISBN 978-9967-19-767-1

УДК 517
ББК 22.161.6
© ГОУВПО КРСУ, 2020

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	5
0.1 Краевые задачи теплового процесса с нелинейными граничными условиями.....	7
0.2 Краткий обзор по исследованиям задач оптимизации тепловых и волновых процессов с граничными управлениями	14
ГЛАВА 1. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ГРАНИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ.....	18
1.1 Слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса	18
1.2 Задача оптимального управления и условия оптимальности.....	23
1.3 Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления	24
1.4 Построение решения задачи нелинейной оптимизации и сходимость приближенных решений	30
1.5 Пример	33
Вывод	44
ГЛАВА 2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ВЕКТОРНЫМ ГРАНИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ.....	45
2.1 Слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса	45
2.2 Задача оптимального управления и условия оптимальности.....	47
2.3 Система нелинейных интегральных уравнений оптимальных управлений	49
2.4 Решение задачи нелинейной оптимизации и сходимость приближенных решений	59
2.5 Пример	63
Вывод	75
ГЛАВА 3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПРИ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ	76

3.1 Краевая задача управляемого процесса.....	76
3.2 Постановка задачи оптимизации со скалярным управлением и вывод условия оптимальности.....	86
3.3 Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления.....	89
3.4 Приближенное решение задач нелинейной оптимизации и его сходимость.....	94
3.5 Пример.....	105
Вывод.....	118
ГЛАВА 4 ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПРИ ВЕКТОРНОМ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ.....	119
4.1 Краевая задача управляемого процесса.....	119
4.2 Постановка задачи оптимизации с векторным управлением и вывод условия оптимальности.....	122
4.3 Система нелинейных интегральных уравнений оптимальных управлений.....	124
4.4 Приближенное решение задач нелинейной оптимизации и его сходимость.....	133
Вывод.....	144
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	145
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	146
Литература к главам 1 и 2.....	146
Литература к главам 3 и 4.....	153
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	166
Приложение А.1.....	167
Приложение А.2.....	173
Приложение В.....	179
Приложение С.....	184

ВВЕДЕНИЕ

Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, основы которой были заложены в 60-е годы прошлого столетия в работах А.Г. Бутковского, А.И. Егорова, Т.К. Сиразетдинова и др., в настоящее время, является одним из интенсивно развивающихся научных направлений. Теория получила широкое развитие в исследованиях А.Г. Бутковского, А.И. Егорова, Т.К. Сиразетдинова, К.А. Лурье, В.И. Плотникова, Ж.Л. Лионса, их учеников и последователей.

На практике встречаются множество задач прикладного характера, где действие функции внешнего воздействия сосредоточено в одной точке, которая может быть как фиксированной, так и подвижной. В случаях, когда точка приложения внешних воздействий сосредоточена на границе появляется задача оптимизации с граничными управлениями. Примеры подобного рода задач для тепловых процессов приведены в монографиях [14,15] (Лит-ра к главам 1 и 2). В природе реальные процессы обычно протекают нелинейно. Поэтому многие задачи прикладного характера, в частности задачи оптимизации, по своей сущности являются нелинейными. Однако нелинейные задачи оптимизации из-за сложности их исследования и недостаточной разработанности методов их решения относятся к мало изученной области теории оптимального управления. В монографии основное внимание уделено исследованию задачи нелинейной оптимизации, где граничное управление является нелинейной функцией от управляющих параметров. Задачи с нелинейными граничными условиями часто встречаются в приложениях, например, задача оптимального нагрева стержня при тепловом лучистом обмене на концах стержня, происходящего по закону Стефана-Больцмана, приводит к задаче с нелинейным граничным управлением.

Исследование математических моделей многих реальных процессов, описываемых в зависимости только от настоящего состояния, сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям или к дифференциальным уравнениям в частных

производных. Модели, учитывающие поведение системы в предыдущие моменты времени (с эредитарными явлениями), сводятся к интегро-дифференциальным уравнениям. Одним из первых, такие задачи для интегро-дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов, исследовал В.Вольтерра. К необходимости изучения интегро-дифференциальных уравнений также приводит математическое описание задач движения жидкости и газов, переноса частиц в веществе, переноса лучистой энергии и др.

С такими моделями связано много задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. Однако, несмотря на обилие исследований по теории оптимального управления, задачи управления процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями мало изучены.

Исследование разрешимости нелинейных задач оптимизации и разработка конструктивных методов их решения является одной из актуальной проблемой теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

Еще одной актуальной проблемой теории оптимального управления распределенными системами является исследование разрешимости задачи нелинейного управления процессами, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями и разработка конструктивных методов их решения.

В монографии исследуются задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, когда управляемый процесс описываются дифференциальным уравнением в частных производных и вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением, а граничное условие краевой задачи нелинейно содержит параметр управления.

Далее приводим некоторые примеры краевых задач, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных и интегро-дифференциальными уравнениями, а также задач оптимизации с граничным управлением и сделаем краткий обзор по исследованиям в этом направлении.

0.1 Краевые задачи теплового процесса с нелинейными граничными условиями

Краевые задачи для параболических уравнений появляются при изучении тепловых, диффузионных и других технологических процессов. Приводим примеры [15, стр 13-15, стр 18-19] (Лит-ра к главам 1 и 2) процессов с распределенными параметрами, связанных с распределением тепла (температуры или концентрации). Тепловые и диффузионные процессы широко применяются в металлургической, химической, машиностроительной и в ряде других отраслей промышленности и техники. Математически эти процессы описываются уравнениями параболического типа, в частности уравнением теплопроводности. Во многих производственных процессах большое значение придается экономичному нагреву металла (быстрому, качественному с минимальными экономическими потерями). Нагрев изделий, как правило, происходит в печах, и температура печи является управляющим воздействием. Путем подачи тепла в печь или изменением уставки изменения регулятора можно реализовать те или иные показатели нагрева металла. Например, рассмотрим нагрев бесконечной однородной пластины шириной $2S$. Пусть распределение температуры по толщине пластины x ($-S \leq x \leq S$) и во времени t ($0 \leq t \leq T$) описывается функцией $Q(x, t)$. Другими словами, это означает, что распределение температуры $Q(x, t)$ задано в области, которая в данном случае содержится в плоскости с декартовыми координатами (x, t) и представляет собой прямоугольник. Функцию $Q(x, t)$ естественно назвать состоянием объекта или функцией состояния объекта.

Внутри отрезка $[-S, S]$ и при $t > 0$ распределение температуры $Q(x, t)$ подчиняется линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка, широко известному под названием уравнение теплопроводности или уравнение Фурье:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}, \quad (0.1.1)$$

где α - коэффициент температуропроводности. Для того чтобы решение этого уравнения было однозначно определено, необходимо задать граничные, или краевые условия. При этом граничные условия, соответствующие границе $t = t_0 = const$ (например, при $t = 0$), называются начальными условиями.

Для уравнения теплопроводности (0.1.1) довольно общие линейные краевые условия имеют вид

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial x}(S, t) = \alpha_1 [u_1(t) - Q(S, t)], \quad t > 0, \quad (0.1.2)$$

$$-\lambda \frac{\partial Q}{\partial x}(-S, t) = \alpha_2 [u_2(t) - Q(-S, t)], \quad t > 0, \quad (0.1.3)$$

где λ - коэффициент теплопроводности, α_1 и α_2 - коэффициенты теплообмена между греющей средой (печью) и металлом, $u_1(t)$ и $u_2(t)$ - температуры греющей среды соответственно с одной и другой стороны от пластины. Эти температуры $u_1(t)$ и $u_2(t)$ являются функциями времени и находятся в распоряжении оператора печи. Естественно эти функции назвать управляющими воздействиями или просто управлениями.

Физический смысл краевых условий (0.1.2) и (0.1.3) чрезвычайно прост: они выражают равенство тепловых потоков через поверхности пластины при $x = S$ и $x = -S$ изнутри и снаружи поверхностей. Другими словами, тепловой поток на поверхности тела пропорционален разности температур греющей среды и поверхности, тела (закон Ньютона).

Начальное условие или начальное распределение в практических условиях бывает известно более или менее точно. Его можно задать равенством

$$Q(x, 0) = Q_0(x), \quad -S \leq x \leq S. \quad (0.1.4)$$

Уравнения (0.1.1) – (0.1.4) описывают физическую природу нагрева пластины. Одной из целей процесса нагрева является получение заданного распределения температуры тела по его

массе. Математически это требование может быть задано в виде уравнения конечного состояния объекта:

$$Q(x, T) = Q^*(x), \quad -S \leq x \leq S, \quad (0.1.5)$$

где T - некоторый момент времени, а $Q^*(x)$ заданное или желаемое распределение температуры.

По мере необходимости описание объекта управления можно значительно усложнять, добиваясь большей адекватности, добавляя ограничения в виде дифференциального уравнения или в виде неравенства.

Часто усложнение и обобщение (иногда существенное, иногда несущественное) может произойти за счет усложнения характера рассматриваемого управляемого объекта. Например, вместо задач с линейным уравнением (0.1.1), по существу, надо рассматривать задачи с нелинейным или неоднородным уравнением с коэффициентами, зависящими от пространственных координат или времени, а также, может быть, от состояния самого объекта, т. е. от температуры. Тогда уравнение (0.1.1) заменяется более сложным уравнением:

$$cp \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \right], \quad (0.1.6)$$

где c - теплоемкость, ρ - плотность, λ - теплопроводность нагреваемого тела. Коэффициенты c , p , λ в общем случае могут быть заданными функциями x , t и Q , т. е.

$$c = c(x, t, Q), \quad p = p(x, t, Q), \quad \lambda = \lambda(x, t, Q). \quad (0.1.7)$$

В правой части уравнения (0.1.6) может добавляться член $f(x, t, Q)$ который характеризует «внутренние» (в пределах $-S \leq x \leq S$) источники или стоки тепла. Эти источники или стоки могут быть как управляемыми, так и неуправляемыми.

Далее, граничные условия (0.1.2), (0.1.3) могут также носить более сложный характер, точнее учитывающий природу внешнего теплообмена тела с греющей средой. Например, если во внешнем теплообмене существенную роль играет помимо конвективного еще и лучистый теплообмен, что в основном имеет место при высоких температурах, то в правые части уравнений

(0.1.2), (0.1.3) необходимо добавить новые члены, учитывающие лучистый теплообмен по закону Стефана - Больцмана:

$$\lambda Q'(S, t) = \alpha_1 [u_1(t) - Q(S, t)], + c_1 \left\{ [u_1(t)]^4 + [Q(S, t)]^4 \right\}, \quad (0.1.8)$$

$$\lambda Q'(S, t) = \alpha_2 [u_2(t) - Q(S, t)], + c_2 \left\{ [u_2(t)]^4 + [Q(S, t)]^4 \right\}. \quad (0.1.9)$$

Здесь мы сталкиваемся с нелинейной задачей. Нелинейность входит в задачу через граничные условия (0.1.8), (0.1.9). Такую задачу можно свести к некоторому нелинейному интегральному уравнению. Действительно, пусть для простоты $u_1(t) = u_2(t) = u(t)$. Тогда из условия симметрии (при нулевом начальном условии) распределение температуры $Q(x, t)$ можно линейно (с помощью линейного интегрального оператора) выразить через температуру поверхности $Q(S, t)$ с помощью равенства

$$Q(x, t) = \int_0^t K(x, t, \tau) Q(S, \tau) d\tau,$$

где $K(x, t, \tau)$ - функция влияния или, как принято говорить в теории автоматического управления, импульсная переходная функция системы, если за вход принять $Q(S, t)$, а за выход системы принять $Q(x, t)$.

В [15] приведены и другие примеры краевых задач с нелинейными граничными условиями вида (0.1.8)-(0.1.9). Например, при описании математической модели нагрева слябов в промежутке времени $0 \leq t \leq T$ уравнение нагрева имеет вид

$$\frac{\partial Q^i}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 Q^i}{\partial x^2}, \quad i \in Y, \quad (0.1.10)$$

где α - коэффициент температуропроводности металла и функция $Q^i = Q^i(x, t)$ характеризует распределение температуры по толщине i -го сляба в момент t . Уравнение (0.1.10) дополняется граничными условиями III - рода

$$\lambda \frac{\partial Q^i}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sigma_1 \left\{ [u_1(y, t)]^4 - [Q^i(0, t)]^4 \right\} + \alpha_1 [u_1(y, t) - Q^i(0, t)], \quad (0.1.11)$$

$$\lambda \frac{\partial Q^i}{\partial x} \Big|_{x=S^i} = \sigma_2 \left\{ [u_2(y,t)]^4 - [Q^i(S^i,t)]^4 \right\} + \alpha_2 [u_2(y,t) - Q^i(S^i,t)], \quad (0.1.12)$$

$$i \in Y, \quad 0 \leq y \leq L, \quad 0 \leq t \leq T$$

где $y = \sum_{k=0}^{i-1} b^k$ для $1 \leq i \leq R-1$ и $y = 0$ для $i = 0$;

$$\sigma_1 = \sigma_1(y), \quad \sigma_2 = \sigma_2(y), \quad \alpha_1 = \alpha_1(y), \quad \alpha_2 = \alpha_2(y),$$

соответственно коэффициенты распределения температуры в верхних и нижних зонах печи; $\lambda = \lambda(Q)$ – теплопроводность металла.

Можно привести ряд других примеров тепловых процессов, описываемых краевыми задачами с нелинейными граничными условиями.

Если рассмотреть уравнения теплопроводности в случае линейной эрeditarности, то получим интегро-дифференциальное уравнение с частными производными параболического типа [36]. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \int_0^t A(t,\tau) \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} d\tau = 0. \quad (*)$$

Рассматривая (*) как интегральное уравнение второго рода и решая

относительно $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, мы получим эквивалентное ему уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \int_0^t B(t,\tau) \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau = 0. \quad (**)$$

Как доказано [36] (Лит-ра к главам 3 и 4), решение уравнение (**) существует и единственно, если заданы его значения на границе. Указан также общий метод решения при помощи последовательных приближений. Если вместо этого мы применим к уравнению (*) метод разделения переменных, т.е. попытаемся найти частное решение уравнения (*) в виде

$$u = f(t)(a \text{Sink}x + b \text{COS}kx),$$

то для неизвестной функции $f(t)$ получим обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{df}{dt} = -k^2 f(t) - \int_0^t k^2 A(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

которое сразу приводится к интегральному уравнению второго рода

$$f(t) = h - \int_0^t k^2 \left\{ 1 + \int_0^{t'} A(t', \tau) d\tau' \right\} f(\tau) d\tau,$$

и легко решается [26] (Лит-ра к главам 3 и 4).

Рассмотрим *задачи управления атомным реактором* [15] (Лит-ра к главам 3 и 4), одномерная модель которого описывается интегро-дифференциальными уравнениями с обыкновенными и частными производными. Пусть $Q(x, t)$ – температура в реакторе в точке x в момент времени t , $N(t)$ – общая мощность в момент времени t , $n(x)$ – нормированная на единицу плотность мощности реакторе в точке x , $u(x)$ – температурный коэффициент реактивности в точке x , деленный на время жизни нейтронов. Тогда уравнения, описывающие температурный режим реактора, будут иметь вид

$$\frac{d}{dt} \ln N(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) Q(x, t),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \eta(x) N(t),$$

где a – коэффициент температуропроводности.

В связи с этой постановкой задачи при заданных функциях $\eta(x)$ и $u(x)$ большой интерес представляет *задача устойчивости работы реактора*, например, задача асимптотической устойчивости решения $Q(x, t) = 0$ и $N(t) = 0$, если под $Q(x, t)$ и $N(t)$ понимать соответственно отклонения от

некоторого установившегося теплового мощностного режима реактора. Более того, если, считать функцию $u(x)$ управляющим воздействием, то можно ставить задачу оптимального управления, состоящую в достижении наиболее равномерного распределения температуры $Q(x, t)$ за заданный интервал времени или, при заданной неравномерности распределения $Q(x, t)$ в получении этого распределения за минимальное время.

Если длина свободного пробега частиц значительно больше их размеров, то для описания процесса распространения частиц вместо уравнения диффузии используется более точное уравнение, так называемое *уравнение переноса (кинетическое уравнение)*. Выпишем уравнение переноса при следующих предположениях [19] (Лит-ра к главам 3 и 4):

- 1) Скорости всех частиц одинаковы и равны v .
- 2) Столкновения частиц между собой пренебрежимо редки.
- 3) Частицы сталкиваются с неподвижными ядрами среды;

$l(x)$ - их средняя длина свободного пробега в точке x .

4) При столкновении частицы с неподвижным ядром в точке x происходит одно из следующих трех случайных событий:

- а) с вероятностью $p_1(x)$ частица рассеивается на ядре, отскакивая от него, как упругий шарик;
- б) с вероятностью $p_2(x)$ частица захватывается ядром;
- с) с вероятностью $p_3(x)$ частица делит ядро, в результате чего появляется $\nu(x) \geq 1$ таких же частиц (при этом считается, что частица, разделившая ядро, исчезает).

5) Распределение частиц по направлениям как после рассеяния, так и после деления равномерное (изотропное).

Обозначим через $n(x, s, t)$ плотность частиц в точке x , летящих в направлении $s = (s_1, s_2, s_3)$, $|s| = 1$, в момент времени t и через $F(x, s, t)$ - плотность источников. Тогда функция $\psi = \nu n$

- поток частиц - удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} + s \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \alpha \psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{s_1} \psi(x, s', t) ds' + F, \quad (0.1.13)$$

где $\alpha = \frac{1}{l}$, $h = p_1 + \nu p_3$. Это есть односкоростное уравнение переноса для процессов с изотропным рассеянием. Вывод более общих уравнений переноса были исследованы [72,25] (Лит-ра к главам 1 и 2).

Для полного описания процесса переноса частиц необходимо задать начальное распределение потока частиц ψ в среде (начальное условие) и режим на границе этой среды (граничное условие). Например, если область G , где происходит процесс переноса, выпуклая, то граничное условие вида

$$\psi(x, s, t) = 0, \quad x \in S, \quad (s, n_x) < 0,$$

выражает отсутствие падающего потока частиц на область G извне.

0.2 Краткий обзор по исследованиям задач оптимизации тепловых и волновых процессов с граничными управлениями

Рассмотрим тепловые процессы, описываемые краевыми задачами с линейными граничными условиями. Уравнение (0.1.1) описывают физическую природу нагрева пластины.

Как известно [15] (Лит-ра к главам 1 и 2), задача получения заданного распределения (0.1.5) при помощи изменения управляющих воздействий (температуры окружающей среды) $u_1(t)$ и $u_2(t)$, $0 \leq t \leq T$, является характерной и принципиальной задачей в теории управления распределенными системами. Эта задача в отдельных случаях может осложняться тем, что, помимо условия (0.1.5), на управляющее воздействия могут быть наложены ограничения вида

$$A_1 \leq u_1(t) \leq A_2, \quad A_3 \leq u_2(t) \leq A_4, \quad (0.2.1)$$

где A_i - заданные постоянные числа, характеризующие предельно допустимые максимальные и минимальные значения температуры в печи.

Если условие (0.1.5) не выполнимо, то можно поставить задачу о минимизации отклонения истинной температуры $Q(T, x)$ выходящего из печи металла от заданной $Q^*(x)$. За меру такого отклонения можно взять интеграл

$$I = \int_{-s}^s |Q(T, x) - Q^*(x)|^p dt, \quad (0.2.2)$$

где p - заданное число. Таким образом, для достижения цели управляющие воздействия $u_1(t)$ и $u_2(t)$, $0 \leq t \leq T$, нужно подобрать так, чтобы выполнялось условие (0.1.5) или (0.2.2).

Аналогичные задачи управления можно рассматривать и для тепловых процессов, описываемых краевыми задачами с нелинейными граничными условиями вида (0.1.8) – (0.1.9) и (0.1.10) – (0.1.11).

В [15] (Лит-ра к главам 1 и 2) подробно изложены результаты исследований задач управления тепловыми и колебательными процессами, описываемыми краевыми задачами с линейными граничными управлениями. Разработаны методы их решения, которые могут быть использованы (или используются) в приложениях.

Задачи оптимизации с граничными управлениями из-за большой сферы применения привлекают внимание научных исследователей. Ниже приводятся аннотации исследований задач, по граничному управлению примыкающих к теме монографии.

В совместной работе А. В. Аргучинцева и О.А. Крутиковой [7] (Лит-ра к главам 1 и 2) рассматривается задача оптимального управления решениями смешанной задачи для полулинейной гиперболической системы с одной пространственной переменной, причем управление входит в граничные и начальные условия. Получены необходимые условия оптимальности, построен численный метод решения задачи оптимизации,

получены приложения к задаче об оптимальном управлении популяцией, о восстановлении профиля гравитационной волны.

Большой цикл работ В.А. Ильина, Е.И. Моисеева [26-28] (Лит-ра к главам 1 и 2) посвящен задаче граничного управления колебательной системой, динамика которой описывается волновым уравнением $u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0$. Полученные результаты используются при проведении оптимизации граничных управлений, проводимых на одном конце струны либо смещением, либо упругой граничной силой, которые при наличии модельного нелокального граничного условия переводят процесс колебания струны либо из состояния начального в состояние полного покоя либо из заданного состояния в заданное финальное состояние.

В работах [30-35] (Лит-ра к главам 1 и 2) решается задача оптимального граничного управления: из построенных управлений отбираются управления, минимизирующие заданный квадратичный функционал, имеющий смысл кинетической или потенциальной граничной энергии системы.

Однако задачи управления тепловыми процессами, описываемыми краевыми задачами с нелинейными граничными управлениями мало изучены. Это, прежде всего, быть может, связано из-за сложности исследования нелинейной задачи управления и недостаточной разработанности методов решения нелинейных задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. В [44] (Лит-ра к главам 1 и 2) была разработана методика решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами в случае, когда управляемый процесс описывается линейными уравнениями при нелинейно входящими управляющими параметрами. Это позволило более или менее полно исследовать нелинейные задачи оптимизации систем с распределенными параметрами и довести решение задачи до численных расчетов [10-12, 32, 36-43, 46-48] (Лит-ра к главам 1 и 2). Однако нелинейные задачи оптимального управления процессом теплопередачи в случае нелинейных граничных управлений мало исследованы. Данная монография написана на основе исследований [40, 42-43, 48] (Лит-ра к главам 1 и 2), [82-99] (Лит-ра к главам 3 и 4).

При изложении материала были использованы следующие обозначения:

1. $(0, 1)$ – интервал оси Ox ;
2. $(0, T)$ – интервал оси ot ;
3. $Q = (0, 1) \times (0, T)$ – область плоскости Oxt ;
4. $V_t(t, x), V_x(t, x)$ – частная производная первого порядка функции $V(t, x)$ по временной переменной t и по координатной переменной x ;
5. $V_{xx}(t, x)$ – частная производная второго порядка функции $V(t, x)$ по координатной переменной x ;
6. $H(D)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве D ;
7. $\|\cdot\|_H$ – норма элемента гильбертова пространства H ;
8. $H^2 = H(0, T) \times H(0, T)$ – декартово произведение пространств;
9. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение.

В введении приведены примеры краевых задач, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных и интегро-дифференциальными уравнениями, а также задач оптимизации с граничным управлением для тепловых процессов, сделан краткий обзор исследований, примыкающих к теме монографии, и изложено краткое содержание исследований.

ГЛАВА 1. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ГРАНИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В этой главе исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса в случае, когда управление нелинейно входит в граничное условие и минимизируется квадратичный функционал. Установлено, что оптимальное управление удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению и дополнительному условию в виде неравенства. Найдено достаточное условие однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации

1.1 Слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса

Рассмотрим управляемый тепловой процесс описываемый функцией $V(t, x)$ которая удовлетворяет в области $Q = (0, 1) \times (0, T)$ уравнению теплопроводности [19, 22, 51, 52, 54, 64]

$$V_t = V_{xx} + f(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (1.1.1)$$

а на границе области Q начальному условию

$$V(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1.1.2)$$

и граничным условиям

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = p[t, u(t)], \quad 0 < t < T, \quad (1.1.3)$$

где заданная функция $f(t, x) \in H(Q)$ описывает изменения, постоянно действующего внешнего теплового потока, а функция $p[t, u(t)] \in H(0, T)$, нелинейно зависящая от функции управления $u(t) \in H(0, T)$ описывает изменения граничного теплового источника; $\psi(x) \in H(0, 1)$ функция начального состояния управляемого процесса; постоянная $\alpha > 0$; T – фиксированный момент времени; H – пространство Гильберта.

Определение 1.1. Слабо обобщенным решением краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) называется любая функция $V(t, x) \in H(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству [56]

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (V(t, x) \Phi(t, x))_{t_1}^{t_2} dx = \\ & = \iint_{t_1 0}^{t_2 1} [V(t, x) (\Phi_t(t, x) + \Phi_{xx}(t, x)) + f(t, x) \Phi(t, x)] dx dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} p[t, u(t)] \Phi(t, 1) dt \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

при произвольных моментах времени t_1 и t_2 ($0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$) и для любой функции $\Phi(t, x) \in C^{1,2}[Q]$, а также начальному условию (1.1.2) в слабом смысле, т.е. соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 [V(t, x) - \psi(x)] \Phi_0(x) dx = 0$$

выполняется для любой функции $\Phi_0(x) \in H(0, 1)$.

Для построения обобщенного решения краевой задачи (1.1.1) – (1.1.3) используем методику, изложенной в работе [66]. Пусть $\{z_n(x)\}$ – полная ортонормированная система собственных функций краевой задачи

$$Z''(x) + \lambda^2 Z(x) = 0, \quad Z'(0) = 0, \quad Z'(1) + \alpha Z(1) = 0. \quad (1.1.5)$$

Тогда $z_n(x) = \gamma_n \cos \lambda_n x$, $n = 1, 2, 3, \dots$, где

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}},$$

а $\{\lambda_n\}$ – собственные значения, которые определяются как решение трансцендентного уравнения $tg \lambda = \frac{\alpha}{\lambda}$ и обладают следующими свойствами:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty, \quad \lambda_n \leq \lambda_{n+1}, \quad (n+1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.1.6)$$

Решение краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3) ищем в виде

$$V(t, x) = \sum_{i=1}^n V_n(t) z_n(x),$$

где

$$V_n(t) = \langle z_n(x), V(t, x) \rangle. \quad (1.1.7)$$

Для определения функций $V_n(t)$ используем интегральное тождество (1.1.4). Учитывая тождество

$$\begin{aligned} \int_0^1 (V(t, x) \Phi(t, x)) \Big|_{t_1}^{t_2} dx &= \iint_{0t_1}^{1t_2} \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) \Phi(t, x) dt dx = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 V(t, x) \Phi(t, x) dt dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 V(t, x) \Phi(t, x) dx dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \langle V(\tau, x), \Phi(t, x) \rangle dt \end{aligned}$$

в (1.1.4) положим $\Phi(t, x) \equiv z_n(x)$. Тогда согласно разложениям

$$f(t, x) = \sum_{i=1}^n f_n(t) z_n(x), \quad \text{где } f_n(t) = \langle z_n(x), f(t, x) \rangle,$$

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^n \psi_n(t) z_n(x), \quad \text{где } \langle \psi_n(t) = z_n(x), \psi(x) \rangle,$$

имеем тождество

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \langle V(\tau, x), z_n(x) \rangle + \lambda_n^2 \langle V(\tau, x), z_n(x) \rangle - \right. \\ \left. - \langle f(t, x), z_n(x) \rangle - z_n(1) p[t, u(t)] \right\} dt \equiv 0. \end{aligned}$$

Отсюда считая $t_2 = t$ - произвольной переменной, а t_1 - фиксированной переменной после дифференцирования по t , для каждого фиксированного $n = 1, 2, 3, \dots$ получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} z_n(x), V(t, x) + \lambda_n^2 V(t, x) z_n(x) = \\ & = f(t, x) z_n(x) + p[t, u(t)] z_n(1), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

которое будем решать с начальным условием:

$$\langle z_n(x), V(t, x)_{t=t_1} \rangle = \langle z_n(x), V(t_1, x) \rangle.$$

Решение задачи Коши (1.1.8) – (1.1.9) имеет вид

$$\begin{aligned} & \langle z_n(x), V(t, x) = e^{-\lambda_n^2 t} \langle z_n(x), V(t_1, x) \rangle + \\ & + \int_{t_1}^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (f_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u(\tau)]) d\tau. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Устремляя $t_1 \rightarrow 0$ и учитывая тот факт, что начальное условие (1.1.2) выполняется в слабом смысле, т.е. соотношения

$$\int_0^1 z_n(x), V(t_1, x) dx \xrightarrow{t_1 \rightarrow 0} \int_0^1 z_n(x), V(0, x) dx = \int_0^1 z_n(x), \psi(x) dx = \psi_n,$$

$V_n(t)$ - коэффициент Фурье разложения (1.1.7) находим по формуле

$$V_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (f_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u(\tau)]) d\tau, \quad (1.1.10)$$

который является единственным решением задачи Коши (1.1.8) – (1.1.9) при $t_1 \rightarrow 0$. Согласно формулам (1.1.7) и (1.1.10) находим функцию

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (f_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u(\tau)]) d\tau \right] z_n(x), \quad (1.1.11)$$

которая является формальным решением краевой задачи (1.1.1) – (1.1.3). Заметим, что единственность решения краевой задачи (1.1.1) – (1.1.3) обеспечивается лишь при выполнении условия

$$\frac{\partial p[t, u(t)]}{\partial u} \neq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.1.12)$$

т.е. лишь в случае, когда функция $p[t, u(t)]$ является монотонной по функциональному аргументу $u(t)$. В этом случае каждое

управление $u(t)$ определяет единственное слабо обобщенное решение краевой задачи (1.1.1)-(1.1.3).

Лемма 1.1.1. Пусть $\psi(x) \in H(0,1)$, $f(t,x) \in H(Q)$, а функция $p[t,u(t)] \in H(0,T)$ при каждом фиксированном управлении $u(t) \in H(0,T)$. Тогда решение (1.1.11) краевой задачи (1.1.1)–(1.1.3) является элементом пространства $H(Q)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением получим неравенство

$$\begin{aligned}
 \|V(t,x)\|_H^2 &= \iint_{00}^{T1} V^2(t,x) dt dx = \\
 &= \iint_{00}^{T1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x) \right)^2 dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(t) dt = \\
 &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (f_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u(\tau)]) d\tau \right)^2 dt \leq \\
 &\leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-2\lambda_n^2 t} \psi_n^2 + \int_0^t e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} (f_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u(\tau)])^2 d\tau \right] dt \leq \\
 &\leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n^2 t} \psi_n^2 dt + 2 \int_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} f_n(\tau) \right)^2 d\tau + \right. \\
 &\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n(1) p[\tau, u(\tau)] d\tau \right)^2 \right] dt.
 \end{aligned}$$

Применяя интегральное неравенство Коши-Буняковского получим следующее соотношение

$$\|V(t,x)\|_H^2 \leq 2 \left\{ \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n^2 t} \psi_n^2 dt + 2 \int_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \int_0^T f_n^2(\tau) d\tau + \right. \right.$$

$$+ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n^2(1) d\tau \int_0^T p^2[\tau, u(\tau)] d\tau dt \Big\}.$$

Далее с учетом следующих оценок

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} z_n^2(1) d\tau &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} (1 - e^{-2\lambda_n^2 T}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1}{\lambda_n^2} \leq M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \\ &= M_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2 \pi^2} \right) = M_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right); \end{aligned}$$

$$e^{-2\lambda_n^2 t} \leq M_0 \leq 1;$$

$$\begin{aligned} \int_0^T f_n^2(t) dt &= \int_0^T \left(\int_0^1 z_n(x) f(t, x) dx \right)^2 dt \leq \int_0^T \left(\int_0^1 z_n^2 dx \cdot \int_0^1 f^2(t, x) dx \right) dt = \\ &= \iint_{00}^{T1} f^2(t, x) dx dt = f(t, x)_{H(Q)}^2 < \infty; \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n^2 t} \psi_n^2 \leq M_0 \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2 = M_0 \psi(x)_H^2 < \infty;$$

в итоге получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|V(t, x)\|_H^2 &\leq 2T \left\{ M_0 \|\psi(x)\|_H^2 + \right. \\ &\left. + \left(\|f(t, x)\|_{H(Q)}^2 + 2 \|p[t, u(t)]\|_{H(0, T)}^2 \right) M_1 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right) \right\} < \infty, \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

1.2 Задача оптимального управления и условия оптимальности

Пусть управляемый процесс описывается краевой задачей (1.1.1) – (1.1.3). Требуется найти управление $u^0(t) \in H(0, T)$ и соответствующее ему решение $V^0(t, x)$ краевой задачи (1.1.1) – (1.1.3) на которых интегральный квадратичный функционал

$$I[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt, \quad \beta > 0, \quad (1.2.1)$$

где $\xi(x) \in H(0,1)$, заданная функция, принимает наименьшее возможное значение.

В связи с тем, что функция управления $u(t)$ нелинейно входит в задачу оптимизации, рассматриваемую задачу условно назовем *задачей нелинейной оптимизации*.

Согласно принципа максимума для систем с распределенными параметрами [14, 15, 22, 24], получим следующие условия оптимальности

$$P_u(\cdot, u) = P_u(t, u)\omega(t, 1) - 2\beta u = 0, \quad (1.2.2)$$

$$P_{uu}(\cdot, u) = P_{uu}(t, u)\omega(t, 1) - 2\beta < 0, \quad (1.2.3)$$

где $\omega(t, x)$ – решение сопряженной краевой задачи.

$$\omega_t + \omega_{xx} = 0, \quad (t, x) \in Q, \quad (1.2.4)$$

$$\omega(T, x) + 2[V(T, x) - \xi(x)] = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (1.2.5)$$

$$\omega_x(t, 0) = 0, \quad \omega_x(t, 1) + \alpha\omega(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (1.2.6)$$

Решение сопряженной краевой задачей (1.2.4–(1.2.6) определяется по формуле

$$\begin{aligned} \omega(t, x) = & -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (f_n(\tau) \right. \\ & \left. + z_n(1) p[\tau, u(\tau)]) d\tau - \xi_n(t) \right] e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(x) \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

и является элементом гильбертова пространства $H(Q)$.

1.3 Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления

С учетом (1.2.7), условие оптимальности (1.2.2) перепишем в виде

$$2\beta u(t) P_u^{-1}(t, u) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \right.$$

$$+ \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (f_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u(\tau)]) d\tau - \xi_n(t) z_n(1).$$

Введя обозначения

$$G_n(t, 1) = e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(1), \quad (1.3.1)$$

$$h_n = \xi_n - e^{-\lambda_n^2 T} \psi_n - \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} f_n(t) dt, \quad (1.3.2)$$

это равенство приводим к виду

$$\beta u(t) p_u^{-1}[t, u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) p[\tau, u(\tau)] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) h_n \quad (1.3.3)$$

Второе условие оптимальности (1.2.3), согласно (1.2.2), приводим к виду

$$p_u[t, u(t)] \left(\frac{u}{p_u[t, u(t)]} \right)_u > 0. \quad (1.3.4)$$

Таким образом, для нахождения оптимального управления получили задачу (1.3.3)-(1.3.4), т.е. задачу, где требуется найти решение интегрального уравнения (1.3.3), удовлетворяющее дополнительному условию (1.3.4) при известной функции $p[t, u(t)]$. Заметим, что последняя задача представляет интерес и в теории интегрального уравнения, как самостоятельная задача.

Согласно методике, разработанной в работе [44], преобразуем уравнение (1.3.3). С этой целью положим

$$\beta u(t) p_u^{-1}[t, u(t)] = \theta(t). \quad (1.3.5)$$

Это равенство, согласно (1.3.4), однозначно разрешается относительно $u(t)$, т.е. существует функция $\varphi(\square)$ такая, что

$$u(t) = \varphi[t, \theta(t), \beta]. \quad (1.3.6)$$

Тогда относительно новой неизвестной функции $\theta(t)$ имеем нелинейное интегральное уравнение вида

$$\theta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) h_n, \quad (1.3.7)$$

Исследуем вопросы разрешимости уравнения (1.3.7). Введя обозначение

$$G(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) \left(h_n - \int_0^T G_n(\tau, 1) p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]] d\tau \right), \quad (1.3.7')$$

это уравнение перепишем в операторной форме

$$\theta = G(\theta).$$

Лемма 1.3.1. Функция

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) h_n,$$

является элементом пространства $H(0, T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением, учитывая оценку

$$\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-t)} dt \leq \frac{M_1}{\lambda_n^2}, \quad M_1 \leq \text{const},$$

имеем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T h^2(t) dt &= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) h_n \right)^2 dt \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t, 1) \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 dt = \\ &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n^2(T-t)} z_n^2(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\xi_n^2 - e^{-2\lambda_n^2 T} \psi_n^2 + \left(\int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right)^2 \right] dt \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1}{\lambda_n^2} 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\xi_n^2 + e^{-2\lambda_n^2 T} \psi_n^2 + \left(\int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right)^2 \right] \leq \\ &\leq 3M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 + M_0 \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)} d\tau \int_0^T f_n^2(\tau) d\tau \right) \leq \\ &\leq 3M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 + M_0 \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1}{2\lambda_n^2} \int_0^T f_n^2(\tau) d\tau \right) \leq \\ &\leq 3M_1 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right) \left[\|\xi(x)\|_H^2 + M_0 \|\psi(x)\|_H^2 + \frac{M_1}{2\lambda_1^2} \|f(t, x)\|_H^2 \right] < \infty, \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 1.3.2. При выполнении условия $p[u(t)] \in H(0, T)$, $\forall u(t) \in H(0, T)$, оператор $G_0[\cdot]$ действующий по формуле

$$G_0[\theta] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]] d\tau, \quad (1.3.8)$$

является элементом пространства $H(0, T)$.

Доказательство. Покажем, что $G_0[\cdot] \in H$.

Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T G_0^2[\theta] dt &= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) p[\tau, \varphi(\tau, \theta(\tau), \beta)] d\tau \right)^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t, 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T G_n^2(\tau, 1) d\tau \int_0^T p^2[\tau, \varphi(\tau, \theta(\tau), \beta)] d\tau \right) dt \leq \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1}{\lambda_n^2} \right)^2 \left\| p[\tau, \varphi(\tau, \theta(\tau), \beta)] \right\|_H^2 \leq \\ &\leq M_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left\| p[\tau, \varphi(\tau, \theta(\tau), \beta)] \right\|_H^2 < \infty, \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 1.3.3. Пусть $\theta(t) \in H(0, T)$ и каждая из функций $p[t, u(t)]$ и $\varphi[t, \theta(t), \beta]$ по функциональному аргументу удовлетворяет условию Липшица т.е.

$$\left\| p[t, u(t)] - p[t, \bar{u}(t)] \right\|_H \leq p_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H, \quad p_0 > 0, \quad (1.3.9)$$

$$\left\| \varphi[t, \theta(t), \beta] - \varphi[t, \bar{\theta}(t), \beta] \right\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|\theta(t) - \bar{\theta}(t)\|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0. \quad (1.3.10)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = M_1 p_0 \varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < 1$$

оператор $G_0[\cdot] \in H$ является сжимающим.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем соотношение

$$\begin{aligned}
G_0[\theta] - G_0[\bar{\theta}]_H^2 &= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,1) \int_0^T G_n(\tau,1) [p(\varphi(\theta) - \varphi(\bar{\theta}))] d\tau \right)^2 dt \leq \\
&\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t,1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T G_n^2(\tau,1) d\tau \int_0^T (p[\varphi(\theta)] - p[\varphi(\bar{\theta})])^2 d\tau \leq \\
&\leq M_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left\| p[\tau, \varphi(\tau, \theta(\tau), \beta)] - p[\tau, \varphi(\tau, \bar{\theta}(\tau), \beta)] \right\|_H^2 \leq \\
&\leq M_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right)^2 p_0^2 \left\| \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta] - \varphi[\tau, \bar{\theta}(\tau), \beta] \right\|_H^2 \leq \\
&\leq M_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right)^2 p_0^2 \varphi_0^2(\beta) \theta(\tau) - \bar{\theta}(\tau)_H^2 ;
\end{aligned}$$

из которого следует, что

$$\left\| G_0[\theta] - G_0[\bar{\theta}] \right\|_H \leq \gamma \left\| \theta(\tau) - \bar{\theta}(\tau) \right\|_H, \quad (1.3.11)$$

$$\text{где } \gamma = M_1 p_0 \varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < 1. \quad (1.3.12)$$

Теорема 1.3.1. Пусть функция $p[t, u(t)]$ удовлетворяет условиям (1.1.12) и (1.3.9), а функция $\varphi[t, \theta(t), \beta]$ - условию (1.3.10). Тогда при выполнении условия (1.3.12) операторное уравнение (1.3.7') в пространстве $H(0, T)$ имеет единственное решение $\tilde{\theta}(t) \in H(0, T)$.

Доказательство. Операторное уравнение (1.3.7') с помощью функции $h(t)$ (см. лемма 1.3.1) и оператора $G_0[\theta]$ (см. формулу (1.3.8)) перепишем в виде $\theta(t) = h(t) - G_0[\theta(t)]$.

Из этого представления легко видеть, что условия сжимаемости операторов $G_0[\theta]$ и $G[\theta]$ совпадают. Согласно

леммам 1.3.1 и 1.3.2, имеет место соотношение $G[\theta(t)] \in H(0, T)$ при любой функции $\theta(t)$, в частности, и для $\theta(t) \in H(0, T)$. $H(0, T)$ – является полным метрическим пространством. При выполнении условия $\gamma < 1$ оператор $G_0[\theta]$ является сжимающим и на основе теоремы о сжимающем операторе [53] операторное уравнение (1.3.7') или нелинейное интегральное уравнение (1.3.7) в пространстве $H(0, T)$ имеет единственное решение $\tilde{\theta}(t)$.

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по схеме $\theta_n(t) = G[\theta_{n-1}(t)]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, где $\theta_0(t)$ произвольный элемент пространства $H(0, T)$, и удовлетворяет оценке

$$\|\bar{\theta}(t) - \theta_n(t)\|_H \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \|G[\theta_0(t)] - \theta_0(t)\|_H. \quad (1.3.13)$$

Точное решение нелинейного интегрального уравнения (1.3.7) определяется по формуле

$$\bar{\theta}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(t).$$

Найденное решение $\tilde{\theta}(t)$, подставляя в формулу (1.3.6) решение нелинейного интегрального уравнения (1.3.3) находим по формуле

$$u^0(t) = \varphi[t, \bar{\theta}(t), \beta].$$

Управление $u^0(t)$ может претендовать на «оптимальность» лишь тогда, когда на этом управлении выполняется второе условие оптимальности (1.3.4). Это обстоятельство может повлиять на существование оптимального управления, т.е. если найденное управление $u^0(t)$ не удовлетворяет условию (1.3.4), то решение задачи нелинейной оптимизации может не существовать. Однако можно указать класс функций $\{p[t, u(t)], 0 < t < T\}$, для которых условие (1.3.4)

выполняется для любых функций $u(t)$, в частности и для функций $u^0(t)$. Здесь и далее будем считать, что условие (1.3.4) выполняется.

1.4 Построение решения задачи нелинейной оптимизации и сходимость приближенных решений

После того как найдено оптимальное управление $u^0(t)$, согласно формуле (1.1.11), находим решение краевой задачи (1.1.1) – (1.1.3), т.е. оптимальный процесс $V^0(t, x)$, соответствующее оптимальному управлению $u^0(t)$, в виде

$$V^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (f_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u^0(\tau)]) d\tau \right] z_n(x), \quad (1.4.1)$$

Далее, зная оптимальное управление $u^0(t)$ и оптимальный процесс $V^0(t, x)$ можно вычислить, согласно формуле (1.2.1), минимальное значение функционала

$$I[u^0(t)] = \int_0^1 [V^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u^0(t)]^2 dt, \quad \beta > 0. \quad (1.4.2)$$

Таким образом, найденная тройка $(u^0(t), V^0(T, x), I[u^0(t)])$ является решением задачи нелинейной оптимизации.

Поскольку на практике найти точное решение нелинейного интегрального уравнения (1.3.7) не всегда удастся, то чаще всего ограничиваются нахождением приближенного решения. Приближенное решение $\theta_k(t)$ подставляя в формулу (1.3.6) находим k -е приближение

$$u_k(t) = \varphi[t, \theta_k(t), \beta] \quad (1.4.3)$$

оптимального управления $u^0(t)$ определяемого формулой (2.3.14). При этом допускаемая погрешность оценивается по формуле

$$\|u^0(t) - u_k(t)\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|\bar{\theta}(t) - \theta_n(t)\|_H, \quad (1.4.4)$$

из которой следует сходимость приближенного оптимального управления $u_k(t)$ к точному при $k \rightarrow \infty$.

Для оптимального процесса k -е приближение, согласно (1.1.11), находим по формуле

$$V_k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (f_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)]) d\tau \right] z_n(x). \quad (1.4.5)$$

При этом допускаемая погрешность оценивается по формуле

$$\|V(t, x) - V_k(t, x)\|_H \leq \left[TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{\frac{1}{2}} p_0 \|u^0(t) - u_k(t)\|_H. \quad (1.4.6)$$

Оценка (1.4.6) доказывается непосредственным вычислением. В самом деле, она вытекает из следующего неравенства

$$\begin{aligned} & \|V(t, x) - V_k(t, x)\|_H^2 \leq \\ & \leq \iint_{00}^{T1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} [p[\tau, u^0(\tau)] - p[\tau, u_k(\tau)]] d\tau z_n(x) \right)^2 dx dt \leq \\ & \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} z_n^2(x) d\tau \int_0^T [p[\tau, u^0(\tau)] - p[\tau, u_k(\tau)]]^2 d\tau dt \leq \\ & \leq M_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) T \|p[\tau, u^0(\tau)] - p[\tau, u_k(\tau)]\|_H^2 \leq \\ & \leq M_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) T p_0^2 \|u^0(t) - u_k(t)\|_H^2. \end{aligned}$$

Приближенное значение функционала находим по формуле

$$I[u_k^0(t)] = \int_0^1 [V_k^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T (u_k^0)^2(t) dt. \quad (1.4.7)$$

Для приближенного значения функционала, согласно (1.4.2), имеет место неравенство

$$\left| I[u^0(t)] - I[u_k(t)] \right| \leq C u^0(t) - u_k(t), \quad (1.4.8)$$

где C – некоторая постоянная, из которого следует сходимость. Соотношение (1.4.8) доказывается непосредственным вычислением. В самом деле,

$$\begin{aligned} & \left| I[u(t)] - I[u_k(t)] \right| = \\ & = \left| \int_0^1 \left\{ [V(T, x) - \xi(x)]^2 - [V_k(T, x) - \xi(x)]^2 \right\} dx + \beta \int_0^T (u^2(t) - u_k^2(t)) dt \right| = \\ & = \left| \int_0^1 \left\{ V^2(T, x) - 2V(T, x)\xi(x) + \xi^2(x) - V_k^2(T, x) + 2V_k(T, x)\xi(x) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \xi^2(x) \right\} dx + \beta \int_0^T (u(t) - u_k(t))(u(t) + u_k(t)) dt \right| = \\ & = \left| \int_0^1 \left\{ (V(T, x) + V_k(T, x))(V(T, x) - V_k(T, x)) - 2\xi(x) \cdot \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \cdot (V(T, x) - V_k(T, x)) \right\} dx + \beta \int_0^T (u(t) - u_k(t))(u(t) + u_k(t)) dt \right| \leq \\ & \leq \int_0^1 |V(T, x) + V_k(T, x)| |V(T, x) - V_k(T, x)| dx + \\ & + 2 \int_0^1 |\xi(x)| |V(T, x) - V_k(T, x)| dx + \beta \int_0^T |u(t) - u_k(t)| |u(t) + u_k(t)| dt \leq \\ & \leq \left(\int_0^1 |V(T, x) + V_k(T, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |V(T, x) - V_k(T, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + 2 \left(\int_0^1 |\xi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |V(T, x) - V_k(T, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta \left(\int_0^T (u(t) + u_k(t))^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T (u(t) - u_k(t))^2 dt \right)^{1/2} = \\
& = \|V(T, x) + V_k(T, x)\|_H + 2\|\xi(x)\|_H \|V(T, x) - V_k(T, x)\|_H + \\
& + \beta \|u(t) + u_k(t)\|_H \|u(t) - u_k(t)\|_H \leq \left(\|V(T, x) + V_k(T, x)\|_H + 2\|\xi(x)\|_H \right) \cdot \\
& \cdot \left[\left[TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{1/2} P_0 \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G_0[\theta_0(t)] + h(t) - \theta_0(t)\|_H \right] + \\
& + \beta \|u(t) + u_k(t)\|_H \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G_0[\theta_0(t)] + h(t) - \theta_0(t)\|_H = \\
& = \left\{ \left(\|V(T, x) + V_k(T, x)\|_H + 2\|\xi(x)\|_H \right) \left[2TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{1/2} P_0 + \right. \\
& \left. + \beta \|u(t) + u_k(t)\|_H \right\} \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G_0[\theta_0(t)] + h(t) - \theta_0(t)\|_H.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что постоянная C может быть вычислена по формуле

$$\begin{aligned}
C & = \left(\|V(T, x) + V_k(T, x)\|_H + 2\|\xi(x)\|_H \right) \cdot \\
& \cdot \left[2TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{1/2} P_0 + \beta \|u(t) + u_k(t)\|_H. \quad (1.4.9)
\end{aligned}$$

Таким образом, k -е приближение задачи нелинейной оптимизации определяется, согласно формулам (1.4.3), (1.4.5) и (1.4.7), которое, как следует из оценок (1.4.4), (1.4.6) и (1.4.8), при $k \rightarrow \infty$ сходится к точному решению определяемое формулами (1.3.14), (1.4.1) и (1.4.2).

1.5 Пример

Полученные теоретические результаты проиллюстрируем на примере модельной задачи. Рассмотрим задачу граничного

управления процессом теплопередачи, где требуется минимизировать функционал

$$I[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt, \quad \beta > 0, \quad (1.5.1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_t = V_{xx}, \quad (t, x) \in Q, \quad (1.5.2)$$

$$V(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1.5.3)$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = p[t, u(t)], \quad 0 < t < T. \quad (1.5.4)$$

Слабое обобщенное решение краевой задачи (1.5.2)–(1.5.4) находим по формуле

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n(1) p[\tau, u(\tau)] d\tau \right] z_n(x). \quad (1.5.5)$$

Условия оптимальности имеют вид

$$\begin{cases} 2\beta u(t) p_u^{-1}(t, u(t)) = \omega(t, 1) \\ p_u[t, u(t)] \left(\frac{u(t)}{p_u[t, u(t)]} \right)_u > 0, \end{cases} \quad (1.5.6)$$

где $\omega(t, x)$ решение сопряженной краевой задачи, определяемое по формуле

$$\omega(t, x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n(1) p[\tau, u(\tau)] d\tau - \xi_n(t) \right] \cdot e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(x). \quad (1.5.7)$$

Оптимальное управление согласно условиям (1.5.6) определяется как решение нелинейного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} & \beta u(t) p_u^{-1}[t, u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) p[\tau, u(\tau)] d\tau = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) h_n \equiv h(t), \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

где

$$G_n(t, 1) = e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(1), \quad h_n = \xi_n - e^{-\lambda_n^2 T} \psi_n - \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} f_n(t) dt,$$

и удовлетворяет дополнительному условию

$$p_u[t, u(t)] \left(\frac{u}{P_u[t, u(t)]} \right)_u > 0. \quad (1.5.9)$$

Сначала решаем нелинейное интегральное уравнение. Положим $\beta u(t) p_u^{-1}[t, u(t)] = \theta(t)$. (1.5.10)

Это равенство при выполнении условия (1.5.9) однозначно разрешается относительно $u(t)$, т.е. существует функция $\varphi(\square)$ такая, что

$$u(t) = \varphi[t, \theta(t), \beta]. \quad (1.5.11)$$

Согласно (1.5.10) и (1.5.11) уравнение (1.5.8) приводим к виду

$$\theta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) h_n. \quad (1.5.12)$$

Это нелинейное интегральное уравнение при выполнении следующих условиях:

- 1) $\frac{\partial p}{\partial u} \neq 0, \quad \forall t \in [0, T],$
- 2) $\|p[t, u(t)] - p[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq p_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H, \quad p_0 > 0,$
- 3) $\|\varphi[t, \theta(t), \beta] - \varphi[t, \bar{\theta}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|\theta(t) - \bar{\theta}(t)\|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0,$
- 4) $\gamma = M_1 p_0 \varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < 1,$

в пространстве $H(0, T)$ имеет единственное решение

$$\theta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k(t),$$

где $\theta_k(t)$ k -е приближение точного решения. Приближенное решение строится методом последовательных приближений и удовлетворяет оценке

$$\|\bar{\theta}(t) - \theta_k(t)\|_H \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[\theta_0(t)] + h(t) - \theta_0(t)\|_H, \quad (1.5.13')$$

$$G[\theta_0(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,1) \int_0^T G_n(\tau,1) p[\tau, \varphi(\tau, \theta(\tau), \beta)] d\tau,$$

где $\theta_0(t)$ произвольный элемент пространства $H(0, T)$. Положим $\theta_0(t) = h(t)$ и оценку (1.5.13') перепишем в виде

$$\|\bar{\theta}(t) - \theta_k(t)\|_H \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[\theta_0(t)]\|_H. \quad (1.5.13)$$

Оптимальное управление, его приближение определяются формулами

$$u^0(t) = \varphi[t, \theta(t), \beta], \quad u_k(t) = \varphi[t, \theta_k(t), \beta]$$

и удовлетворяют оценке

$$\|u^0(t) - u_k(t)\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|\bar{\theta}(t) - \theta_k(t)\|_H. \quad (1.5.14)$$

Оптимальный процесс, его приближение определяются формулами

$$V^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n(1) p[\tau, u^0(\tau)] d\tau \right] z_n(x),$$

$$V_k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right] z_n(x),$$

и удовлетворяют оценке

$$\|V^0(t, x) - V_k(t, x)\|_H \leq \left[TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{\frac{1}{2}} p_0 \|u^0(t) - u_k(t)\|_H. \quad (1.5.15)$$

Минимальное значение функционала, его приближение определяются формулами

$$I[u^0(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T (u^0(t))^2 dt, \quad \beta > 0,$$

$$I[u_k(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u_k^2(t) dt, \quad \beta > 0,$$

и удовлетворяют оценке

$$|I[u(t)] - I[u_k(t)]| \leq C \|u^0(t) - u_k(t)\|, \quad (1.5.16)$$

$$C = \left\{ \left(2\|V(T, x)\|_H + 2\|\xi(x)\|_H \right) \left[TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{\frac{1}{2}} P_0 + 2\beta \|u(t)\|_H \right\}.$$

Расчет примера произведен при следующих данных задачи оптимизации:

- 1) $T = 1$;
- 2) $\xi(x) = \xi_0(x-1), \quad 0 \leq x \leq 1$;
- 3) $\psi(x) = x-1, \quad 0 \leq x \leq 1$;
- 4) $\alpha = 21.15$;
- 5) $p[t, u(t)] = \ln \sqrt{u^2(t) + 1}, \quad -1 \leq u(t) \leq 1$.

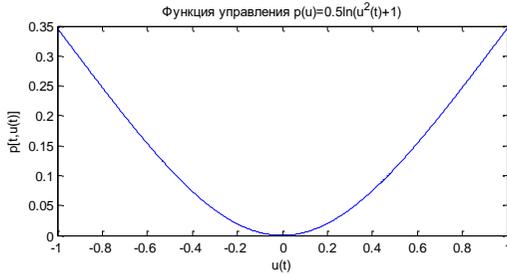


Рисунок 1.1

И при этом выполняется второе условие оптимальности т.е.

$$p_u \left(\frac{u(t)}{p_u} \right)_u = \frac{u(t)}{u^2(t) + 1} 2u = 2 \frac{u^2(t)}{u^2(t) + 1} > 0, \quad \forall u(t).$$

В частности и на оптимальном управлении. Для функции

$$p[t, u(t)] \text{ получаем: } p_0 = \max_{\substack{u(t) \\ 0 \leq t \leq T}} |p_u[t, u(t)]| = 0,5;$$

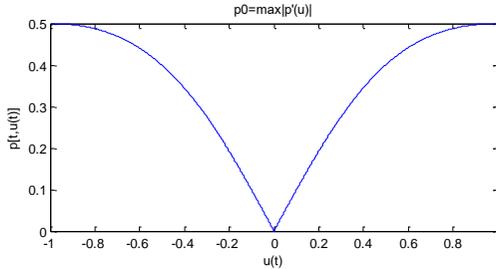


Рисунок 1.2

$$6) \beta u(t) p_u^{-1}[t, u(t)] = \beta(u^2(t) + 1) = \theta(t);$$

$$u(t) = \pm \sqrt{\frac{\theta - \beta}{\beta}} = \varphi[t, \theta(t), \beta], \quad \theta(t) > \beta, \theta(t) \leq 2\beta \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$\varphi_0(\beta) = \max_{\substack{\theta(t) \\ 0 \leq t \leq T}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{\beta} \sqrt{\theta(t) - \beta}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\beta - \beta}} = \frac{1}{2\beta};$$

7) Постоянная M_1 удовлетворяет оценке

$$M_1 = \max_{0 \leq t \leq T} (1 - e^{-\lambda_1^2(T-t)}) \leq 1;$$

$$8) \gamma = 1 * 0.5 * \frac{1}{2\beta} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < 1;$$

$$9) |I[u(t)] - I[u_k(t)]| \leq C \|u^0(t) - u_k(t)\|,$$

$$C = \left\{ \left(2V(T, x)_H + 2\xi(x)_H \right) \left[TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{\frac{1}{2}} P_0 + 2\beta \|u(t)\|_H \right\}.$$

10) Значения λ_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ для расчета оценок следующие

Таблица 1.1

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	...
1.5000	4.5026	7.5127	10.5335	13.5668	...

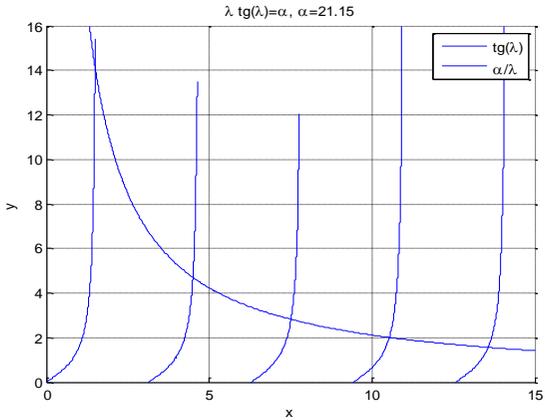


Рисунок 1.3

Подробный вывод применяемых значений рассматривается в приложении А1. Ниже приводятся результаты численных расчетов выполненных в *Matlab 7.6.0 (R2008a)*, листинг программы прилагается в приложении А2.

1) Зависимость k -го приближения от β нормы $\|\bar{\theta}(t) - \theta_k(t)\|_H$

Таблица 1.2

$\beta \backslash k$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
1.	6.3199	1.7700	0.9454	0.6131	0.4380	0.3316
2.	4.8277	0.9014	0.3611	0.1873	0.1115	0.0724
3.	3.6879	0.4590	0.1379	0.0572	0.0284	0.0158
4.	2.8172	0.2338	0.0527	0.0175	0.0072	0.0034
5.	2.1520	0.1191	0.0201	0.0053	0.0018	0.0008
6.	1.6439	0.0606	0.0077	0.0016	0.0005	0.0002
7.	1.2558	0.0309	0.0029	0.0005	0.0001	0.0000
8.	0.9593	0.0157	0.0011	0.0002	0.0000	0.0000
9.	0.7328	0.0080	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
10.	0.5598	0.0041	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000

приближенное решение интегрального уравнения

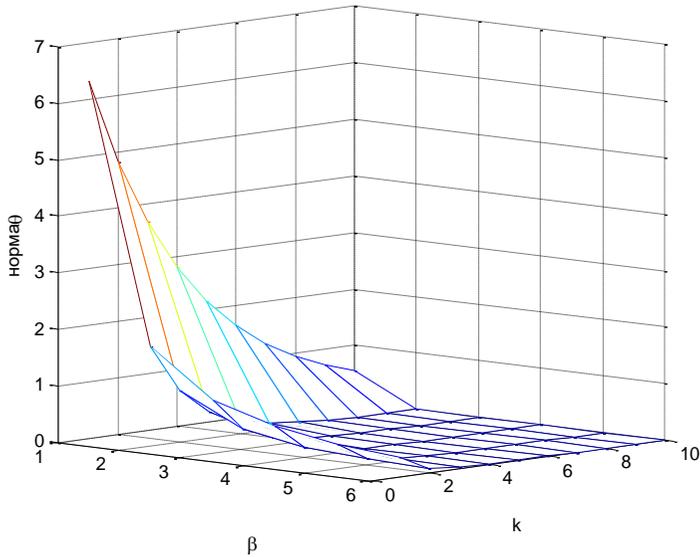
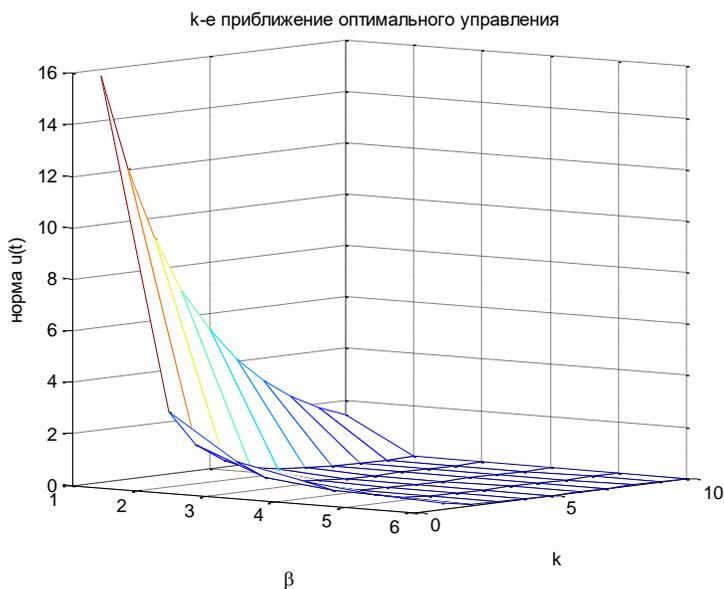


Рисунок 1.4

2) Зависимость k -го приближения от β нормы $\|u^0(t) - u_k(t)\|_H$

Таблица 1.3

$k \backslash \beta$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
1.	15.7998	2.9500	1.1817	0.6131	0.3650	0.2369
2.	12.0694	1.5023	0.4514	0.1873	0.0929	0.0517
3.	9.2197	0.7651	0.1724	0.0572	0.0237	0.0113
4.	7.0429	0.3896	0.0658	0.0175	0.0060	0.0025
5.	5.3800	0.1984	0.0251	0.0053	0.0015	0.0005
6.	4.1098	0.1010	0.0096	0.0016	0.0004	0.0001
7.	3.1394	0.0515	0.0037	0.0005	0.0001	0.0000
8.	2.3982	0.0262	0.0014	0.0002	0.0000	0.0000
9.	1.8320	0.0133	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000
10.	1.3994	0.0068	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000



3) Зависимость k -го приближения от β нормы $\|V^0(t, x) - V_k(t, x)\|_H$

Таблица 1.4

$k \backslash \beta$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
1)	6.1757	1.1530	0.4619	0.2396	0.1427	0.0926
2)	4.7175	0.5872	0.1764	0.0732	0.0363	0.0202
3)	3.6037	0.2990	0.0674	0.0224	0.0092	0.0044
4)	2.7528	0.1523	0.0257	0.0068	0.0024	0.0010
5)	2.1029	0.0776	0.0098	0.0021	0.0006	0.0002
6)	1.6064	0.0395	0.0038	0.0006	0.0002	0.0000
7)	1.2271	0.0201	0.0014	0.0002	0.0000	0.0000
8)	0.9374	0.0102	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
9)	0.7161	0.0052	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
10)	0.5470	0.0027	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000

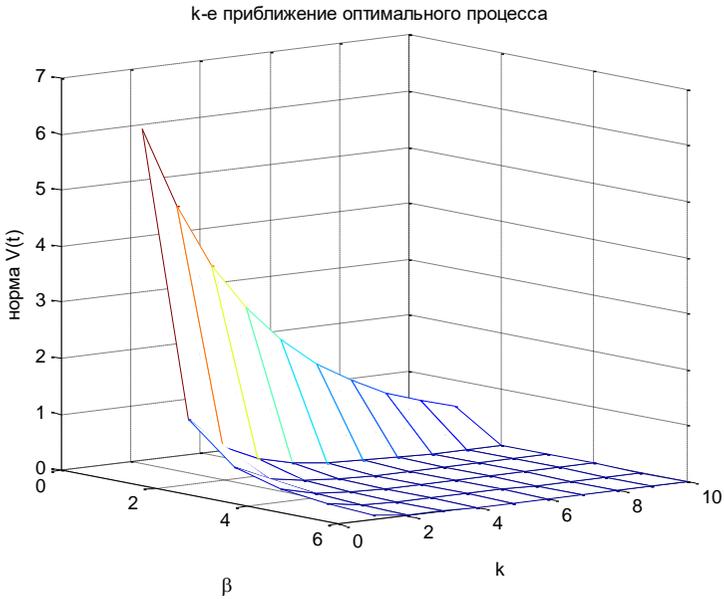


Рисунок 1.6

4) Зависимость k -го приближения от β модуля $|I[u(t)] - I[u_k(t)]|$

Таблица 1.5

$k \backslash \beta$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
1.	17.4157	3.2517	1.3026	0.6758	0.4023	0.2611
2.	13.3038	1.6560	0.4975	0.2065	0.1024	0.0570
3.	10.1627	0.8433	0.1900	0.0631	0.0261	0.0124
4.	7.7632	0.4295	0.0726	0.0193	0.0066	0.0027
5.	5.9303	0.2187	0.0277	0.0059	0.0017	0.0006
6.	4.5301	0.1114	0.0106	0.0018	0.0004	0.0001
7.	3.4605	0.0567	0.0040	0.0006	0.0001	0.0000
8.	2.6435	0.0289	0.0015	0.0002	0.0000	0.0000
9.	2.0193	0.0147	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
10.	1.5426	0.0075	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000

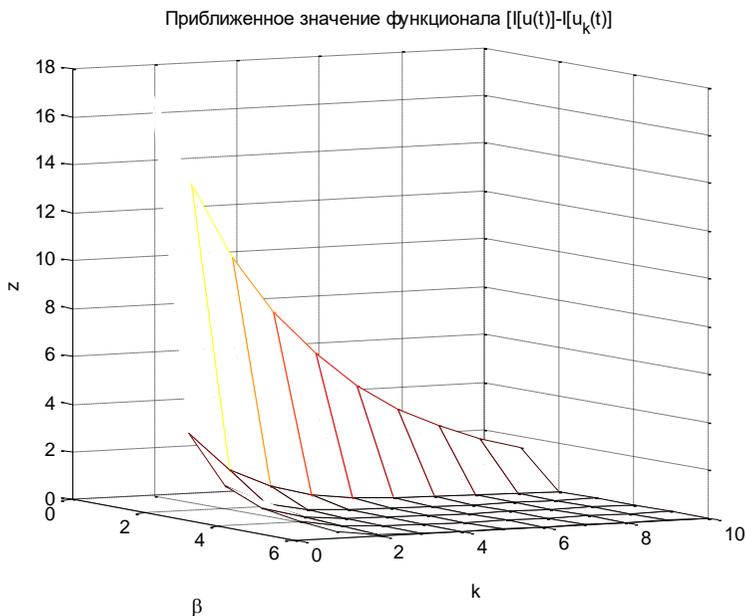


Рисунок 1.7

Вывод

В первой главе получены следующие результаты:

1. исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса в случае, когда управление нелинейно входит в граничное условие и минимизируется квадратичный функционал;
2. установлено, что оптимальное управление удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению и дополнительному условию в виде неравенства. Найдено достаточное условие однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации;
3. с помощью приведенного метода найдено оптимально управление для квадратичного функционала.
4. На конкретном примере показана численная реализация полученных результатов.
5. Проведено исследование зависимости сходимости приближенных решений интегрального уравнения, оптимального управления, оптимального процесса и значения функционала от коэффициента β .
Обнаружено, что изменение значения постоянной β влияет на скорость сходимости приближенных решений задач нелинейной оптимизации, при уменьшении значения β , скорость сходимости замедляется.

ГЛАВА 2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ВЕКТОРНЫМ ГРАНИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В этой главе исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации в случае двухстороннего управления процессом распространения тепла по стержню. При этом функции управления нелинейно входят в граничные условия. Установлено, что оптимальное векторное управление удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений и дополнительным условиям в виде неравенств. Разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказана его сходимости к точному решению по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

2.1 Слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса

Рассмотрим управляемый тепловой процесс описываемый функцией $V(t, x)$, которая удовлетворяет в области $Q = (0, 1) \times (0, T)$ уравнению теплопроводности [10, 11, 19, 51, 64]

$$V_t = V_{xx} + f(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (2.1.1)$$

а на границе области Q начальному условию

$$V(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, 1) \quad (2.1.2)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} V_x(t, 0) &= p_1[t, \bar{u}(t)], \quad 0 < t < T, \\ V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) &= p_2[t, \bar{u}(t)], \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

где $f(t, x) \in H(Q)$ заданная функция, $\bar{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}$, $\bar{u}(t) \in H^2(0, T)$ - вектор-функция управления, $p_1[t, \bar{u}(t)], p_2[t, \bar{u}(t)] \in H(0, T)$ функции нелинейно зависящие от вектор - функции управления, которые описывают изменения

теплового источника на границе; $\psi(x) \in H(0,1)$ функция начального состояния управляемого процесса; постоянная $\alpha > 0$; T – фиксированный момент времени; H – пространство Гильберта, $H^2 = H \times H$ -декартово произведение пространств H .

Определение 2.1. Слабо обобщенным решением краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3) называется любая функция $V(t, x) \in H(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (V(t, x) \Phi(t, x))_{t_1}^{t_2} dx = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 [V(t, x)(\Phi_t + \Phi_{xx}) + f(t, x)\Phi(t, x)] dx dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} -(\Phi_x(t, 1) + \alpha\Phi(t, 1))V(t, 1) + \Phi_x(t, 0)V(t, 0) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} [p_2[t, \bar{u}(t)]\Phi(t, 1) - p_1[t, \bar{u}(t)]\Phi(t, 0)] dt, \end{aligned}$$

при произвольных моментах времени t_1 и t_2 ($0 \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$) и для любой функции $\Phi(t, x) \in C^{1,2}[Q]$, а также начальному условию (2) в слабом смысле, т.е. соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 [V(t, x) - \psi(x)] \Phi_0(x) dx = 0,$$

выполняется для любой функции $\Phi_0(x) \in H(0,1)$, где $C^{1,2}[Q]$, - пространство Гильберта функций имеющих обобщенную производную 1-го порядка по переменной t и 2-го порядка по переменной x .

Построения обобщенного решения краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3) аналогично задаче (1.1.1)-(1.1.3), т.е. согласно методике, изложенной в работе [66] функции

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} [-z_n(0) p_1[\tau, \bar{u}(\tau)] + \right.$$

$$+z_n(1)p_2[\tau, \bar{u}(\tau)] + f_n(\tau) d\tau] z_n(x), \quad (2.1.4)$$

где ψ_n , $f_n(\tau)$ - коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi(x)$ и $f(t, x)$, является слабо обобщенным решением краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3). Заметим, что единственность решения краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3) обеспечивается лишь при выполнении условия

$$D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial u_1} & \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial p_2}{\partial u_1} & \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.1.5)$$

т.е. при этом каждое управление $\bar{u}(t)$ определяет единственное слабо обобщенное решение краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3).

2.2 Задача оптимального управления и условия оптимальности

Пусть управляемый процесс описывается краевой задачей (2.1.1) – (2.1.3). Вектор – функция управления $\bar{u}(t) \in H^2(0, T)$, для которой краевая задача (2.1.1)-(2.1.3) имеет единственное слабо обобщенное решение $V(t, x) \in H(Q)$, назовем допустимым управлением.

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации: среди допустимых управлений $\bar{u}(t) \in H^2(0, T)$, требуется найти такое управление $\tilde{u}(t) \in H^2(0, T)$, которое вместе соответствующим ему решением $V(t, x) \in H(Q)$ краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3) минимизирует квадратичный интегральный функционал

$$I[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt, \quad \beta > 0, \quad (2.2.1)$$

где $N(t) = 0$ $\xi(x) \in H(0,1)$ заданная функция.

Согласно принципа максимума для систем с распределенными параметрами

[14, 15, 17] находим, что функция имеет вид

$$\begin{aligned} & \Pi(t, V(t, x), \omega(t, x), u_1(t), u_2(t)) = \\ & = -\omega(t, 0) p_1(t, u_1(t), u_2(t)) + \omega(t, 1) p_2(t, u_1(t), u_2(t)) - \beta(u_1^2(t) + u_2^2(t)) \end{aligned}$$

и условия оптимальности определяются следующими соотношениями:

1) поскольку отсутствуют ограничение на управление, в точке экстремума, как первого порядка необходимое условие имеют место соотношения

$$\begin{cases} \Pi_{u_1}(\cdot, u_1, u_2) = -\omega(t, 0) \frac{\partial p_1}{\partial u_1} + \omega(t, 1) \frac{\partial p_2}{\partial u_1} - 2\beta u_1 = 0, \\ \Pi_{u_2}(\cdot, u_1, u_2) = -\omega(t, 0) \frac{\partial p_1}{\partial u_2} + \omega(t, 1) \frac{\partial p_2}{\partial u_2} - 2\beta u_2 = 0. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

или в матричной форме

$$2\beta \begin{pmatrix} u_1^0(t) \\ u_2^0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial u_1} & \frac{\partial p_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial p_1}{\partial u_2} & \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega(t, 0) \\ \omega(t, 1) \end{pmatrix}; \quad (2.2.2')$$

2) согласно условиям Сильвестра в критической точке максимум функции $\Pi(\square, u_1, u_2)$ достигается если

$$\Pi_{u_1 u_1}(\square, u_1, u_2) < 0, \quad (2.2.3)$$

$$\begin{vmatrix} \Pi_{u_1 u_1}(\square, u_1, u_2) & \Pi_{u_1 u_2}(\square, u_1, u_2) \\ \Pi_{u_2 u_1}(\square, u_1, u_2) & \Pi_{u_2 u_2}(\square, u_1, u_2) \end{vmatrix} > 0. \quad (2.2.3')$$

Здесь $\Pi_{u_i u_j}(\square, u_1, u_2)$ - частные производные 2-го порядка, $\omega(t, x)$ - решение сопряженной краевой задачи

$$\omega_t + \omega_{xx} = 0, \quad (t, x) \in Q, \quad (2.2.4)$$

$$\omega(T, x) + 2[V(T, x) - \xi(x)] = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (2.2.5)$$

$$\omega_x(t,0) = 0, \quad \omega_x(t,1) + \alpha\omega(t,1) = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (2.2.6)$$

Решение сопряженной краевой задачей (2.2.4) - (2.2.6) определяется по формуле

$$\begin{aligned} \omega(t,x) = & -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-h_n + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} \left[-z_n(0) p_1(t, u_1(t), u_2(t)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + z_n(1) p_2(t, u_1(t), u_2(t)) \right] d\tau \right) e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(x), \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

где
$$h_n = \xi_n - e^{-\lambda_n^2 T} \psi_n - \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} f_n(\tau) d\tau.$$

Нетрудно проверить, что оно является элементом гильбертова пространства $H(Q)$.

2.3 Система нелинейных интегральных уравнений оптимальных управлений

Оптимальное управление $\bar{u}(t)$ находим согласно условиям (2.2.2)-(2.2.3).

Соотношение (2.2.2), согласно условию (2.1.5), представим в виде

$$2\beta D^{-1} \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} = 2\beta D^{-1} \begin{pmatrix} p(t, \bar{u}) \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega(t,0) \\ \omega(t,1) \end{pmatrix}. \quad (2.3.1)$$

Учитывая (2.2.7) уравнение (2.3.1) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \beta D^{-1} \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \begin{pmatrix} G_n(t,0) \\ G_n(t,1) \end{pmatrix} (G_n(\tau,0), G_n(\tau,1)) \begin{pmatrix} p_1(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)) \\ p_2(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)) \end{pmatrix} d\tau = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_n(t,0) \\ G_n(t,1) \end{pmatrix} h_n. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

где
$$G_n(t,0) = -e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(0), \quad G_n(t,1) = -e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(1).$$

Таким образом, оптимальное управление определяется как решение системы нелинейных интегральных уравнений (2.3.2).

Для исследования однозначной разрешимости уравнения (2.3.2) сначала его перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \beta D^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \tilde{u}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1) \tilde{p}(t, \tilde{u}(t)) d\tau = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) h_n, \\ & \tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}_n(t, 0, 1) = \begin{pmatrix} G_n(t, 0) \\ G_n(t, 1) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$$\tilde{p}(t, \tilde{u}(t)) = \begin{pmatrix} p_1(t, u_1(t), u_2(t)) \\ p_2(t, u_1(t), u_2(t)) \end{pmatrix}, \quad (2.3.4)$$

* - знак транспонирования

Следуя методике работы [44], положим

$$\beta D^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \tilde{\theta}(t). \quad (2.3.5)$$

Согласно условию (2.1.5) это равенство однозначно разрешается относительно вектор – функции $\tilde{u}(t)$, т. е. имеет место равенство

$$\tilde{u}(t) = \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] = \begin{pmatrix} \varphi_1[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \\ \varphi_2[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \end{pmatrix}. \quad (2.3.6)$$

С учетом (2.3.5)– (2.3.6) уравнение (2.3.3) перепишем в операторной форме

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{G}[\tilde{\theta}(t)], \quad (2.3.7)$$

где $\tilde{G}[\tilde{\theta}(t)] = -\bar{G}[\tilde{\theta}(t)] + \tilde{h}(t) =$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1) \tilde{P}(t, \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta]) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) h_n$$

Далее исследуем вопросы разрешимости уравнения (2.3.7).

Лемма 2.3.1.

$$\tilde{h}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t) h_n \in H^2(0, T) = H(0, T) \times H(0, T).$$

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\tilde{h}(t)\|^2 dt &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{G}_n(t, 0, 1) h_n\|^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{G}_n(t, 0, 1) h_n\| \right)^2 dt \leq \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{G}_n(t, 0, 1)\| |h_n| \right)^2 dt \leq \\ &\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{G}_n(t, 0, 1)\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (G_n^2(t, 0) + G_n^2(t, 1)) dt \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2; \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно следующие выражения:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t, 0) dt &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} z_n^2(0) e^{-2\lambda_n^2(T-t)} dt \leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n^2(T-t)} dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1}{\lambda_n^2}; \\ 2) \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t, 1) dt &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} z_n^2(1) e^{-2\lambda_n^2(T-t)} dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1}{\lambda_n^2}; \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n - e^{-\lambda_n^2 T} \psi_n - \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right)^2 \leq \\ &\leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n^2 + e^{-2\lambda_n^2 T} \psi_n^2 + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} d\tau \int_0^T f_n^2(\tau) d\tau \right) \leq \\ &\leq 3 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 + M_0 \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1}{\lambda_n^2} \|f(t, x)\|_{H(Q)}^2 \right]. \end{aligned}$$

С учетом этих вычислений имеем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (G_n^2(t, 0) + G_n^2(t, 1)) dt \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 &\leq \\ &\leq 2M_1 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right) + \frac{3M_1}{2} \|f(t, x)\|_{H(Q)}^2 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right) + 3 \left(\|\xi(x)\|_H^2 + M_0 \|\psi(x)\|_H^2 \right) = \end{aligned}$$

$$= \left[3,5 \|f(x)\|_{H(\mathcal{Q})}^2 M_1 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right) + 3 \left(\|\xi(x)\|_H^2 + M_0 \|\psi(x)\|_H^2 \right) \right] < \infty,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 2.3.2. При выполнении условия

$$\tilde{D}(t, u(t)) \in H^2(0, T), \quad \forall \tilde{u}(t) \in H^2(0, T),$$

оператор $\bar{G}[\theta]$, действующий по формуле

$$\bar{G}[\theta] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1) \tilde{p}(t, \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta]) d\tau$$

является элементом пространства $H^2(0, T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\bar{G}(\theta)\|^2 dt &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \tilde{G}_n(t, 0, 1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1) \tilde{p}(t, \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta]) d\tau \right\|^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \tilde{G}_n(t, 0, 1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1) \tilde{p}(\tau, \tilde{u}(\tau)) d\tau \right\|^2 \right) dt \leq \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{G}_n(t, 0, 1)\|^2 dt \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T \|\tilde{G}_n(\tau, 0, 1)\| \|\tilde{p}(\tau, \tilde{u}(\tau))\| d\tau \right)^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{G}_n(t, 0, 1)\|^2 dt \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \|\tilde{G}_n(\tau, 0, 1)\|^2 d\tau \int_0^T \|\tilde{p}(\tau, \tilde{u}(\tau))\|^2 d\tau \leq \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1}{\lambda_n^2} \right)^2 \|\tilde{p}(\tau, \tilde{u}(\tau))\|_{H^2(0, T)}^2 = M_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \|\tilde{p}(\tau, \tilde{u}(\tau))\|_{H^2(0, T)}^2 \leq \infty, \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 2.3.3. Пусть $\tilde{\theta}(t) \in H^2(0, T)$ и каждая из функций

$\tilde{p}[t, \tilde{u}(t)]$ и $\tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta]$ по функциональному аргументу удовлетворяет условию Липшица т.е.

$$\|\tilde{p}[t, \tilde{u}(t)] - \tilde{p}[t, \tilde{u}(t)]\|_{H^2} \leq p_0 \|\tilde{u}(t) - \tilde{u}(t)\|_{H^2}, \quad p_0 > 0, \quad (2.3.8)$$

$$\left\| \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] - \tilde{\varphi}[t, \bar{\theta}(t), \beta] \right\|_{H^2} \leq \varphi_0(\beta) \left\| \tilde{\theta}(t) - \bar{\theta}(t) \right\|_{H^2}, \quad \varphi_0(\beta) > 0, \quad (2.3.9)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = M_1 p_0 \varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < 1, \quad (2.3.10)$$

Оператор $G[\cdot] = G_0[\cdot] + \hbar$ является сжимающим.

Доказательство. Учитывая вычисления, полученные при доказательстве леммы 2.3.2, имеем неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| \bar{G}[\tilde{\theta}] - \bar{G}[\bar{\theta}] \right\|_{H^2}^2 \leq \\ & \leq M_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left\| \tilde{p}[\tau, \tilde{\varphi}(\tau, \tilde{\theta}(\tau), \beta)] - p[\tau, \tilde{\varphi}(\tau, \bar{\theta}(\tau), \beta)] \right\|_H^2 \leq \\ & \leq M_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right)^2 p_0^2 \left\| \tilde{\varphi}[\tau, \tilde{\theta}(\tau), \beta] - \tilde{\varphi}[\tau, \bar{\theta}(\tau), \beta] \right\|_H^2 \leq \\ & \leq M_1^2 \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{6} \right)^2 p_0^2 \varphi_0^2(\beta) \left\| \tilde{\theta}(\tau) - \bar{\theta}(\tau) \right\|_H^2, \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$\left\| \bar{G}[\tilde{\theta}] - \bar{G}[\bar{\theta}] \right\|_{H^2} \leq \gamma \left\| \tilde{\theta}(\tau) - \bar{\theta}(\tau) \right\|_{H^2},$$

где $\gamma = M_1 p_0 \varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < 1$.

Следовательно, оператор $\tilde{G}[\cdot]$ является сжимающим [53].

Теорема 2.3.1. Пусть выполнены условия:

1. $\bar{p}[t, \bar{u}(t)] \in H^2(0, T), \quad \forall \bar{u}(t) \in H^2(0, T);$
2. $D\left(\frac{\bar{p}(t, \bar{u})}{\bar{u}}\right) \neq 0, \quad \forall t \in [0, T];$
3. $\left\| \tilde{p}[t, \tilde{u}(t)] - \tilde{p}[t, \bar{u}(t)] \right\|_{H^2} \leq p_0 \left\| \tilde{u}(t) - \bar{u}(t) \right\|_{H^2}, \quad p_0 > 0; \quad (2.3.11)$
4. $\left\| \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] - \tilde{\varphi}[t, \bar{\theta}(t), \beta] \right\|_{H^2} \leq \varphi_0(\beta) \left\| \tilde{\theta}(t) - \bar{\theta}(t) \right\|_{H^2}. \quad (2.3.12)$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = M_1 P_0 \varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right), \quad (2.3.13)$$

операторное уравнение (2.3.7) имеет единственное решение $\tilde{\theta}(t) \in H^2(0, T)$.

Доказательство. $H^2(0, T)$ – является полным метрическим пространством. При выполнении условий (2.3.11)–(2.3.13) оператор $G[\tilde{\theta}(t)]$, согласно леммы 2.3.3, является сжимающим. Поэтому согласно принципу сжимающих операторов [53] уравнение (2.3.7) имеет единственное решение.

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по схеме

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_n(t) &= \tilde{G}[\tilde{\theta}_{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \tilde{\theta}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_n(t), \end{aligned}$$

где $\tilde{\theta}_0(t)$ произвольный элемент пространства $H^2(0, T)$, и удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}_n(t)\|_{H^2} \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \|\tilde{G}[\tilde{\theta}_0(t)] - \tilde{\theta}_0(t) + \tilde{h}(t)\|_{H^2}, \quad (2.3.13)$$

Если принять $\tilde{\theta}_0(t) = \tilde{h}(t)$, то эта оценка (2.3.13) примет вид

$$\|\tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}_n(t)\|_{H^2} \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \|\tilde{G}[\tilde{\theta}_0(t)]\|_{H^2}. \quad (2.3.13')$$

Найденное решение $\tilde{\theta}(t)$ подставляя в формулу (2.3.6) решение нелинейного интегрального уравнения (2.3.5) находим по формуле

$$u^0(t) = \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] = \begin{pmatrix} \varphi_1[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \\ \varphi_2[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \end{pmatrix}. \quad (2.3.14)$$

Управление $u^0(t)$ может претендовать на «оптимальность» лишь тогда, когда на этом управлении

выполняется второе условие оптимальности (2.2.3). Проверка выполнения условия оптимальности в виде (2.2.3), сопряжено с некоторыми трудностями (порою даже непреодолимые). Это связано с присутствием функции $\omega(t, 0)$ и $\omega(t, 1)$, т.е. решения сопряженной краевой задачи. В этой связи второе условие оптимальности преобразуем к виду удобного для проверки этого условия.

С этой целью рассмотрим матрицу Гесса функции $\Pi(\square, u_1, u_2)$

$$\begin{aligned} \Gamma(\Pi(\square, u_1, u_2)) &= \begin{pmatrix} \Pi_{u_1 u_1}(\square, u_1, u_2) & \Pi_{u_1 u_2}(\square, u_1, u_2) \\ \Pi_{u_2 u_1}(\square, u_1, u_2) & \Pi_{u_2 u_2}(\square, u_1, u_2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\omega(t, 0) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} + \omega(t, 1) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2} - 2\beta & -\omega(t, 0) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1 \partial u_2} + \omega(t, 1) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1 \partial u_2} \\ -\omega(t, 0) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} + \omega(t, 1) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2 \partial u_1} & -\omega(t, 0) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2} + \omega(t, 1) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2} - 2\beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\omega(t, 0) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} + \omega(t, 1) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2} & -\omega(t, 0) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1 \partial u_2} + \omega(t, 1) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1 \partial u_2} \\ -\omega(t, 0) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} + \omega(t, 1) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2 \partial u_1} & -\omega(t, 0) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2} + \omega(t, 1) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} - \\ &-2\beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega(t, 0) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} \end{pmatrix} + \omega(t, 1) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2} \\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2 \partial u_1} \end{pmatrix}, \\ -\omega(t, 0) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} + \omega(t, 1) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2 \partial u_1} \\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} - 2\beta E = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ -\omega(t,0) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} + \omega(t,1) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2 \partial u_1} \\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} \right\} - 2\beta E = \\
&\left\{ -\omega(t,0) \Gamma[p_1(u_1, u_2)] + \omega(t,1) \Gamma[p_2(u_1, u_2)] \right\} - 2\beta E = \\
&= \left(\Gamma[p_1(u_1, u_2)], \Gamma[p_2(u_1, u_2)] \right) \begin{pmatrix} -\omega(t,0) \\ \omega(t,1) \end{pmatrix} - 2\beta E = \\
&= \text{Заменяем вектор } \begin{pmatrix} -\omega(t,0) \\ \omega(t,1) \end{pmatrix} \text{ по формуле (2.3.1)} = \\
&= \left(\Gamma[p_1(u_1, u_2)], \Gamma[p_2(u_1, u_2)] \right) 2\beta \left(D^* \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \bar{u}(t) - 2\beta E = \\
&= 2\beta \left(\Gamma[p_1(u_1, u_2)], \Gamma[p_2(u_1, u_2)] \right) \left(D^* \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \bar{u}(t) - E = \\
&= 2\beta \left(\Gamma[p_1(u_1, u_2)], \Gamma[p_2(u_1, u_2)] \right) \frac{1}{\left| D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \right|} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_2}{\partial u_2} & -\frac{\partial p_2}{\partial u_1} \\ -\frac{\partial p_1}{\partial u_2} & \frac{\partial p_1}{\partial u_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - E = \\
&= 2\beta \left\{ \frac{1}{\left| D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \right|} \left(\Gamma[p_1(u_1, u_2)], \Gamma[p_2(u_1, u_2)] \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial p_2}{\partial u_2} u_1 & -\frac{\partial p_2}{\partial u_1} u_2 \\ -\frac{\partial p_1}{\partial u_2} u_1 & \frac{\partial p_1}{\partial u_1} u_2 \end{pmatrix} - E \right\} = \\
&= 2\beta \left\{ \frac{1}{\left| D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \right|} \left(\left(-\frac{\partial p_2}{\partial u_1} u_2 + \frac{\partial p_2}{\partial u_2} u_1 \right) \Gamma[p_1(u_1, u_2)] + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{\partial p_1}{\partial u_2} u_2 + \frac{\partial p_1}{\partial u_1} u_2 \right) \Gamma [p_2(u_1, u_2)] - E \Big\} = \\
& = 2\beta \left[\frac{1}{D \left(\frac{p_1, p_2}{u_1, u_2} \right)} \left(-\frac{\partial p_2}{\partial u_1} u_2 + \frac{\partial p_2}{\partial u_2} u_1 \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} + \right. \\
& + \left. \frac{1}{D \left(\frac{p_1, p_2}{u_1, u_2} \right)} \left(-\frac{\partial p_1}{\partial u_2} u_2 + \frac{\partial p_1}{\partial u_1} u_2 \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2 \partial u_1} \\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} - E \right] = \\
& = 2\beta \left[\frac{1}{D \left(\frac{p_1, p_2}{u_1, u_2} \right)} \left(-\frac{\partial p_2}{\partial u_1} u_2 + \frac{\partial p_2}{\partial u_2} u_1 \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} \end{pmatrix} + \right. \\
& + \left(-\frac{\partial p_2}{\partial u_1} u_2 + \frac{\partial p_2}{\partial u_2} u_1 \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2} \end{pmatrix}, \frac{1}{D \left(\frac{p_1, p_2}{u_1, u_2} \right)} \left[\left(-\frac{\partial p_1}{\partial u_2} u_2 + \frac{\partial p_1}{\partial u_1} u_2 \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} \end{pmatrix} + \right. \\
& + \left. \left(-\frac{\partial p_1}{\partial u_2} u_2 + \frac{\partial p_1}{\partial u_1} u_2 \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2 \partial u_1} \\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} \right] - E \Big].
\end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} & \Pi_{u_1 u_1}(\square, u_1, u_2) = \\ & = \left[\left(-u_2 \frac{\partial p_2}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} + \left(u_2 \frac{\partial p_1}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2} \right] \frac{1}{\left| D \left(\begin{array}{c} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{array} \right) \right|} - 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Pi_{u_1 u_2}(\square, u_1, u_2) = \\ & = \left[\left(-u_2 \frac{\partial p_2}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1 \partial u_2} + \left(u_2 \frac{\partial p_1}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1 \partial u_2} \right] \frac{1}{\left| D \left(\begin{array}{c} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{array} \right) \right|}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Pi_{u_2 u_1}(\square, u_1, u_2) = \\ & = \left[\left(-u_2 \frac{\partial p_2}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1 \partial u_2} + \left(u_2 \frac{\partial p_1}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1 \partial u_2} \right] \frac{1}{\left| D \left(\begin{array}{c} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{array} \right) \right|}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Pi_{u_2 u_2}(\square, u_1, u_2) = \\ & = \left[\left(-u_2 \frac{\partial p_2}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1 \partial u_2} + \left(u_2 \frac{\partial p_1}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1 \partial u_2} \right] \frac{1}{\left| D \left(\begin{array}{c} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{array} \right) \right|} - 1, \end{aligned}$$

где $\left| D \left(\begin{array}{c} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{array} \right) \right| = \frac{\partial p_1}{\partial u_1} \frac{\partial p_2}{\partial u_2} - \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \frac{\partial p_2}{\partial u_1} \neq 0. \quad (2.3.15)$

Матрица Гесса функции $\Pi(\square, u_1, u_2)$ является симметричной, т.е.

$$\Pi_{u_1 u_2}(\square, u_1, u_2) = \Pi_{u_2 u_1}(\square, u_1, u_2).$$

Согласно критерия Сильвестра в критической точке максимум функции $\Pi(\square, u_1, u_2)$ достигается при выполнении условий

$$\Pi_{u_1 u_1}(\square, u_1, u_2) < 0, \quad (2.3.16)$$

$$\begin{vmatrix} \Pi_{u_1 u_1}(\square, u_1, u_2) & \Pi_{u_2 u_1}(\square, u_1, u_2) \\ \Pi_{u_1 u_2}(\square, u_1, u_2) & \Pi_{u_2 u_2}(\square, u_1, u_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\Pi_{u_1 u_1} (\square, u_1, u_2) \Pi_{u_2 u_2} (\square, u_1, u_2) - \left(\Pi_{u_2 u_1} (\square, u_1, u_2) \right)^2 \right). \quad (2.3.17)$$

Таким образом, оптимальность векторного управления $\bar{u}^0(t)$ можно проверить согласно новым условиям (2.3.16) – (2.3.17), которые так же назовем условиями оптимальности.

В частном случае, когда

$$p_1(u_1, u_2) \equiv p_1(u_1), \quad p_2(u_1, u_2) \equiv p_2(u_2),$$

условие оптимальности (2.3.16) – (2.3.17) приобретают вид

$$\frac{\partial p_1}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left(u_1 \frac{1}{\frac{\partial p_1}{\partial u_1}} \right) > 0, \quad (2.3.16')$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial u_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left(u_2 \frac{1}{\frac{\partial p_2}{\partial u_2}} \right) > 0, \quad (2.3.17')$$

что нетрудно проверить непосредственным вычислением.

2.4 Решение задачи нелинейной оптимизации и сходимость приближенных решений

После того как найдено оптимальное управление $u^0(t)$, согласно формуле (2.1.11), находим решение краевой задачи (2.1.1)-(2.1.3), т.е. оптимальный процесс $V^0(t, x)$, соответствующее оптимальному управлению $u^0(t)$, в виде

$$V^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left[-z_n(0) p_1[\tau, u^0(\tau)] + z_n(1) p_2[\tau, \bar{u}^0(\tau)] + f_n(\tau) \right] d\tau \right] z_n(x). \quad (2.4.1)$$

Далее, зная оптимальное управление $u^0(t)$ и оптимальный процесс $V^0(t, x)$, можно вычислить, согласно формуле (2.2.1), минимальное значение функционала

$$I[u^0(t)] = \int_0^1 [V^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T ((u_1^0(t))^2 + (u_2^0(t))^2) dt, \beta > 0. \quad (2.4.2)$$

Таким образом, найденная тройка $(u^0(t), V^0(t, x), I[u^0(t)])$ является решением задачи нелинейной оптимизации.

Поскольку на практике найти точное решение нелинейного интегрального уравнения (2.3.7) не всегда удастся, то чаще всего ограничиваются нахождением приближенного решения. Приближенное решение $\tilde{\theta}_k(t)$ подставляя в формулу (2.3.6) находим k -е приближение

$$\bar{u}_k(t) = \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}_k(t), \beta], \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.4.3)$$

оптимального управления $u^0(t)$, определяемое формулой (2.3.14), которое удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} \|u(t) - \bar{u}_k(t)\|_{H^2} &= \|\tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] - \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}_k(t), \beta]\|_{H^2} \leq \\ &\leq \varphi_0(\beta) \|\tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}_k(t)\|_{H^2} \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|\tilde{G}[\tilde{\theta}_0(t)] + \tilde{h}(t) - \tilde{\theta}_0(t)\|_{H^2}, \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

откуда следует сходимость приближенного оптимального управления к оптимальному при $k \rightarrow \infty$.

Для оптимального процесса k -е приближение, согласно (2.4.1), находим по формуле

$$V_k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (z_n^*(0, 1) \tilde{p}[\tau, u^0(\tau)] + f_n(\tau)) \right] z_n(x), \quad (2.4.5)$$

которое удовлетворяет оценке

$$\|V(t, x) - V_k(t, x)\|_{H^2}^2 \leq 2TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) P_0^2 \|u^0(t) - \bar{u}_k(t)\|_{H^2}^2. \quad (2.4.6)$$

Оценка (2.4.6) доказывается непосредственным вычислением. Она вытекает из следующего неравенства

$$\begin{aligned}
& \|V(t, x) - V_k(t, x)\|_{H^2}^2 = \\
& = \iint_{00}^{T1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n^*(0,1) [\bar{p}[\tau, \bar{u}(\tau)] - \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]] d\tau \right) dx dt \leq \\
& \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (z_n(0), z_n(1))^* [\bar{p}[\tau, \bar{u}(\tau)] - \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]] d\tau \right]^2 dt \leq \\
& \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} (z_n^2(0) + z_n^2(1)) d\tau \int_0^T \|\bar{p}[\tau, \bar{u}(\tau)] - \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]\|^2 d\tau dt \leq \\
& \leq 2T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T 2e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \cdot \|\bar{p}[\tau, \bar{u}(\tau)] - \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]\|_{H^2}^2 \leq \\
& \leq 2TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) P_0^2 \|u^0(t) - \bar{u}_k(t)\|_{H^2}^2,
\end{aligned}$$

т.е. $\|V(t, x) - V_k(t, x)\|_{H^2}^2 \leq$

$$\leq \left[2TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) P_0^2 \right]^{1/2} P_0 \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G_0[\tilde{\theta}_0(t)] + \hbar(t) - \tilde{\theta}_0(t)\|_{H^2}$$

Приближенное значение функционала находим по формуле

$$I[\bar{u}_k(t)(t)] = \int_0^1 [V_k(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \|\bar{u}_k(t)\|_{H^2}^2 dt, \quad (2.4.7)$$

для которого, согласно (2.4.2), имеет место неравенство

$$|I[u^0(t)] - I[\bar{u}_k(t)]| \leq C \|\bar{u}(t) + \bar{u}_k(t)\|_{H^2}, \quad (2.4.8)$$

где C некоторая постоянная. Из неравенства (2.4.8) следует сходимость приближенного значения функционала к точному. Соотношение (2.4.8) доказывается непосредственным вычислением. В самом деле,

$$\begin{aligned}
|I[u^0(t)] - I[\bar{u}_k(t)]| &= \left| \int_0^1 \left\{ [V(T, x) - \xi(x)]^2 - [V^{(k)}(T, x) - \xi(x)]^2 \right\} dx + \right. \\
& \left. + \beta \int_0^T \left\{ [u_1^2(t) - (u_{1k}(t))^2] + [u_2^2(t) - (u_{2k}(t))^2] \right\} dt \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 |V(T, x) + V_k(T, x)| |V(T, x) - V_k(T, x)| dx + 2 \int_0^1 |\xi| |V(T, x) - V_k(T, x)| dx + \\
&+ \beta \int_0^T \left\{ |u_1(t) + u_{1k}(t)| |u_1(t) - u_{1k}(t)| + |u_2(t) + u_{2k}(t)| |u_2 - u_{2k}(t)| \right\} dt \leq \\
&\leq \left(\int_0^1 |V(T, x) + V_k(T, x)|^2 dx \right)^{1/2} + 2 \left(\int_0^1 |\xi|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |V(T, x) - V_k(T, x)|^2 dx \right)^{1/2} + \\
&+ \beta \int_0^T \left[\|\bar{u}(t) + \bar{u}_k(t)\|_{H^2} \|\bar{u}(t) - \bar{u}_k(t)\|_{H^2} \right] dt + \\
&+ \beta \left(\int_0^T \|\bar{u}(t) + \bar{u}_k(t)\|_{H^2}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\bar{u}(t) - \bar{u}_k(t)\|_{H^2}^2 dt \right)^{1/2} = \\
&= \left(\|V(T, x) + V_k(T, x)\|_{H^2} + 2 \|\xi(x)\|_{H^2} \right) \|V(T, x) - V_k(T, x)\|_{H^2} + \\
&+ \beta \|\bar{u}(t) + \bar{u}_k(t)\|_{H^2} \|\bar{u}(t) - \bar{u}_k(t)\|_{H^2} = \\
&= \left(\|V(T, x) + V_k(T, x)\|_{H^2} + 2 \|\xi(x)\|_{H^2} \right) \cdot \\
&\cdot \left[2TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{1/2} P_0 \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G_0[\tilde{\theta}_0(t)] + \hbar(t) - \tilde{\theta}_0(t)\|_{H^2} + \\
&+ \beta \|\bar{u}(t) + \bar{u}_k(t)\|_{H^2} \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G_0[\tilde{\theta}_0(t)] + \hbar(t) - \tilde{\theta}_0(t)\|_{H^2} = \\
&= \left\{ \left(\|V(T, x) + V^{(k)}(T, x)\|_{H^2} + 2(\xi(x))_{H^2} \right) \left[2TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{1/2} P_0 + \right. \\
&\left. \beta \|\bar{u}(t) + \bar{u}_k(t)\|_{H^2} \right\} \cdot \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G_0[\tilde{\theta}_0(t)] + \hbar(t) - \tilde{\theta}_0(t)\|_{H^2}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что постоянная C может быть вычислена по формуле

$$C = \left\{ \left(\|V(T, x) + V^{(k)}(T, x)\|_{H^2} + 2 \|\xi(x)\|_{H^2} \right) \cdot \right.$$

$$\left. \left[2TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{\frac{1}{2}} P_0 + \beta \|\bar{u}(t) + \bar{u}_k(t)\|_{H^2} \right\}. \quad (2.4.9)$$

Таким образом, k -е приближение задачи нелинейной оптимизации определяется, согласно формулам (2.4.3), (2.4.5) и (2.4.7), которое, как следует из оценок (2.4.4), (2.4.6) и (2.4.8), при $k \rightarrow \infty$ сходится к точному решению определяемое формулами (2.3.14), (2.4.1) и (2.4.2).

2.5 Пример

Полученные теоретические результаты проиллюстрируем на примере модельной задачи. Рассмотрим задачу граничного управления процессом теплопередачи, где требуется минимизировать функционал

$$I[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt, \quad \beta > 0, \quad (2.5.1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_t = V_{xx} + f(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (2.5.2)$$

$$V(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (2.5.3)$$

$$V_x(t, 0) = p_1[t, \bar{u}(t)], \quad 0 < t < T,$$

$$V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = p_2[t, \bar{u}(t)], \quad 0 < t < T. \quad (2.5.4)$$

Слабо обобщенное решение краевой задачи (2.5.2)-(2.5.4) находим по формуле

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} [-z_n(0) p_1[\tau, \bar{u}(\tau)] + z_n(1) p_2[\tau, \bar{u}(\tau)] + f_n(\tau)] d\tau \right] z_n(x).$$

Условия оптимальности имеют вид

$$2\beta \begin{pmatrix} u_1^0(t) \\ u_2^0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial u_1} & \frac{\partial p_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial p_1}{\partial u_2} & \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega(t,0) \\ \omega(t,1) \end{pmatrix}, \quad (2.5.5)$$

$$\Pi_{u_i u_j}(\square, u_1, u_2) < 0, \quad (2.5.6)$$

$$\begin{vmatrix} \Pi_{u_1 u_1}(\square, u_1, u_2) & \Pi_{u_1 u_2}(\square, u_1, u_2) \\ \Pi_{u_2 u_1}(\square, u_1, u_2) & \Pi_{u_2 u_2}(\square, u_1, u_2) \end{vmatrix} > 0. \quad (2.5.6')$$

Здесь $\Pi_{u_i u_j}(\square, u_1, u_2)$ - частные производные 2-го порядка,

$\omega(t, x)$ - решение сопряженной краевой задачи

$$\omega_t + \omega_{xx} = 0, \quad (t, x) \in Q, \quad (2.5.7)$$

$$\omega(T, x) + 2[V(T, x) - \xi(x)] = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (2.5.8)$$

$$\omega_x(t, 0) = 0, \quad \omega_x(t, 1) + \alpha\omega(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (2.5.9)$$

Решение сопряженной краевой задачей (2.5.7) – (2.5.9) определяется по формуле

$$\begin{aligned} \omega(t, x) = & -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-h_n + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} [-z_n(0)P_1(t, u_1(\tau), u_2(\tau)) + \\ & + z_n(1)P_2(t, u_1(\tau), u_2(\tau))] d\tau) e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(x). \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Оптимальное управление согласно условиям (2.5.5) определяется как решение системы нелинейных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} & \beta D^{-1} \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \begin{pmatrix} G_n(t, 0) \\ G_n(t, 1) \end{pmatrix} (G_n(\tau, 0), G_n(\tau, 1)) \begin{pmatrix} p_1(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)) \\ p_2(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)) \end{pmatrix} d\tau = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_n(t, 0) \\ G_n(t, 1) \end{pmatrix} h_n, \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

где $G_n(t, 0) = e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(0)$, $G_n(t, 1) = e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(1)$,

$$h_n = \xi_n - e^{-\lambda_n^2 T} \psi_n - \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} f_n(t) dt,$$

и удовлетворяет дополнительному условию (2.5.6) и (2.5.6')

Сначала решаем нелинейное интегральное уравнение.

Положим

$$\beta D^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \bar{\theta}(t). \quad (2.5.12)$$

Это равенство при выполнении условия (2.1.5) однозначно разрешается относительно $\tilde{u}(t)$, т.е. существует функция $\tilde{\varphi}(\cdot)$ такая, что

$$\tilde{u}(t) = \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] = \begin{pmatrix} \varphi_1[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \\ \varphi_2[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \end{pmatrix}. \quad (2.5.13)$$

Согласно (2.5.12) и (2.5.13) уравнение (2.5.11) приводим к виду

$$\begin{aligned} \tilde{G}[\tilde{\theta}(t)] &= \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1) \tilde{P}(t, \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta]) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) h_n \end{aligned}$$

или операторному виду

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{G}[\tilde{\theta}(t)]. \quad (2.5.14)$$

Эта система нелинейных интегральных уравнений при выполнении следующих условиях:

1. $\bar{p}[t, \bar{u}(t)] \in H^2(0, T), \quad \forall \bar{u}(t) \in H^2(0, T);$
2. $D \left(\frac{\bar{p}(t, \bar{u})}{\bar{u}} \right) \neq 0, \quad \forall t \in [0, T];$
3. $\left\| \tilde{p}[t, \tilde{u}(t)] - \tilde{p}[t, \bar{u}(t)] \right\|_{H^2} \leq p_0 \left\| \tilde{u}(t) - \bar{u}(t) \right\|_{H^2}, \quad p_0 > 0;$
4. $\left\| \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] - \tilde{\varphi}[t, \bar{\theta}(t), \beta] \right\|_{H^2} \leq \varphi_0(\beta) \left\| \tilde{\theta}(t) - \bar{\theta}(t) \right\|_{H^2};$
5. $\gamma = M_1 P_0 \varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right), \quad M_1 > 0;$

имеет единственное решение

$$\bar{\theta}(t) \in H^2(0, T).$$

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по схеме

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_n(t) &= \tilde{G}[\tilde{\theta}_{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \tilde{\theta}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(t), \end{aligned}$$

где θ_0 произвольный элемент пространства $H^2(0, T)$, и удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{\theta}(t) - \theta_n(t)\|_{H^2} \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \|\tilde{G}[\theta_0(t)] - \theta_0(t) + \hbar(t)\|_{H^2}. \quad (2.5.15)$$

Если принять $\theta_0(t) = \hbar(t)$, то эта оценка (2.3.13) примет вид

$$\|\tilde{\theta}(t) - \theta_n(t)\|_{H^2} \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \|\tilde{G}[\theta_0(t)]\|_{H^2}. \quad (2.5.15')$$

Найденное решение $\tilde{\theta}(t)$, подставляя в формулу (2.5.13) решение нелинейного интегрального уравнения (2.5.12) находим по формуле

$$u^0(t) = \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] = \begin{pmatrix} \varphi_1[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \\ \varphi_2[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \end{pmatrix}. \quad (2.5.16)$$

Оптимальный процесс, его приближение определяются формулами

$$\begin{aligned} V^0(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} [-z_n(0) p_1[\tau, \bar{u}^0(\tau)] + \right. \\ &\quad \left. + z_n(1) p_2[\tau, \bar{u}^0(\tau)] + f_n(\tau)] d\tau \right] z_n(x), \\ V_k(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (z_n^*(0, 1) \tilde{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)] + f_n(\tau)) \right] z_n(x) \end{aligned}$$

и удовлетворяют оценке

$$\|V(t, x) - V_k(t, x)\|_{H^2}^2 \leq 2TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) P_0^2 \|\bar{u}(t) - \bar{u}_k(t)\|_{H^2}^2. \quad (2.5.17)$$

Минимальное значение функционала, его приближение определяются формулами

$$I[u^0(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \|u^0(t)\|_{H^2}^2 dt, \quad \beta > 0,$$

$$I[\bar{u}_k(t)] = \int_0^1 [V_k(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \|\bar{u}_k(t)\|_{H^2}^2 dt, \quad \beta > 0,$$

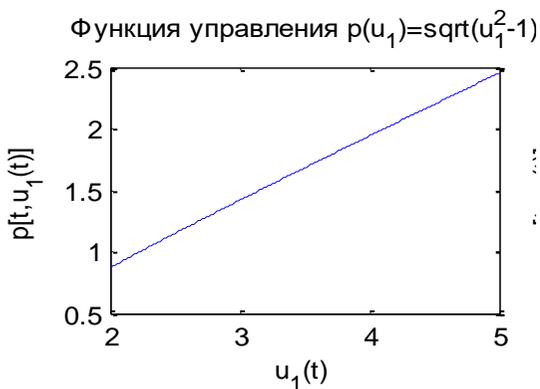
и удовлетворяют оценке

$$|I[\bar{u}(t)] - I[\bar{u}_k(t)]| \leq C \|\bar{u}(t) + \bar{u}_k(t)\|_{H^2}, \quad (2.5.18)$$

$$C = \left\{ \left(\|V(T, x) + V^{(k)}(T, x)\|_{H^2} + 2\|\xi(x)\|_{H^2} \right) \left[2TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{\frac{1}{2}} P_0 + \beta \|\bar{u}(t) + \bar{u}_k(t)\|_{H^2} \right\}.$$

Расчет примера произведен при следующих данных задачи оптимизации:

- 1) $T = 1$;
- 2) $\xi(x) = \xi_0(x-1), \quad 0 \leq x \leq 1$;
- 3) $\psi(x) = x-1, \quad 0 \leq x \leq 1$;
- 4) $\alpha = 21.15$;
- 5) $p_1[t, u(t)] = \frac{1}{2} \sqrt{u^2(t) - 1}, \quad 2 < u(t) < 5$;
 $p_2[t, u(t)] = \ln \sqrt{u^2(t) + 1}, \quad -1 \leq u(t) \leq 1$;



1) Функция управления $p(u_2)=0.5\ln(u_2^2+1)$

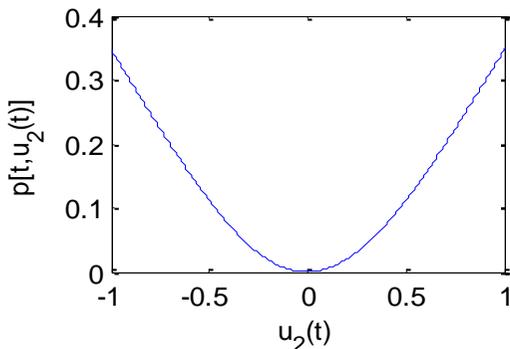


Рисунок 2.1

И при этом выполняется второе условие оптимальности в виде

$$\frac{\partial p_1}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left(u_1 \frac{1}{\frac{\partial p_1}{\partial u_1}} \right) = \frac{u^2(t)}{u^2(t) - 1} > 0, \quad 2 \leq u(t) \leq 5.$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial u_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left(u_2 \frac{1}{\frac{\partial p_2}{\partial u_2}} \right) = 2 \frac{u^2(t)}{u^2(t)+1} > 0, \quad -1 \leq u(t) \leq 1.$$

В частности и на оптимальном управлении. Для функции $p[t, u(t)]$

$$p_{01} = \max_{\substack{u(t) \\ 0 \leq t \leq T}} |p_u[t, u(t)]| = 0.5774;$$

$$p_{02} = \max_{\substack{u(t) \\ 0 \leq t \leq T}} |p_{u_2}[t, u(t)]| = 0.5000$$

$$p_0 = \max(p_{01}, p_{02}) = 0.5774.$$

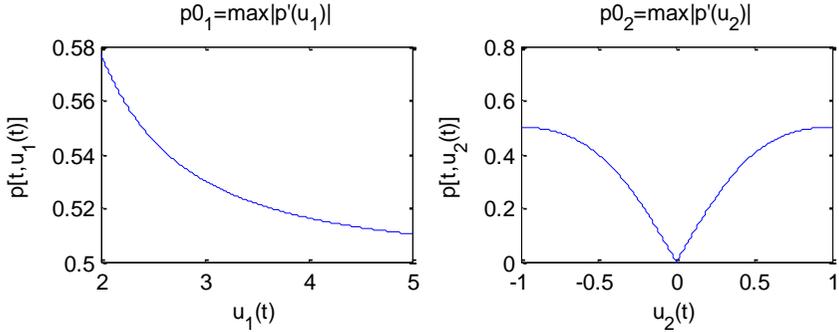


Рисунок 2.2

$$6) \quad \beta u(t) p_{u_1}^{-1}[t, u(t)] = 2\beta \sqrt{u^2(t) - 1} = \theta_1(t);$$

$$\beta u(t) p_{u_2}^{-1}[t, u(t)] = \beta(u^2(t) + 1) = \theta_2(t);$$

$$u_1(t) = \pm \frac{1}{2\beta} \sqrt{\theta_1^2(t) + 4\beta^2} =$$

$$= \varphi_1[t, \theta_1(t), \beta], \quad \beta\sqrt{3} < \theta_1(t) \leq 2\sqrt{6}\beta, \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$u_2(t) = \pm \sqrt{\frac{\theta_2(t) - \beta}{\beta}} = \varphi_2[t, \theta_2(t), \beta], \quad \beta < \theta_2(t) \leq 2\beta \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$\varphi_{01}(\beta) = \max_{\substack{\theta_1(t) \\ 0 \leq t \leq T}} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta_1} \right| = \left| \frac{1}{2\beta} \frac{\theta_1(t)}{\sqrt{\theta_1^2(t) + 4\beta^2}} \right| \leq \frac{1}{2\beta} \frac{\theta_1(t)}{\sqrt{\theta_1^2(t) + 4\beta^2}} = \frac{0,46}{\beta};$$

$$\varphi_{02}(\beta) = \max_{\substack{\theta_2(t) \\ 0 \leq t \leq T}} \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta_2} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{\beta}\sqrt{\theta_2(t) - \beta}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\beta - \beta}} = \frac{1}{2\beta};$$

$$\varphi_0(\beta) = \max(\varphi_{01}(\beta), \varphi_{02}(\beta)) = \frac{1}{2\beta}.$$

7) Постоянная M_1 удовлетворяет оценке

$$M_1 = \max_{0 \leq t \leq T} (1 - e^{-\lambda_n^2(T-t)}) \leq 1;$$

$$8) \gamma = 1 * 0.57 * \frac{1}{2\beta} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < 1;$$

$$9) |I[u(t)] - I[u_k(t)]| \leq Cu^0(t) - u_k(t);$$

$$C = \left\{ (2\|V(T, x)\|_{H^2} + 2\|\xi(x)\|_{H^2}) \cdot \right.$$

$$\left. \left[TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{\frac{1}{2}} P_0 + 2\beta \|(u_1(t), u_2(t))\|_{H^2} \right\}.$$

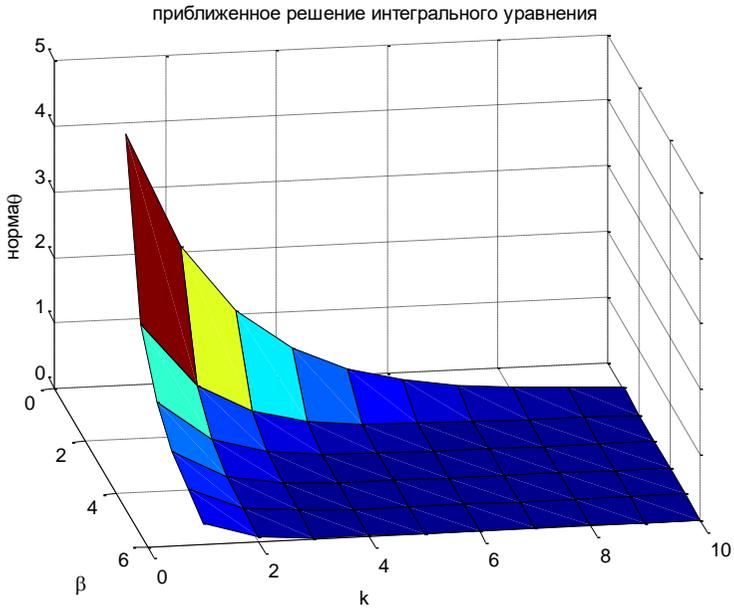
10) Значения λ_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ для расчета оценок совпадают со значениями из первого примера.

Ниже приводятся результаты численных расчетов выполненных в *Matlab 7.6.0 (R2008a)*. Листинг программы прилагается в приложении В.

1) Зависимость k -го приближения от β нормы $\|\tilde{\theta}(t) - \theta_n(t)\|_{H^2}$

Таблица 2.1

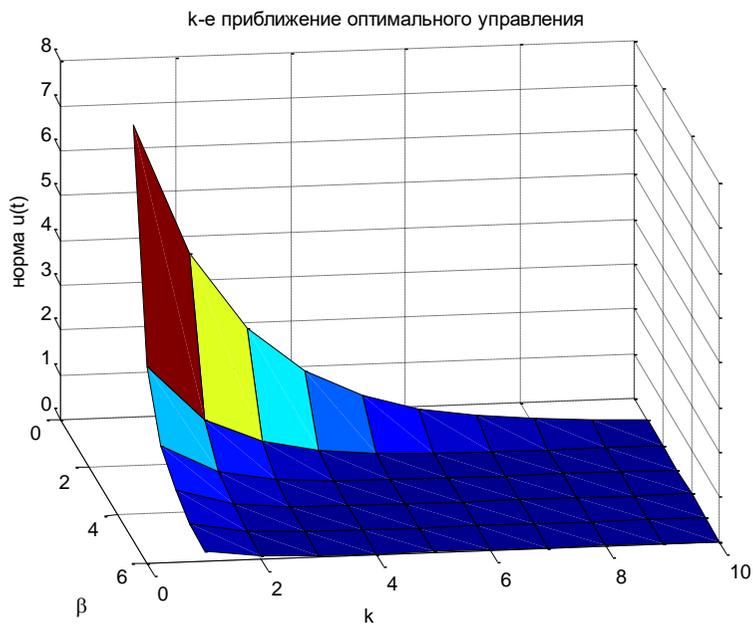
$\beta \backslash k$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
1.	4.2373	1.7566	0.9710	0.6181	0.4286	0.3149
2.	2.4917	0.7747	0.3426	0.1817	0.1080	0.0694
3.	1.4652	0.3417	0.1209	0.0534	0.0272	0.0153
4.	0.8616	0.1507	0.0426	0.0157	0.0069	0.0034
5.	0.5067	0.0665	0.0150	0.0046	0.0017	0.0007
6.	0.2979	0.0293	0.0053	0.0014	0.0004	0.0002
7.	0.1752	0.0129	0.0019	0.0004	0.0001	0.0000
8.	0.1030	0.0057	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
9.	0.0606	0.0025	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0356	0.0011	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000



2) Зависимость k -го приближения от β нормы $\|u(t) - u_k(t)\|_H$

Таблица 2.2

$\beta \backslash k$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
1.	7.0621	2.1958	0.9710	0.5151	0.3062	0.1968
2.	4.1529	0.9684	0.3426	0.1515	0.0772	0.0434
3.	2.4421	0.4271	0.1209	0.0445	0.0194	0.0096
4.	1.4360	0.1884	0.0426	0.0131	0.0049	0.0021
5.	0.8445	0.0831	0.0150	0.0038	0.0012	0.0005
6.	0.4966	0.0366	0.0053	0.0011	0.0003	0.0001
7.	0.2920	0.0162	0.0019	0.0003	0.0001	0.0000
8.	0.1717	0.0071	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
9.	0.1010	0.0031	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
10.	0.0594	0.0014	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000



3) Зависимость k -го приближения от β нормы $\|V(t, x) - V_k(t, x)\|_H$

Таблица 2.3

$\beta \backslash k$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
1.	3.1874	0.9910	0.4382	0.2325	0.1382	0.0888
2.	1.8743	0.4371	0.1546	0.0684	0.0348	0.0196
3.	1.1022	0.1928	0.0546	0.0201	0.0088	0.0043
4.	0.6481	0.0850	0.0192	0.0059	0.0022	0.0010
5.	0.3811	0.0375	0.0068	0.0017	0.0006	0.0002
6.	0.2241	0.0165	0.0024	0.0005	0.0001	0.0000
7.	0.1318	0.0073	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000
8.	0.0775	0.0032	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
9.	0.0456	0.0014	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
10.	0.0268	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

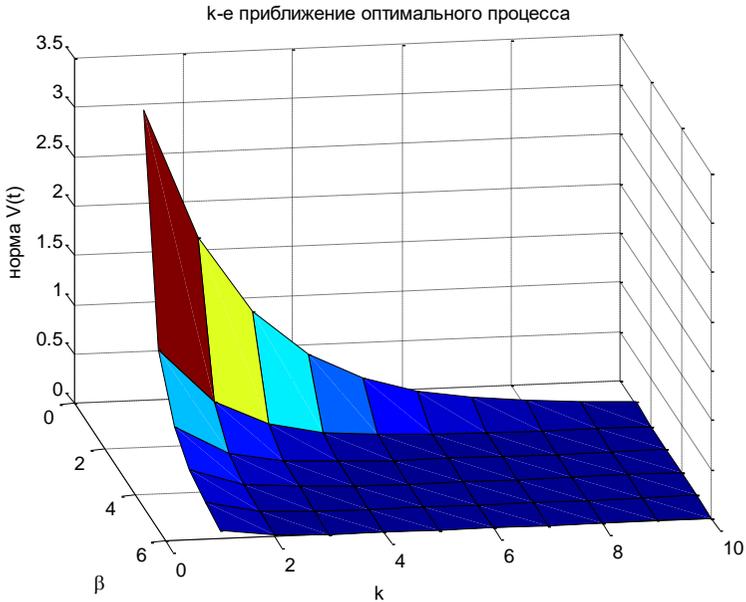


Рисунок 2.5

4) Зависимость k -го приближения от β модуля $|I[u(t)] - I[u_k(t)]|$

Таблица 2.4

$\beta \backslash k$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
1.	56.7826	17.6548	7.8072	4.1417	2.4617	1.5825
2.	33.3907	7.7864	2.7546	1.2178	0.6204	0.3490
3.	19.6353	3.4341	0.9719	0.3581	0.1564	0.0770
4.	11.5464	1.5145	0.3429	0.1053	0.0394	0.0170
5.	6.7898	0.6680	0.1210	0.0310	0.0099	0.0037
6.	3.9927	0.2946	0.0427	0.0091	0.0025	0.0008
7.	2.3479	0.1299	0.0151	0.0027	0.0006	0.0002
8.	1.3807	0.0573	0.0053	0.0008	0.0002	0.0000
9.	0.8119	0.0253	0.0019	0.0002	0.0000	0.0000
10	0.4774	0.0111	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000

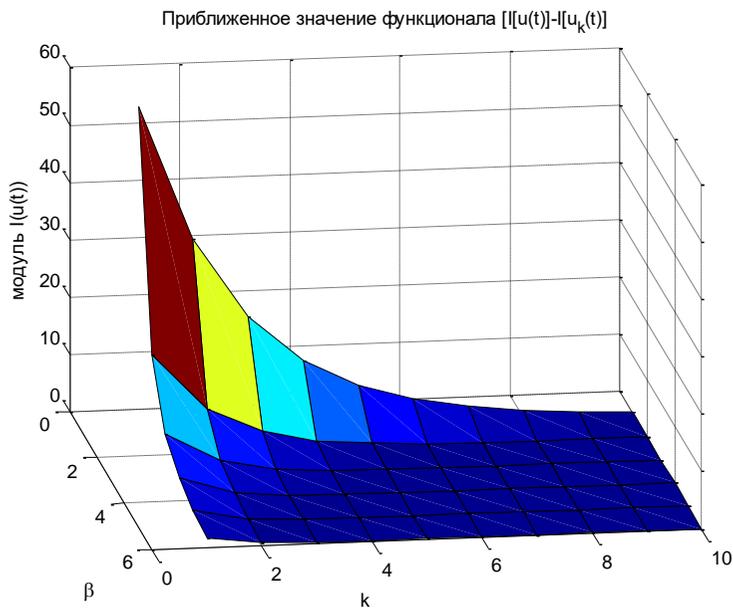


Рисунок 2.6

Вывод

Во второй главе получены следующие результаты:

1. исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации в случае двухстороннем векторном управлении; установлено, что оптимальное векторное управление удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений и дополнительным условиям в виде неравенств;
2. разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказана его сходимость к точному; решению по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу;
3. на модельном примере показана численная реализация полученных результатов;
4. проведено исследование зависимости сходимости приближенных решений интегрального уравнения, оптимального управления, оптимального процесса и значения функционала от коэффициента β .

ГЛАВА 3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПРИ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ

В этой главе исследованы решения задач оптимального управления, когда тепловой процесс описывается вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями, граничное условие нелинейно содержит параметр управления. Как показали исследования, оптимальное управление находится как решение нелинейного интегрального уравнения и удовлетворяет дополнительному условию. Установлено, что задача нелинейного оптимального граничного управления, описываемая вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями однозначно разрешается и разработан алгоритм построения решения в виде тройки. Построены приближенные решения и доказано, что эти решения сходятся к точному решению. Установлено, что следует различать 3 вида приближенных решений.

3.1 Краевая задача управляемого процесса

Рассмотрим краевую задачу управляемого теплового процесса $v(t, x)$, $(t, x) \in Q = \{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$, [25,26,36]

$$v_t = v_{xx} + \lambda \int_0^t K(t, \tau) v(\tau, x) d\tau + g(t, x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.1.1)$$

$$v(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.1.2)$$

$$v_x(t, 0) = 0, \quad v_x(t, 1) + \alpha v(t, 1) = p[t, u(t)], \quad 0 < t \leq T, \quad (3.1.3)$$

где $g(t, x) \in H(Q)$ - заданная функция, описывающая изменения внешнего источника; $\psi(x) \in H(0, 1)$ - заданная функция, описывающая начальное состояние управляемого процесса; $p[t, u(t)] \in H(0, T)$ - функция граничного внешнего воздействия,

нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0, T)$ и по функциональной переменной $u(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial p[t, u(t)]}{\partial u} \neq 0, \quad \forall t \in [0, T]; \quad (3.1.4)$$

ядро

$$K_0 = \sup_{(t, \tau) \in D} |K(t, \tau)|, \quad (3.1.5)$$

т.е. $K(t, \tau)$ – известная ограниченная функция; λ – параметр, постоянная $\alpha > 0$, T – фиксированный момент времени, $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y .

Определение 3.1. Любая функция $v(t, x) \in H(Q)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_0^1 (v\phi)_{t_1}^2 dx &= \iint_{t_1 0}^{t_2 1} [(\phi_t + \phi_{xx})v(t, x) + \\ &+ \left(\lambda \int_0^t K(t, \tau)v(\tau, x) d\tau + g(t, x) \right) \phi(t, x)] dx dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} [p[t, u(t)]\phi(t, 1) - (\phi_x(t, 1) + \alpha\phi(t, 1))v(t, 1) + \phi_x(t, 0)v(t, 0)] dt, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

при произвольных моментах времени t_1 и t_2 ($0 < t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$) и для любой функции $\phi(t, x) \in C^{1,2}(Q)$; начальному и граничному условиям в слабом смысле, т.е.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 v(t, x)\phi_0(x) dx &= \int_0^1 \psi(x)\phi_0(x) dx, \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^T (v_x(t, x) - \alpha v(t, x))\phi_1(t) dt &= \int_0^T [p[t, u(t)]\phi_1(t) dt, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

любых функций $\phi_0(x) \in H(0, 1)$ и $\phi_1(t) \in H(0, T)$, где $C^{1,2}(Q)$ – пространство функций, имеющих производную 1-порядка t и 2-

порядка по X , называется слабо обобщенным решением (3.1.1) – (3.1.3).

Решение (3.1.1) – (3.1.3) ищется как

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) z_n(x), \quad (3.1.8)$$

$$\text{здесь } v_n(t) = \langle v(t, x), z_n(x) \rangle = \int_0^1 v(t, x) z_n(x) dx, \quad (3.1.9)$$

являются коэффициентами Фурье функции $v(t, x)$, символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в гильбертовом пространстве $H(0,1)$, а $z_n(x)$ определяется как решение краевой задачи [32]

$$z_n''(x) + \lambda_0^2 z_n(x) = 0, \quad z_n'(0) = 0, \quad z_n'(1) + \alpha z_n(1) = 0 \quad (3.1.10)$$

Собственные значения λ находятся как решения трансцендентного уравнения $\lambda \operatorname{tg} \lambda = \alpha$ и удовлетворяют условиям

$$\lambda_n \leq \lambda_{n+1}, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty \quad \text{и} \quad (n-1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1),$$

(3.1.11) а соответствующие собственные функции краевой задачи имеют вид

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}} \cos \lambda_n x, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.1.12)$$

и образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(0,1)$.

Будем пользоваться также соотношениями

$$g(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) z_n(x), \quad g_n(t) = \langle g(t, x), z_n(x) \rangle = \int_0^1 g(t, x) z_n(x) dx$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n z_n(x), \quad \psi_n = \langle \psi(x), z_n(x) \rangle = \int_0^1 \psi(x) z_n(x) dx. \quad (3.1.13)$$

С использованием методик работы [76], формальное решение (3.1.1)–(3.1.3) находится согласно (3.1.6). С учетом

произвольности функции $\phi(t, x)$ в (3.1.6) положим $\phi(t, x) \equiv z_n(x)$.

Тогда, после несложного вычисления

$$\begin{aligned} \int_0^1 (v(t, x) z_n(x)) \Big|_{t_1}^{t_2} dx &= \int_0^1 \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} v(t, x) z_n(x) dt dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \int_0^1 v(t, x) z_n(x) dx dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \langle v(t, x), z_n(x) \rangle dt, \\ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 v(t, x) (z_n(x))_t dx dt &= 0, \\ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 v(t, x) z_n''(x) dx dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 v(t, x) \lambda_n^2 z_n(x) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \lambda_n^2 \langle v(t, x), z_n(x) \rangle dt, \\ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \lambda \int_0^t K(t, \tau) v(\tau, x) d\tau z_n(x) dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} \lambda \int_0^t K(t, \tau) \langle v(\tau, x), z_n(x) \rangle d\tau dt, \end{aligned}$$

(3.1.6) примет вид

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \langle v(t, x), z_n(x) \rangle + \lambda_n^2 \langle v(t, x), z_n(x) \rangle - \right. \\ &\left. - \lambda \int_0^t K(t, \tau) \langle v(\tau, x), z_n(x) \rangle d\tau - \right. \\ &\left. - \langle g(t, x), z_n(x) \rangle - z_n(1) p[t, u(t)] \right\} dt \equiv 0. \end{aligned}$$

Здесь, полагая $t_2 = t$, и дифференцируя по t

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \langle v(t, x), z_n(x) \rangle + \lambda_n^2 \langle v(t, x), z_n(x) \rangle = \\ &= \lambda \int_0^t K(t, \tau) \langle v(\tau, x), z_n(x) \rangle d\tau + \\ &+ \langle g(t, x), z_n(x) \rangle + z_n(1) p[t, u(t)], \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

получим интегро-дифференциальное уравнение, которое будем решать с «начальным» условием

$$\langle v(t, x), z_n(x) \rangle \Big|_{t=t_1} = \langle v(t_1, x), z_n(x) \rangle \quad (3.1.15)$$

для каждого фиксированного $n = 1, 2, 3, \dots$. Решение задачи Коши (3.1.14)-(3.1.15) находим по формуле

$$\begin{aligned} < v(t, x), z_n(x) > = e^{-\lambda_n^2(t-t_1)} < v(t_1, x), z_n(x) > + \\ & + \int_{t_1}^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left(\lambda \int_0^\tau K(\tau, s) < v(s, x), z_n(x) > ds + \right. \\ & \left. + < g(\tau, x), z_n(x) > + p[\tau, u(\tau)] z_n(1) \right) d\tau, \end{aligned}$$

рассматривая правую часть уравнения (3.1.14) как свободный член.

Отсюда, учитывая (3.1.7), (3.1.13) и устремляя $t_1 \rightarrow 0$, относительно $v_n(t) = < v(t, x), z_n(x) >$ получим линейное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} v_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \\ + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left(\lambda \int_0^\tau K(\tau, s) v_n(s) ds + g_n(\tau) + p[\tau, u(\tau)] z_n(1) \right) d\tau. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Легко видеть, что имеет место «начальное» условие

$$v_n(0) = \psi_n. \quad (3.1.17)$$

С помощью формулы Дирихле

$$\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \lambda \int_0^\tau K(\tau, s) v_n(s) ds d\tau = \lambda \int_0^t \int_s^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K(\tau, s) d\tau v_n(s) ds,$$

уравнение (3.1.16) перепишем в виде

$$v_n(t) = \lambda \int_0^t K_n(t, s) v_n(s) ds + a_n(t), \quad (3.1.18)$$

где

$$K_n(t, s) = \int_s^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K(\tau, s) d\tau, \quad (3.1.19)$$

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u(\tau)] \right) d\tau. \quad (3.1.20)$$

Решение интегрального уравнения (3.1.18) будем искать в виде бесконечного степенного ряда по степеням λ [66]

$$v(t) = v_{n,0}(t) + \lambda v_{n,1}(t) + \lambda^2 v_{n,2}(t) + \dots + \lambda^i v_{n,i}(t) + \dots \quad (3.1.21)$$

Подставляя формально этот ряд в (3.1.18) получим:

$$\begin{aligned} & v_{n,0}(t) + \lambda v_{n,1}(t) + \lambda^2 v_{n,2}(t) + \dots + \lambda^i v_{n,i}(t) + \dots = \\ & = \lambda \int_0^t K(t,s) [v_{n,0}(s) + \lambda v_{n,1}(s) + \lambda^2 v_{n,2}(s) + \dots + \lambda^i v_{n,i}(s) + \dots] ds + a_n(t). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ , найдем

$$v_{n,0}(t) = a_n(t),$$

$$v_{n,1}(t) = \int_0^t K(t,s) v_{n,0}(s) ds = \int_0^t K(t,s) a_n(s) ds,$$

$$v_{n,2}(t) = \int_0^t K(t,s) v_{n,1}(s) ds = \int_0^t K(t,\eta) \int_0^s K_{n,1}(\eta,s) a_n(s) ds d\eta =$$

$$= \int_0^t \int_s^t K(t,\eta) K_{n,1}(\eta,s) a_n(s) d\eta ds =$$

$$= \int_0^t \left(\int_s^t K(t,\eta) K_{n,1}(\eta,s) d\eta \right) a_n(s) ds =$$

$$= \left| K_{n,2}(t,s) = \int_s^t K(t,\eta) K_{n,1}(\eta,s) d\eta \right| = \int_0^t K_{n,2}(t,s) a_n(s) ds,$$

$$v_{n,3}(t) = \int_0^t K(t,s) v_{n,2}(s) ds = \int_0^t K(t,\eta) \int_0^s K_{n,2}(\eta,s) a_n(s) ds d\eta =$$

$$= \int_0^t \int_s^t K(t,\eta) K_{n,2}(\eta,s) a_n(s) d\eta ds =$$

$$= \int_0^t \left(\int_s^t K(t,\eta) K_{n,2}(\eta,s) d\eta \right) a_n(s) ds =$$

$$= \left| K_{n,3}(t,s) = \int_s^t K(t,\eta) K_{n,2}(\eta,s) d\eta \right| = \int_0^t K_{n,3}(t,s) a_n(s) ds,$$

.....

аналогично

$$v_{n,i}(t) = \int_0^t \left(\int_s^t K(t, \eta) K_{n,i-1}(\eta, s) d\eta \right) a(s) ds = \int_0^t K_{n,i}(t, s) a_n(s) ds, \quad (3.1.22)$$

Используя (3.1.22), равенство (3.1.21) можно записать так

$$\begin{aligned} v_n(t) &= a_n(t) + \lambda \int_0^t K_{n,1}(t, s) a(s) ds + \dots + \lambda^i \int_0^t K_{n,i}(t, s) a_n(s) ds + \dots = \\ &= a_n(t) + \lambda \int_0^t [K_{n,1}(t, s) + \lambda K_{n,2}(t, s) + \dots + \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s) + \dots] a_n(s) ds. \end{aligned}$$

Решение интегрального уравнения (3.1.18) находится по формуле [66]

$$v_n(t) = a_n(t) + \lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds, \quad (3.1.23)$$

здесь

$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.24)$$

резольвента ядра $K_n(t, s) \equiv K_{n,1}(t, s)$, а повторные ядра $K_{n,i}(t, s)$ определяем по формуле [66]

$$K_{n,i+1}(t, s) = \int_s^t K_n(t, \eta) K_{n,i}(\eta, s) d\eta, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.1.25)$$

для каждого фиксированного $n = 1, 2, 3, \dots$. Далее покажем, что ряд Неймана (3.1.24) сходится. С учетом (3.1.19) и (3.1.25), непосредственным вычислением устанавливаются следующие оценки

$$|K_{n,1}(t, s)| = |K_n(t, s)| \leq \frac{K_0}{\lambda_n^2},$$

$$|K_{n,2}(t, s)| = \left| \int_s^t K(t, \eta) K_1(\eta, s) d\eta \right| = \left(\frac{K_0}{\lambda_n^2} \right)^2 (t-s),$$

$$|K_{n,3}(t, s)| = \left| \int_s^t K(t, \eta) K_2(\eta, s) d\eta \right| = \frac{K_0}{\lambda_n^2} \left(\frac{K_0}{\lambda_n^2} \right)^2 \int_s^t \eta d\eta = \left(\frac{K_0}{\lambda_n^2} \right)^3 \frac{(t-s)^2}{2},$$

.....

$$|K_{n,i}(t,s)| \leq \left(\frac{K_0}{\lambda_n^2} \right)^i \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!}, \quad i=1,2,3,\dots \quad (3.1.26)$$

Тогда ряд Неймана (3.1.24) мажорируется числовым рядом

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t,s) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^{i-1} |K_{n,i}(t,s)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{K_0}{\lambda_n^2} \right)^i \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} \leq \\ &\leq \frac{K_0}{\lambda_n^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!} \left(\frac{|\lambda| K_0 (t-s)}{\lambda_n^2} \right)^{i-1} = \frac{K_0}{\lambda_n^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 (t-s)}{\lambda_n^2}} \leq \frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}, \end{aligned}$$

который сходится при каждом фиксированном $n=1,2,3,\dots$, для любого значения параметра λ . Резольвента $R_n(t,s,\lambda)$ удовлетворяет следующим оценкам

$$|R_n(t,s,\lambda)| \leq \frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}, \quad n=1,2,3,\dots, \quad (3.1.27)$$

и как сумма абсолютно сходящегося ряда, является непрерывной функцией.

Таким образом, решение краевой задачи (3.1.1)-(3.1.3) находим по формуле (3.1.8), где $v_n(t)$ определяется по формуле (3.1.23) как единственное решение интегрального уравнения (3.1.18). Согласно (3.1.17) это решение удовлетворяет начальному условию (3.1.2).

Теперь покажем, что это решение является элементом пространства $H(Q)$. Учитывая (3.1.19), (3.1.20) и соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (n-1)^2} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6},$$

непосредственным вычислением нетрудно показать, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \iint_{00}^{T1} v^2(t,x) dx dt &= \iint_{00}^{T1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) z_n(x) \right)^2 dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2(t) dt = \\ &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^t R_n(t,s,\lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right)^2 dt \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda^2 \left(\int_0^T R_n^2(t, s, \lambda) ds \int_0^T a_n^2(s) ds + a_n^2(t) \right) \right\} dt .$$

Далее, применяя интегральное неравенство Коши – Буняковского и с учетом следующих оценок

$$1) \int_0^T R_n^2(T, s, \lambda) ds \leq \int_0^T \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda|K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 ds \leq \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda|K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 T ;$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^T a_n^2(s) ds &= \\ &= \int_0^T \left(e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} g_n(\tau) d\tau + \int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} z_n(1) p[\tau, u(\tau)] d\tau \right)^2 ds \leq \\ &\leq 3 \int_0^T \left(e^{-2\lambda_n^2 s} \psi_n^2 + \int_0^s e^{-2\lambda_n^2(s-\tau)} d\tau \int_0^s g_n^2(\tau) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^s e^{-2\lambda_n^2(s-\tau)} z_n^2(1) d\tau \int_0^s p^2[\tau, u(\tau)] d\tau \right) ds \leq 3 \int_0^T \left(e^{-2\lambda_n^2 s} \psi_n^2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)} d\tau \int_0^T g_n^2(\tau) d\tau + 2T \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)} d\tau \int_0^T p^2[\tau, u(\tau)] d\tau \right) ds \leq \\ &\leq 3 \int_0^T \left(\frac{1}{2\lambda_n^2} \psi_n^2 + \frac{T}{2\lambda_n^2} \int_0^T g_n^2(\tau) d\tau + \frac{2T}{2\lambda_n^2} \int_0^T p^2[\tau, u(\tau)] d\tau \right) ds \leq \\ &\leq \frac{3}{2\lambda_n^2} \int_0^T \left(\psi_n^2 + T \int_0^T g_n^2(\tau) d\tau + 2T \int_0^T p^2[\tau, u(\tau)] d\tau \right) ds \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \psi_n^2 = \left(\int_0^1 \psi(x) z_n(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 \psi^2(x) dx \int_0^1 z_n^2(x) dx = \int_0^1 \psi^2(x) dx = \|\psi(x)\|_{H(0,1)}^2 \right| \\
& \leq \int_0^T g_n^2(\tau) d\tau = \int_0^T \left(\int_0^1 g(\tau, x) z_n(x) dx \right)^2 d\tau \leq \\
& \leq \int_0^T \int_0^1 g^2(\tau, x) dx d\tau \int_0^1 z_n^2(x) dx = \|g(\tau, x)\|_{H(Q)}^2; \\
& \int_0^T p^2[\tau, u(\tau)] d\tau = \|p[\tau, u(\tau)]\|_{H(0,T)}^2 \\
& \leq \frac{3T}{2\lambda_n^2} \left[\|\psi(x)\|_{H(0,1)}^2 + T \|g(\tau, x)\|_{H(Q)}^2 + 2T \|p[\tau, u(\tau)]\|_{H(0,T)}^2 \right];
\end{aligned}$$

$$3) a_n^2(t) =$$

$$\begin{aligned}
& = \left(e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n(1) p[\tau, u(\tau)] d\tau \right)^2 \leq \\
& \leq 3 \left(e^{-2\lambda_n^2 t} \psi_n^2 + \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_0^T g_n^2(\tau) d\tau + \frac{2}{2\lambda_n^2} \int_0^T p^2[\tau, u(\tau)] d\tau \right) \leq \\
& \leq 3 \left(e^{-2\lambda_n^2 t} \psi_n^2 + \frac{1}{2\lambda_n^2} \|g(\tau, x)\|_H^2 + \frac{2}{2\lambda_n^2} \|p[\tau, u(\tau)]\|_H^2 \right);
\end{aligned}$$

ПОЛУЧИМ СООТНОШЕНИЕ

$$\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right)^2 dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \frac{3T}{2\lambda_n^2} \left[\|\psi(x)\|_H^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + 2T \|p[\tau, u(\tau)]\|_H^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. + 3 \left[e^{-2\lambda_n^2 t} \psi_n^2 + \frac{1}{2\lambda_n^2} \|g(\tau, x)\|_H^2 + \frac{2}{2\lambda_n^2} \|p[\tau, u(\tau)]\|_H^2 \right] \right\} dt \leq \\
&2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \frac{3T}{2\lambda_n^2} \left[\|\psi(x)\|_H^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + 2T \|p[\tau, u(\tau)]\|_H^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. + 3 \left[\frac{1}{2\lambda_n^2} \|\psi(x)\|_H^2 + \frac{T}{2\lambda_n^2} \|g(\tau, x)\|_H^2 + \frac{2T}{2\lambda_n^2} \|p[\tau, u(\tau)]\|_H^2 \right] \right\} dt \leq \\
&\leq 3 \left[1 + \lambda^2 T^3 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right] \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2T \|p[\tau, u(\tau)]\|_H^2 \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty,
\end{aligned}$$

из которого следует, что $v(t, x) \in H(Q)$.

3.2 Постановка задачи оптимизации со скалярным управлением и вывод условия оптимальности

Требуется минимизировать

$$J[u(t)] = \int_0^1 [v(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt, \quad \beta > 0, \quad (3.2.1)$$

на множестве решений (3.1.1)-(3.1.3), где $\xi(x) \in H(0,1)$ заданная функция, т.е. нужно найти $u^0(t) \in H(0,T)$ и соответствующее $v^0(t, x)$, которые минимизируют функционал (3.2.1).

Приращение функционала (3.2.1) имеет следующий вид

$$\Delta J[u(t)] = J[u(t) + \Delta u(t)] - J[u(t)],$$

где $\Delta u(t)$ - произвольное приращение $u(t)$. Отметим, что в силу монотонности функции внешнего воздействия по аргументам $u(t)$ каждому управлению соответствует единственное решение краевой задачи (3.1.1)-(3.1.3). Тогда решению (3.1.1)-(3.1.3) вида $v(t) + \Delta v(t)$ соответствует управление $u(t) + \Delta u(t)$. Согласно методике работы [32], непосредственным вычислением приращение функционала $\Delta J[u(t)]$ представим в виде

$$\Delta J[u] = -\int_0^T \Delta \Pi[t, v(t, x), \omega(t, x), u] dt + \int_0^1 \Delta v^2(T, x) dx, \quad (3.2.2)$$

где

$$\begin{aligned} & \Delta \Pi[t, v(t, x), \omega(t, x), u(t)] = \\ & = \Pi[t, v(t, x), \omega(t, x), u(t) + \Delta u(t)] - \Pi[t, v(t, x), \omega(t, x), u(t)], \\ & \Pi[t, v(t, x), \omega(t, x), u(t)] = p[t, u(t)] \omega(t, 1) - \beta u^2(t), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

а $\omega(t, x)$ - слабо обобщенное решение

$$\begin{aligned} \omega_t + \omega_{xx} + \lambda \int_t^T K(\tau, t) \omega(\tau, x) d\tau &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t < T, \\ \omega(T, x) + 2[v(T, x) - \xi(x)] &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ \omega_x(t, 0) = 0, \quad \omega_x(t, 1) + \alpha \omega(t, 1) &= 0, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Решение (3.2.4) ищется как

$$\omega(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x). \quad (3.2.5)$$

Можно показать (например, как в процессе решения основной краевой задачи), что коэффициенты Фурье $\omega_n(t)$, для каждого фиксированного $n=1, 2, 3, \dots$ определяются как решения линейного интегрального уравнения

$$\omega_n(t) = \lambda \int_t^T B_n(s, t) \omega_n(s) ds - 2[v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-t)}, \quad (3.2.6)$$

где ядро

$$B_n(s, t) = \int_t^s e^{-\lambda_n^2(\tau-t)} K(s, \tau) d\tau; \quad (3.2.7)$$

ξ_n – коэффициент Фурье функции $\xi(x)$. Резольвенту ядра $B_n(s, t)$ находим в виде ряда Неймана

$$L_n(s, t, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} B_{n,i}(s, t), \quad (3.2.8)$$

где

$$B_{n,i+1}(s, t) = \int_t^s B_n(s, \tau) B_{n,i}(\tau, t) d\tau, \quad B_n(s, t) = B_{n,1}(s, t), \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

итерированные (повторные) ядра. Нетрудно проверить, что они удовлетворяют следующим оценкам

$$|B_{n,i}(s, t)| \leq \left(\frac{K_0}{\lambda_n^2} \right)^i \frac{(s-t)^{i-1}}{(i-1)!}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.9)$$

Согласно (3.2.9), для резольвенты имеет место оценка

$$\begin{aligned} |L_n(s, t, \lambda)| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^{i-1} |B_{n,i}(s, t)| \leq \frac{K_0}{\lambda_n^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!} \left(\frac{|\lambda| K_0 (s-t)}{\lambda_n^2} \right)^{i-1} = \\ &= \frac{K_0}{\lambda_n^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 (s-t)}{\lambda_n^2}} \leq \frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

т.е. ряд Неймана сходится равномерно для любого значения λ . Решение интегрального уравнения (3.2.6) находим по формуле

$$\omega_n(t) = -2\lambda \int_t^T L_n(s, t, \lambda) [v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds - 2[v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-t)}, \quad (3.2.11)$$

Подставляя (3.2.11) в (3.2.6) находим решения сопряженной краевой задачи (3.2.5) в следующем виде

$$\omega(t, x) = -2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\lambda \int_t^T L_n(s, t, \lambda) [v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds + \right.$$

$$+ [v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(x), \quad (3.2.12)$$

где $v_n(T)$ определяется по формуле

$$v_n(T) = \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(T) \quad (3.2.13)$$

и это решение является элементом пространства $H(Q)$, т.е.

$$\int_0^T \int_0^1 \omega(t, x) dx dt < \infty.$$

Для определения оптимального управления, минимизирующего функционал (3.2.1), согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [32], находим условия оптимальности. Для рассматриваемой задачи условиями оптимальности будут следующие соотношения:

$$\Pi_u(\cdot; u) = p_u [t, u(t)] \omega(t, 1) - 2\beta u(t) = 0, \quad (3.2.14)$$

$$\Pi_{uu}(\cdot; u) = p_{uu} [t, u(t)] \omega(t, 1) - 2\beta < 0. \quad (3.2.15)$$

3.3 Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления

С учетом (3.2.12) и (3.2.13) перепишем условия оптимальности (3.2.14), (3.2.15). При этом равенства (3.2.14) приводим к виду

$$\begin{aligned} \beta u(t) p_u^{-1} [t, u(t)] = \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) z_n(1) \left[-h_n + \int_0^T G_n(\tau) z_n(1) p[\tau, u(\tau)] d\tau \right], \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T, \tau, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) - \int_0^T G_n(\tau) g_n(\tau) d\tau; \quad (3.3.2)$$

$$G_n(t) z_n(1) = z_n(1) \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T R_n(T, \tau, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-t)} ds \right) = G_n(t, 1); \quad (3.3.3)$$

$$G_n^*(t) z_n(1) = z_n(1) \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T L(s, t, \lambda_n) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds \right) = G_n^*(t, 1); \quad (3.3.4)$$

а соотношение (3.2.15), после несложных преобразований перепишем в виде

$$p_u[t, u(t)] \left(\frac{u}{p_u[t, u(t)]} \right)_u > 0. \quad (3.3.5)$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче оптимальное управление находится как решение (3.3.1), причем это решение должно удовлетворять неравенству (3.3.5).

Используя методику работы [41], преобразуем уравнение (3.3.1), т.е. введем обозначение

$$\beta u(t) p_u^{-1}[t, u(t)] = \theta(t). \quad (3.3.6)$$

Лемма 3.3.1. Функция $\theta(t) \in H(0, T)$.

Доказательство. С учетом (3.3.5) имеет место $|p_u^{-1}[t, u(t)]| \leq M, \quad \forall t \in [0, T]$.

Учитывая $u(t) \in H(0, T)$, утверждение леммы следует

$$\int_0^T \theta^2(t) dt \leq \beta^2 \int_0^T |p_u^{-1}[t, u(t)]|^2 |u(t)|^2 dt \leq \beta^2 M^2 \int_0^T u^2(t) dt < \infty.$$

С учетом (3.3.5), из (3.3.6) управление $u(t)$ можно определить однозначно, т.е. существует $\varphi(\cdot)$ такая

$$u(t) = \varphi[t, \theta(t), \beta]. \quad (3.3.7)$$

С учетом (3.3.6) и (3.3.7) уравнение (3.4.1) преобразуем к виду

$$\theta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) h_n \quad (3.3.8)$$

или в виде операторного уравнения

$$\theta(t) = G[\theta(t)], \quad (3.3.9)$$

где

$$G[\theta(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t,1) \left[h_n - \int_0^T G_n(\tau,1) p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]] d\tau \right]. \quad (3.3.10)$$

Теперь исследуем вопросы однозначной разрешимости (3.3.9).

Лемма 3.3.2. Оператор $G[\theta(t)] \in H(0,T)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из вычислений

$$\begin{aligned} \int_0^T G^2[\theta(t)] dt &= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t,1) \left[h_n - \int_0^T G_n(\tau,1) p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]] d\tau \right] \right)^2 dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (G_n^*(t,1))^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T G_n(\tau,1) p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]] d\tau \right)^2 \right] dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (G_n^*(t,1))^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T G_n^2(\tau,1) d\tau \int_0^T p_n^2[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]] d\tau \right] dt \leq \\ &\leq 2 \cdot 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n^2} \left(1 + \lambda^2 T \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} \right)^2 \frac{\lambda_1^2 M_0}{2|\lambda|K_0} \right) \left[3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n^2 + 2\psi_n^2 \left(1 + \frac{|\lambda|K_0 M_0}{(2\lambda_1^2)^2} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) \|g(t,x)\|_H^2 \right] + \\ &\quad + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n^2} \left(1 + \lambda^2 T \frac{K_0 M_0}{2|\lambda|\lambda_1^2} \right) \|p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]]\|_H^2 \leq \\ &\leq 2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda|TM_0 K_0}{2\lambda_1^2} \right) \left\{ \|\xi(x)\|_H^2 + 2\|\psi(x)\|_H^2 \left(1 + \frac{|\lambda|K_0 M_0}{(2\lambda_1^2)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) \|g(t,x)\|_H^2 + \right. \\ &\quad \left. 2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) \|p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]]\|_H^2 \right\} < \infty. \end{aligned}$$

Лемма 3.3.3. Пусть выполнены

$$\|p[t, u(t)] - p[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq p_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H, \quad p_0 > 0, \quad (3.4.11)$$

$$\|\varphi[t, \theta(t), \beta] - \varphi[t, \bar{\theta}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|\theta(t) - \bar{\theta}(t)\|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0, \quad (3.4.12)$$

$$\gamma = 2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) p_0 \varphi_0(\beta) < 1, \quad (3.4.13)$$

где $|\lambda|$ – некоторая положительная постоянная, тогда оператор $G[\theta]$ является сжимающим.

Доказательство. Утверждение леммы следует из вычислений

$$\begin{aligned} \|G[\theta] - G[\bar{\theta}]\|_H^2 &= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left(p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]] - p[\tau, \varphi[\tau, \bar{\theta}(\tau), \beta]] \right) d\tau \right)^2 dt \leq \\ &\leq \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} (G_n^*(t, 1))^2 \int_0^T G_n^2(\tau, 1) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left(p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]] - p[\tau, \varphi[\tau, \bar{\theta}(\tau), \beta]] \right)^2 d\tau \right) dt \leq \\ &\leq \left[2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) \right]^2 \|p[t, \varphi[t, \theta(t), \beta]] - p[t, \varphi[t, \bar{\theta}(t), \beta]]\|_H^2 \leq \\ &\leq \left[2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) \right]^2 p_0^2 \varphi_0^2(\beta) \|\theta(t) - \bar{\theta}(t)\|_H^2, \end{aligned}$$

откуда находим, что

$$\|G[\theta] - G[\bar{\theta}]\|_H \leq 2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) p_0 \varphi_0(\beta) \|\theta(t) - \bar{\theta}(t)\|_H.$$

Теорема 3.3.1. Пусть выполнены

$$1) \frac{\partial p[t, u(t)]}{\partial u} \neq 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

- 2) $p_u [t, u(t)] \left(\frac{u}{p_u [t, u(t)]} \right)_u > 0,$
- 3) $\|p[t, u(t)] - p[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq p_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H, \quad p_0 > 0,$
- 4) $\|\varphi[t, \theta(t), \beta] - \varphi[t, \bar{\theta}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|\theta(t) - \bar{\theta}(t)\|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0,$
- 5) $\gamma = 2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) p_0 \varphi_0(\beta) < 1.$

Тогда существует единственное решение $G[\theta] \in H(0, T)$.

Доказательство. С учетом Лемм 3.3.1 и 3.3.2, $G[\theta] \in H(0, T)$. С учетом Леммы 3.3.3, $G[\theta]$ является сжимающим. Так, как $H(0, T)$ является полным метрическим пространством, то учитывая теорему [71] о принципе сжимающих отображений, $G[\theta]$ имеет единственное решение, т.е. существует единственное решение $G[\theta] \in H(0, T)$.

Чтобы найти решение $G[\theta]$, используем метод последовательных приближений, т.е. l -е приближение $G[\theta]$ определяется

$$\theta_l(t) = G[\theta_{l-1}(t)], \quad l = 1, 2, 3, \dots,$$

где $\theta_0(t)$ - произвольный элемент $H(0, T)$, причем

$$\|\bar{\theta}(t) - \theta_l(t)\|_H \leq \frac{\gamma^l}{1-\gamma} \|G[\theta_0(t)] + h(t) - \theta_0(t)\|_H,$$

откуда в силу произвольности $\theta_0(t)$ при $h(t) = \theta_0(t)$

$$\|\bar{\theta}(t) - \theta_l(t)\|_H \leq \frac{\gamma^l}{1-\gamma} \|G[\theta_0(t)]\|_H. \quad (3.3.14)$$

Точное решение $\bar{\theta}(t)$ находится из равенства $\bar{\theta}(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} \theta_l(t)$, т.е. как предел приближенных решений.

Точное решение $\bar{\theta}(t)$ подставляя в (3.3.7) определяем

$$u^0(t) = \varphi[t, \bar{\theta}(t), \beta]. \quad (3.3.15)$$

Соответствующий оптимальному управлению $u^0(t)$, оптимальный процесс $v^0(t, x)$ определяется по формуле

$$v^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_n^0(s) ds + a_n^0(t) \right) z_n(x), \quad (3.3.16)$$

где $a_n^0(t) = e^{-\lambda^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} (g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u^0(\tau)]) d\tau$,

а минимальное значение функционала (3.2.1) вычисляется

$$J[u^0(t)] = \int_0^1 [v^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u^0(t)]^2 dt. \quad (3.3.17)$$

Найденная тройка $(u^0(t), v^0(t, x), J[u^0(t)])$ является полным решением задачи нелинейного оптимального граничного управления.

3.4 Приближенное решение задач нелинейной оптимизации и его сходимость

На практике не всегда удается найти точное решение уравнения (3.3.9). Поэтому, в большинстве случаев ограничиваются нахождением приближенного решения $\theta_k(t)$ уравнения (3.3.7), где число k определяется из неравенства [71]

$$\|\bar{\theta}(t) - \theta_k(t)\|_H \leq \frac{\gamma^k}{1 - \gamma} \|G[\theta_0(t)]\|_H < \varepsilon \quad (3.4.1)$$

при заданном $\varepsilon > 0$. Согласно структуре оптимального управления k - е приближение находим по формуле

$$u_k(t) = \varphi[t, \theta_k(t), \beta]. \quad (3.4.2)$$

Лемма 3.4.1. k – ϵ приближение оптимального управления удовлетворяет оценке

$$\|u^0(t) - u_k(t)\|_H \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[\theta_0(t)]\|_H \quad (3.4.3)$$

и сходится к оптимальному управлению $u^0(t)$ по норме пространства $H(0, T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|u^0(t) - u_k(t)\|_H &\leq \|\varphi[t, \theta^0(t), \beta] - \varphi[t, \theta_k(t), \beta]\|_H \leq \\ &\leq \varphi_0(\beta) \|\theta^0(t) - \theta_k(t)\|_H \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[\theta_0(t)]\|_H, \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

Приближенное управление, $u_k(t)$ подставляя в (3.4.16) находим k – ϵ приближение $v_k(t, x)$ оптимального процесса $v^0(t, x)$, т.е.

$$\begin{aligned} v_k(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \right. \right. \\ &+ \left. \int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \right) d\tau \right] ds + e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \\ &+ \left. \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \right) d\tau \right] z_n(x). \quad (3.4.4) \end{aligned}$$

Лемма 3.4.2. k – ϵ приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} \|v^0(t, x) - v_k(t, x)\|_H &\leq \\ &\leq \sqrt{2T \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \lambda^2 T^2 \left[\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right]^2 \right)} p_0 \|u^0(t) - u_k(t)\|_H \quad (3.4.5) \end{aligned}$$

и сходится к оптимальному процессу $v^0(t, x)$ по норме пространства $H(Q)$.

Доказательство. Согласно (3.4.3) и (3.4.4), непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned}
\|v^0(t, x) - v_k(t, x)\|_H^2 &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t z_n(1) p[\tau, u^0(\tau)] \cdot \right. \\
&\cdot \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau - \\
&- \int_0^t z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau \left. \right\}^2 dt \leq \\
&\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t (p[\tau, u^0(\tau)] - p[\tau, u_k(\tau)]) z_n(1) \cdot \right. \\
&\cdot \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau \left. \right\}^2 dt \leq \\
&\leq 2 \cdot 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left(e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda^2 \int_{\tau}^T R_n^2(t, s, \lambda) ds \int_{\tau}^T e^{-2\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau dt \cdot \\
&\cdot \|p[\tau, u^0(\tau)] - p[\tau, u_k(\tau)]\|_H^2 \leq \\
&\leq 2T \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \lambda^2 T^2 \left[\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right]^2 \right) p_0^2 \|u^0(t) - u_k(t)\|_H^2,
\end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

При исследовании сходимости оптимального процесса необходимо учитывать сходимость по резольвенте, так как приближения оптимального процесса имеют вид

$$\begin{aligned}
v_k^m(t, x) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t R_n^m(t, s, \lambda) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \right) d\tau \right] ds + e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \right. \\
& \left. + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \right) d\tau \right] z_n(x) \quad (3.4.6)
\end{aligned}$$

и определяются двумя индексами $k, m = 1, 2, 3, \dots$. Поскольку

$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s) \quad \text{и} \quad R_n^m(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s),$$

то сходимость m -ого приближения резольвенты $R_n(t, s, \lambda)$ при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, \dots$, следует из неравенства

$$\begin{aligned}
R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda) &= \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s) \leq \\
&\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |\lambda|^{i-1} |K_{n,i}(t, s)| \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |\lambda|^{i-1} \left(\frac{K_0}{\lambda_n^2} \right)^i \frac{(s-t)^{i-1}}{(i-1)!} = \\
&= \frac{K_0}{\lambda_n^2} \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!} \left(\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_n^2} \right)^{i-1} = \\
&= \frac{K_0}{\lambda_n^2} \cdot \frac{1}{m!} \left(\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_n^2} \right)^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_n^2}} \leq \frac{K_0}{\lambda_n^2} \cdot \frac{1}{m!} \left(\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right)^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}, \quad (3.4.7)
\end{aligned}$$

которое получено с учетом формулы остаточного члена равномерно сходящегося ряда

$$\begin{aligned}
R_n(t, s, \lambda) &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s) \leq \frac{K_0}{\lambda_n^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!} \left[\frac{|\lambda| K_0 (t-s)}{\lambda_n^2} \right]^{i-1} \leq \\
&\leq \frac{K_0}{\lambda_n^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 (t-s)}{\lambda_n^2}} \leq \frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}.
\end{aligned}$$

Лемма 3.4.3. k, m – е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\|v_k(t, x) - v_k^m(t, x)\|_H \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + 2T \|p[\tau, u_k(\tau)]\|_H^2 \right]} \cdot \\ \cdot \lambda T \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} \frac{1}{m!} \left[\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right]^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)$$

и сходится к функции $v_k(t, x)$ по норме пространства $H(Q)$.

Доказательство. Согласно (3.4.6) и (3.4.7), непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\|v_k(t, x) - v_k^m(t, x)\|_H^2 = \\ = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} g_n(\tau) d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right] ds - \right. \\ \left. - \lambda \int_0^t R_n^m(t, s, \lambda) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} g_n(\tau) d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right] ds \right\}^2 dt \leq \\ \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda \int_0^t (R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda)) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} g_n(\tau) d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right] ds \right\}^2 dt \leq \\ \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda^2 \int_0^t (R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda))^2 ds \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} g_n(\tau) d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right]^2 ds \right\} dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda^2 T \left(\frac{K_0}{\lambda_n^2} \cdot \frac{1}{m!} \left(\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right)^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right. \\
&\cdot \frac{3}{2\lambda_n^2} \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + 2T \|p[\tau, u_k(\tau)]\|_H^2 \right] \Big\} dt \leq \\
&\leq \frac{3}{2} \lambda^2 T^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + \right. \\
&\left. + 2T \|p[\tau, u_k(\tau)]\|_H^2 \right] \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} \frac{1}{m!} \left[\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right]^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2,
\end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

Поскольку $v_k^m(t, x)$ определяется как сумма бесконечного функционального ряда, то не всегда удается найти ее. Поэтому на практике целесообразно использовать приближение вида

$$\begin{aligned}
v_k^{m,r}(t, x) &= \sum_{n=1}^r \left[\lambda \int_0^t R_n^m(t, s, \lambda) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \right. \right. \\
&\left. \left. + \int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \right) d\tau \right] ds + \right. \\
&\left. + e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \right) d\tau \right] z_n(x),
\end{aligned}$$

которое назовем k, m, r – ым приближением оптимального процесса.

Лемма 3.4.4. k, m, r – е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned}
\|v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x)\|_H &\leq \sqrt{6 \left(1 + \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right)}. \\
&\cdot \sqrt{\left\{ \frac{1}{2\lambda_1^2} \sum_{n=r+1}^{\infty} \psi_n^2 + \frac{1}{2\lambda_1^2} \sum_{n=r+1}^{\infty} \int_0^T g_n^2(\tau) d\tau + \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_{n=r+1}^{\infty} \int_0^T p^2[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right\}}
\end{aligned}$$

и при $r \rightarrow \infty$ сходится к функции $v_k^m(t, x)$ по норме пространства $H(Q)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем соотношение

$$\begin{aligned}
& \left\| v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x) \right\|_H^2 = \int_0^T \sum_{n=r+1}^{\infty} \left\{ \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^t R_n^m(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) + \right. \\
& + \int_0^t g_n(\tau) \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n^m(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau + \\
& + \left. \int_0^t z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n^m(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau \right\}^2 dt \leq \\
& \leq 6 \int_0^T \sum_{n=r+1}^{\infty} \left\{ \psi_n^2 \left(e^{-2\lambda_n^2 t} + \lambda^2 \int_0^t (R_n^m)^2(t, s, \lambda) ds \int_0^t e^{-2\lambda_n^2 s} ds \right) + \right. \\
& + \int_0^T g_n^2(\tau) \left(e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda^2 \int_{\tau}^T (R_n^m)^2(t, s, \lambda) ds \int_{\tau}^T e^{-2\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau + \\
& + \left. \int_0^T z_n^2(1) p^2[\tau, u_k(\tau)] \left(e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda^2 \int_{\tau}^T (R_n^m)^2(t, s, \lambda) ds \int_{\tau}^T e^{-2\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau \right\} dt \leq \\
& \leq 6 \sum_{n=r+1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right) \frac{1}{2\lambda_n^2} \psi_n^2 + \right. \\
& + T \left(1 + \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right) \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_0^T g_n^2(\tau) d\tau + \\
& + \left. T \left(1 + \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right) \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T p^2[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right\} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq 6 \left(1 + \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right) \left\{ \frac{1}{2\lambda_1^2} \sum_{n=r+1}^{\infty} \psi_n^2 + \right. \\ \left. + \frac{T}{2\lambda_1^2} \sum_{n=r+1}^{\infty} \int_0^T g_n^2(\tau) d\tau + T \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T p^2[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right\},$$

которое справедливо при каждом фиксированном $k = 1, 2, 3, \dots$, так как остаточный член сходящегося ряда стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$.

Лемма 3.4.5. k, m, r – е приближение оптимального процесса при $k, m, r \rightarrow \infty$ сходится к функции $v^0(t, x)$ по норме пространства $H(Q)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\|v^0(t, x) - v_k^{m,r}(t, x)\|_H^2 \leq \\ \leq \|v^0(t, x) - v_k(t, x) + v_k(t, x) - v_k^m(t, x) + v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x)\|_H^2 \leq \\ \leq \|v^0(t, x) - v_k(t, x)\|_H^2 + \|v_k(t, x) - v_k^m(t, x)\|_H^2 + \\ + \|v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x)\|_H^2 \xrightarrow{k, m, r \rightarrow \infty} 0,$$

которое справедливо согласно леммам 3.4.2.-3.4.4.

Поскольку оптимальный процесс имеет приближения $v_k(t, x)$, $v_k^m(t, x)$ и $v_k^{m,r}(t, x)$, то будем различать три вида приближенных значений функционала (3.3.1) в следующем виде

$$J[u_k(t)] = \int_0^1 [v_k(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u_k(t)]^2 dt, \\ J_m[u_k(t)] = \int_0^1 [v_k^m(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u_k(t)]^2 dt, \\ J_m^r[u_k(t)] = \int_0^1 [v_k^{m,r}(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u_k(t)]^2 dt.$$

Лемма 3.4.6. $k - \epsilon$ приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$|J[u^0] - J[u_k]| \leq C_1 \|v^0(T, x) - v_k(T, x)\|_H + C_2 \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \varphi_0(\beta) \|G[\theta_0(t)]\|_H, \quad (3.4.8)$$

где C_1, C_2 – положительные постоянные и сходится к точному значению функционала $J[u^0]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned} |J[u^0] - J[u_k]| &\leq \int_0^1 \left\{ [v^0(T, x) - \xi(x)]^2 - [v_k(T, x) - \xi(x)]^2 \right\} dx + \\ &+ \beta \int_0^T \left([u^0(t)]^2 - [u_k(t)]^2 \right) dt \leq \\ &\leq \int_0^1 \left\{ [v^0(T, x)]^2 - 2\xi(x)v^0(T, x) + \xi^2(x) - [v_k(T, x)]^2 + \right. \\ &+ 2\xi(x)v_k(T, x) - \xi^2(x) \left. \right\} dx + \\ &+ \beta \|u^0(t) + u_k(t)\|_H \|u^0(t) - u_k(t)\|_H \leq \\ &\leq \int_0^1 \left\{ (v^0(T, x) + v_k(T, x))(v^0(T, x) - v_k(T, x)) - \right. \\ &- 2\xi(x)(v^0(T, x) - v_k(T, x)) \left. \right\} dx + \\ &+ \beta \|u^0(t) + u_k(t)\|_H \|u^0(t) - u_k(t)\|_H \leq \\ &\leq \int_0^1 \left\{ (v^0(T, x) + v_k(T, x) - 2\xi(x))(v^0(T, x) - v_k(T, x)) \right\} dx + \\ &+ \beta \|u^0(t) + u_k(t)\|_H \|u^0(t) - u_k(t)\|_H \leq \\ &\leq \|v^0(T, x) + v_k(T, x) - 2\xi(x)\|_H \|v^0(T, x) - v_k(T, x)\|_H + \\ &+ \beta \|u^0(t) + u_k(t)\|_H \|u^0(t) - u_k(t)\|_H \leq \\ &\leq C_1 \|v^0(T, x) - v_k(T, x)\|_H + C_2 \|u^0(t) - u_k(t)\|_H, \end{aligned}$$

которое справедливо согласно леммам 3.4.1. – 3.4.2..

Лемма 3.4.7. k, m – е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} |J[u_k] - J_m[u_k]| &\leq \int_0^1 \left\{ [v_k(T, x) - \xi(x)]^2 - [v_k^m(T, x) - \xi(x)]^2 \right\} dx \leq \\ &\leq C_3 \|v_k(T, x) - v_k^m(T, x)\|_H, \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

где C_3 – положительная постоянная и сходится к значению функционала $J[u_k]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned} |J[u_k] - J_m[u_k]| &\leq \int_0^1 \left\{ [v_k(T, x) - \xi(x)]^2 - [v_k^m(T, x) - \xi(x)]^2 \right\} dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \left\{ [v_k(T, x)]^2 - 2\xi(x)v_k(T, x) + \xi^2(x) - dx \right. \\ &\quad \left. - [v_k^m(T, x)]^2 + 2\xi(x)v_k^m(T, x) - \xi^2(x) \right\} dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \left\{ (v_k(T, x) + v_k^m(T, x))(v_k(T, x) - v_k^m(T, x)) - \right. \\ &\quad \left. - 2\xi(x)(v_k(T, x) - v_k^m(T, x)) \right\} dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \left\{ (v_k(T, x) + v_k^m(T, x) - 2\xi(x))(v_k(T, x) - v_k^m(T, x)) \right\} dx \leq \\ &\leq \|v_k(T, x) + v_k^m(T, x) - 2\xi(x)\|_H \|v_k(T, x) - v_k^m(T, x)\|_H \leq \\ &\leq C_3 \|v_k(T, x) - v_k^m(T, x)\|_H, \end{aligned}$$

которое справедливо согласно лемме 3.4.3.

Лемма 3.4.8. k, m, r – е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$|J_m[u_k] - J_m^r[u_k]| \leq C_4 \|v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x)\|_H, \quad (3.4.10)$$

где C_4 – положительная постоянная и сходится к значению функционала $J_m[u_k]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned}
 |J_m[u_k] - J_m^r[u_k]| &\leq \int_0^1 \left\{ [v_k^m(T, x) - \xi(x)]^2 - [v_k^{m,r}(T, x) - \xi(x)]^2 \right\} dx \leq \\
 &\leq \int_0^1 \left\{ [v_k^m(T, x)]^2 - 2\xi(x)v_k^m(T, x) + \xi^2(x) - \right. \\
 &\quad \left. - [v_k^{m,r}(T, x)]^2 + 2\xi(x)v_k^{m,r}(T, x) - \xi^2(x) \right\} dx \leq \\
 &\leq \int_0^1 \left\{ (v_k^m(T, x) + v_k^{m,r}(T, x))(v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x)) - \right. \\
 &\quad \left. - 2\xi(x)(v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x)) \right\} dx \leq \\
 &\leq \int_0^1 \left\{ (v_k^m(T, x) + v_k^{m,r}(T, x) - 2\xi(x))(v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x)) \right\} dx \leq \\
 &\leq \|v_k^m(T, x) + v_k^{m,r}(T, x) - 2\xi(x)\|_H \|v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x)\|_H \leq \\
 &\leq C_4 \|v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x)\|_H,
 \end{aligned}$$

которое справедливо согласно лемме 3.4.4.

Лемма 3.4.9. k, m, r – е приближенное значение функционала при $k, m, r \rightarrow \infty$ сходится к точному значению функционала $J[u^0]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned}
 |J[u^0] - J_m^r[u_k]| &\leq |J[u^0] - J[u_k] + J[u_k] - J_m[u_k] + J_m[u_k] - J_m^r[u_k]| \leq \\
 &\leq |J[u^0] - J[u_k]| + |J[u_k] - J_m[u_k]| + |J_m[u_k] - J_m^r[u_k]| \xrightarrow[k, m, r \rightarrow \infty]{} 0,
 \end{aligned}$$

которое справедливо согласно леммам 3.4.6. – 3.4.8.

Как следует из лемм 3.4.1-3.4.9 доказано, что приближенное решение $(u_k(t), v_k^{m,r}(t, x), J_m^r[u_k(t)])$ задачи нелинейного оптимального граничного управления сходится к точному решению $(u^0(t), v^0(t, x), J[u^0(t)])$.

3.5 Пример

На модельном примере проиллюстрируем результаты полученных выше. Рассматривается задача нелинейного оптимального граничного управления теплопроводности, описываемая вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением, где минимизируется функционал

$$J[u] = \int_0^1 [\nu(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt, \quad \beta > 0 \quad (3.5.1)$$

на множестве решений

$$\nu_t = \nu_{xx} + \lambda \int_0^t K(t, \tau) \nu(\tau, x) d\tau, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.5.2)$$

$$\nu(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.5.3)$$

$$\nu_x(t, 0) = 0, \quad \nu_x(t, 1) + \alpha \nu(t, 1) = p[t, u(t)], \quad 0 < t \leq T, \quad (3.5.4)$$

Слабое обобщенное решение (3.5.2)-(3.5.4) находится

$$\nu_n(t) = a_n(t) + \lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds, \quad (3.5.5)$$

где
$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.5.6)$$

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u(\tau)]) d\tau. \quad (3.5.7)$$

Условия оптимальности получены в виде

$$\begin{cases} 2\beta u(t) p_u[t, u(t)] = \omega(t, 1), \\ p_u[t, u(t)] \left(\frac{u}{p_u[t, u(t)]} \right)_u > 0, \end{cases} \quad (3.5.8)$$

где
$$\omega(t, x) = -2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\lambda \int_t^T L_n(s, t, \lambda) [\nu_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds + \right. \\ \left. + [\nu_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(x) \right).$$

Оптимальное управление согласно (3.5.8), находим как решение

$$\begin{aligned} \beta u(t) p_u^{-1} [t, u(t)] &= \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) z_n(1) \left[-h_n + \int_0^T G_n(\tau) z_n(1) p[\tau, u(\tau)] d\tau \right], \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T, \tau, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) - \int_0^T G_n(\tau) g_n(\tau) d\tau; \quad (3.5.10)$$

$$G_n(t) z_n(1) = z_n(1) \left(e^{-\lambda_n^2 (T-t)} + \lambda \int_t^T R_n(T, \tau, \lambda) e^{-\lambda_n^2 (s-t)} ds \right) = G_n(t, 1); \quad (3.5.11)$$

$$G_n^*(t) z_n(1) = z_n(1) \left(e^{-\lambda_n^2 (T-t)} + \lambda \int_t^T L(s, t, \lambda_n) e^{-\lambda_n^2 (T-s)} ds \right) = G_n^*(t, 1); \quad (3.5.12)$$

и удовлетворяет

$$p_u [t, u(t)] \left[\frac{u}{p_u [t, u(t)]} \right]_u > 0. \quad (3.5.13)$$

Введем обозначение в (3.5.9)

$$\beta u(t) p_u^{-1} [t, u(t)] = \theta(t). \quad (3.5.14)$$

С учетом (3.5.13), из (3.5.14) управление $u(t)$ можно определить однозначно, т.е. существует $\varphi(\cdot)$ такая

$$u(t) = \varphi [t, \theta(t), \beta]. \quad (3.5.15)$$

С учетом (3.5.14) и (3.5.15), уравнение (3.5.9) преобразуем

$$\theta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) h_n. \quad (3.5.16)$$

Уравнение (3.5.16) при выполнении:

$$1) \frac{\partial p [t, u(t)]}{\partial u} \neq 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$2) p_u [t, u(t)] \left[\frac{u}{p_u [t, u(t)]} \right]_u > 0,$$

- 3) $\|p[t, u(t)] - p[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq p_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H, \quad p_0 > 0,$
 $\|\varphi[t, \theta(t), \beta] - \varphi[t, \bar{\theta}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|\theta(t) - \bar{\theta}(t)\|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0,$
- 4) $\gamma = 2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) p_0 \varphi_0(\beta) < 1$

в пространстве $H(0, T)$ имеет единственное решение

$$\bar{\theta}(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} \theta_l(t),$$

где $\theta_l(t)$ l -е приближение $\bar{\theta}(t)$. $\theta_l(t)$ находится методом последовательных приближений и удовлетворяет

$$\|\bar{\theta}(t) - \theta_l(t)\|_H \leq \frac{\gamma^l}{1 - \gamma} \|G[\theta_0(t)] + h(t) - \theta_0(t)\|_H,$$

где $G[\theta(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) p[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]] d\tau, \quad (3.5.17')$

$\theta_0(t)$ - произвольный элемент $H(0, T)$. Положим $h(t) = \theta_0(t)$, тогда (3.5.17') примет вид

$$\|\bar{\theta}(t) - \theta_l(t)\|_H \leq \frac{\gamma^l}{1 - \gamma} \|G[\theta_0(t)]\|_H. \quad (3.5.18)$$

$u^0(t)$ и $u_k(t)$ определяются формулами

$$u^0(t) = \varphi[t, \bar{\theta}(t), \beta], \quad u_k(t) = \varphi[t, \theta_k(t), \beta]$$

и $\|u^0(t) - u_k(t)\|_H \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1 - \gamma} \|G[\theta_0(t)]\|_H. \quad (3.5.19)$

Оптимальный процесс $v^0(t, x)$ и $v_k(t, x), v_k^m(t, x), v_k^{m,r}(t, x)$ определяются формулами

$$v^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u^0(\tau)] \right) d\tau \right] ds + e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \right]$$

$$+ \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u^0(\tau)] \right) d\tau \Big] z_n(x);$$

1.
$$\begin{aligned} v_k(t, x) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \right. \right. \\ & + \int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \right) d\tau \Big] ds + e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \\ & \left. + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \right) d\tau \right] z_n(x), \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} v_k^m(t, x) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t R_n^m(t, s, \lambda) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \right. \right. \\ & + \int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \right) d\tau \Big] ds + e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \\ & \left. + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \right) d\tau \right] z_n(x), \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} v_k^{m,r}(t, x) = & \sum_{n=1}^r \left[\lambda \int_0^t R_n^m(t, s, \lambda) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \right. \right. \\ & + \int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \right) d\tau \Big] ds + \\ & \left. + e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] \right) d\tau \right] z_n(x), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \left\| v^0(t, x) - v_k^{m,r}(t, x) \right\|_H^2 \leq \\ & \leq \left\| v^0(t, x) - v_k(t, x) + v_k(t, x) - v_k^m(t, x) + v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x) \right\|_H^2 \leq \\ & \leq \left\| v^0(t, x) - v_k(t, x) \right\|_H^2 + \left\| v_k(t, x) - v_k^m(t, x) \right\|_H^2 + \\ & + \left\| v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x) \right\|_H^2 \xrightarrow[k, m, r \rightarrow \infty]{} 0; \end{aligned} \tag{3.5.20}$$

$$1) \quad \left\| v^0(t, x) - v_k(t, x) \right\|_H \leq \\ \leq \sqrt{2T \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \lambda^2 T^2 \left[\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right]^2 \right)} p_0 \|u^0(t) - u_k(t)\|_H,$$

$$2) \quad \left\| v_k(t, x) - v_k^m(t, x) \right\|_H \leq \\ \leq \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + 2T \|p[\tau, u_k(\tau)]\|_H^2 \right]} \cdot \\ \cdot \lambda T \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} \frac{1}{m!} \left[\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right]^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right),$$

$$3) \quad \left\| v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x) \right\|_H \leq \sqrt{6 \left(1 + \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right)} \cdot \\ \cdot \sqrt{\left\{ \frac{1}{2\lambda_1^2} \sum_{n=r+1}^{\infty} \psi_n^2 + \frac{1}{2\lambda_1^2} \sum_{n=r+1}^{\infty} \int_0^T g_n^2(\tau) d\tau + \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_{n=r+1}^{\infty} \int_0^T p^2[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right\}}$$

Минимальное значение функционала $J[u^0(t)]$ и $J[u_k(t)]$

, $J_m[u_k(t)]$, $J'_m[u_k(t)]$ определяются формулами

$$J[u^0(t)] = \int_0^1 [v^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u^0(t)]^2 dt,$$

$$1. \quad J[u_k(t)] = \int_0^1 [v_k(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u_k(t)]^2 dt,$$

$$2. \quad J_m[u_k(t)] = \int_0^1 [v_k^m(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u_k(t)]^2 dt,$$

$$3. \quad J'_m[u_k(t)] = \int_0^1 [v_k^{m,r}(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u_k(t)]^2 dt,$$

и

$$\begin{aligned} & \left| J[u^0] - J_m^r[u_k] \right| \leq \left| J[u^0] - J[u_k] + J[u_k] - J_m[u_k] + J_m[u_k] - J_m^r[u_k] \right| \leq \\ & \leq \left| J[u^0] - J[u_k] \right| + \left| J[u_k] - J_m[u_k] \right| + \left| J_m[u_k] - J_m^r[u_k] \right| \xrightarrow{k,m,r \rightarrow \infty} 0; \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

$$1) \quad \left| J[u^0] - J[u_k] \right| \leq C_1 \left\| v^0(T, x) - v_k(T, x) \right\|_H + C_2 \frac{\gamma^k}{1 - \gamma} \varphi_0(\beta) \left\| G[\theta_0(t)] \right\|_H,$$

$$\left| J[u_k] - J_m[u_k] \right| \leq \int_0^1 \left\{ \left[v_k(T, x) - \xi(x) \right]^2 - \left[v_k^m(T, x) - \xi(x) \right]^2 \right\} dx \leq$$

$$\leq C_3 \left\| v_k(T, x) - v_k^m(T, x) \right\|_H,$$

$$2) \quad \left| J_m[u_k] - J_m^r[u_k] \right| \leq C_4 \left\| v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x) \right\|_H.$$

При расчете примера использованы следующие данные:

$$1) \quad T = 1;$$

$$2) \quad K(t, \tau) = t + \tau, \quad K_0 = \sup_{(t, \tau) \in D} |K(t, \tau)| = |t| + |\tau| = 2; \quad \lambda = 1;$$

$$3) \quad \xi(x) = \xi_0(x-1), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$4) \quad \psi(x) = x - 1, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$5) \quad \alpha = 1.5;$$

$$6) \quad p[t, u(t)] = \ln \sqrt{u^2(t) + 1}, \quad -1 \leq u(t) \leq 1.$$

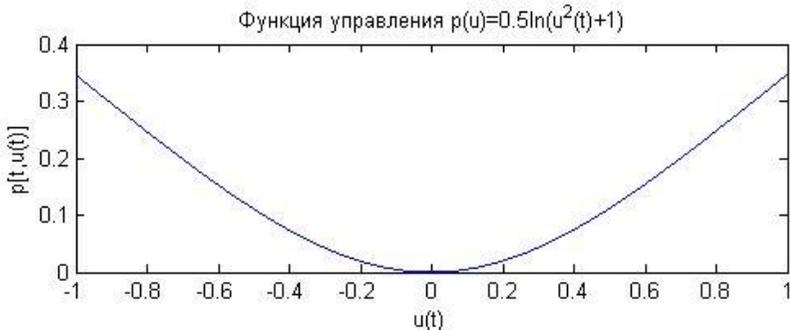


Рисунок 3.1

И при этом

$$p_u[t, u(t)] \left(\frac{u(t)}{p_u[t, u(t)]} \right)_{u'} = \frac{u(t)}{u^2(t) + 1} 2u = 2 \frac{u^2(t)}{u^2(t) + 1} > 0, \quad \forall u(t),$$

т.е. выполняется условие (3.5.13).

Для функции $p[t, u(t)]$ вычислена:

$$p_0 = \max_{0 \leq t \leq T} |p_u[t, u(t)]| = 0.5;$$

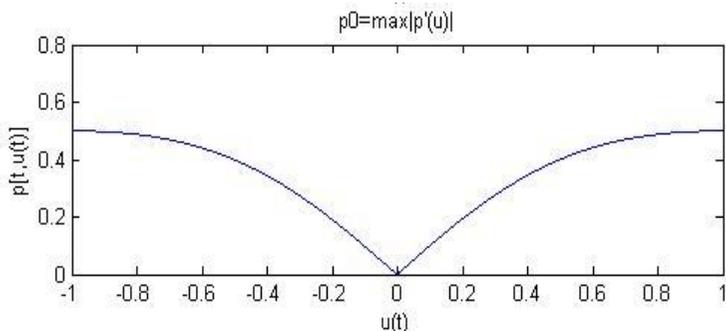


Рисунок 3.2

$$7) \quad \beta u(t) p_u^{-1}[t, u(t)] = \beta(u^2(t) + 1) = \theta(t);$$

$$u(t) = \pm \sqrt{\frac{\theta - \beta}{\beta}} = \varphi[t, \theta(t), \beta], \quad \theta(t) > \beta, \quad \theta(t) \leq 2\beta, \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$\varphi_0(\beta) = \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{\beta} \sqrt{\theta(t) - \beta}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\beta - \beta}} = \frac{1}{2\beta};$$

Таблица 3.1

β	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
$\varphi_0(\beta)$	0.7143	0.6667	0.6250	0.5882	0.5556	0.5263

8) Постоянная M_0 удовлетворяет оценке

$$M_0 = \max_{0 \leq t \leq T} (1 - e^{-\lambda_1^2(T-t)}) \leq 1;$$

$$9) \quad \gamma = 1 * 0.5 * \frac{1}{2\beta} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| K_0}{2\lambda_1^2} \right) < 1;$$

Таблица 3.2

β	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
γ	0.6305	0.5885	0.5517	0.5192	0.4904	0.4646

10) Значения λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ для расчета оценок следующие

Таблица 3.3

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	...
1.5000	4.5026	7.5127	10.5335	13.5668	...

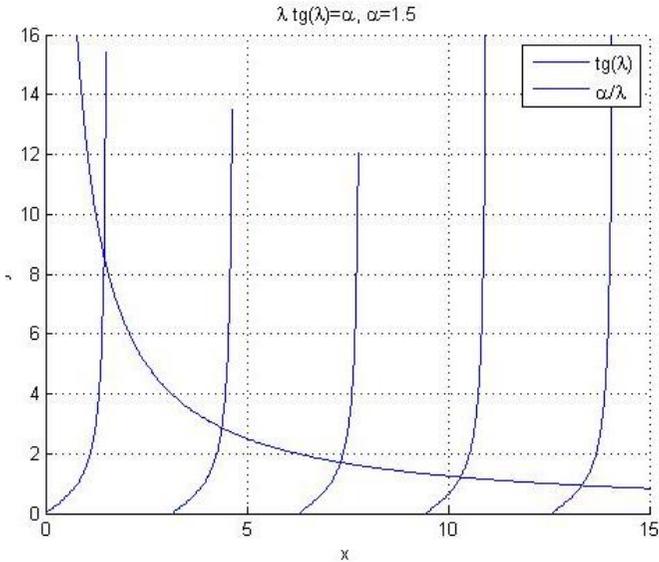


Рисунок 3.3

Ниже приводятся результаты численных расчетов выполненных в *Matlab 7.6.0 (R2008a)*. Листинг программы прилагается в приложении С.

1) Данный результат получен при $\xi_0 = 3$, $\beta = 0.85$.

Таблица 3.4

n	$\ \bar{\theta}(t) - \theta_l(t)\ _H$	$\ u^0(t) - u_k(t)\ _H$	$\ v^0(t, x) - v_k^{m,r}(t, x)\ _H^2$	$ J[u^0] - J'_m[u_k] $
1.	4.8103	2.8296	1.8798	17.4075
2.	3.4978	1.4693	0.9761	9.0388
3.	1.2970	0.7629	0.5068	4.6934
4.	0.6734	0.3961	0.2632	3.4371
5.	0.3497	0.2057	0.1367	1.2654
6.	0.1816	0.1068	0.0710	0.6571
7.	0.0943	0.0555	0.0368	0.3412
8.	0.0490	0.0288	0.0191	0.1772
9.	0.0254	0.0150	0.0099	0.0920
10.	0.0132	0.0078	0.0052	0.0478
11.	0.0069	0.0040	0.0027	0.0248
12.	0.0036	0.0021	0.0014	0.0129
13.	0.0018	0.0011	0.0007	0.0067
14.	0.0010	0.0006	0.0004	0.0035
15.	0.0005	0.0003	0.0002	0.0018
16.	0.0003	0.0002	0.0001	0.0009
17.	0.0001	0.0001	0.0001	0.0005
18.	0.0001	0.0000	0.0000	0.0003
19.	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
20.	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

2) Зависимость k -го приближения от β нормы

$$\|\bar{\theta}(t) - \theta_l(t)\|_H \leq \frac{\gamma^l}{1-\gamma} \|G[\theta_0(t)]\|_H$$

Таблица 3.5

$\beta \backslash k$	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
1.	8.1851	6.6849	5.6127	4.8103	4.1888	3.6942
2.	5.1608	3.9339	3.0965	3.4978	2.0542	1.7163
3.	4.2540	3.3151	1.7084	1.2970	1.0074	0.7974
4.	2.0517	1.3624	0.9425	0.6734	0.4940	0.3705
5.	1.2936	0.8017	0.5200	0.3497	0.2423	0.1721
6.	0.8157	0.4718	0.2869	0.1816	0.1188	0.0800
7.	0.5143	0.2776	0.1583	0.0943	0.0583	0.0371
8.	0.3243	0.1634	0.0873	0.0490	0.0286	0.0173
9.	0.2045	0.0962	0.0482	0.0254	0.0140	0.0080
10.	0.1289	0.0566	0.0266	0.0132	0.0069	0.0037
11.	0.0813	0.0333	0.0147	0.0069	0.0034	0.0017
12.	0.0512	0.0196	0.0081	0.0036	0.0017	0.0008
13.	0.0323	0.0115	0.0045	0.0018	0.0008	0.0004
14.	0.0204	0.0068	0.0025	0.0010	0.0004	0.0002
15.	0.0128	0.0040	0.0014	0.0005	0.0002	0.0001
16.	0.0081	0.0024	0.0007	0.0003	0.0001	0.0000
17.	0.0051	0.0014	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
18.	0.0032	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
19.	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
20.	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000

приближенное решение интегрального уравнения

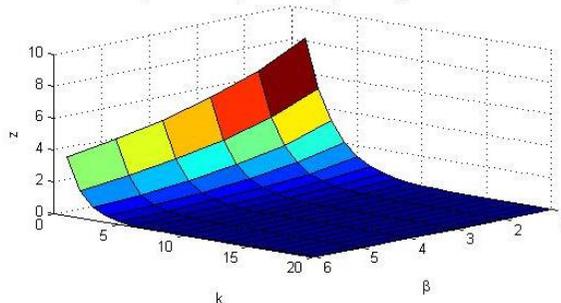


Рисунок 3.4

3) Зависимость k -го приближения от β нормы

$$\|u^0(t) - u_k(t)\|_H \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[\theta_0(t)]\|_H$$

Таблица 3.6

$\beta \backslash k$	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
1.	5.8465	4.4566	3.5079	2.8296	3.3271	1.9443
2.	3.6863	2.6226	1.9353	1.4693	1.1412	0.9033
3.	3.3243	1.5434	1.0677	0.7629	0.5597	0.4197
4.	1.4655	0.9082	0.5891	0.3961	0.2745	0.1950
5.	0.9240	0.5345	0.3250	0.2057	0.1346	0.0906
6.	0.5826	0.3145	0.1793	0.1068	0.0660	0.0421
7.	0.3673	0.1851	0.0989	0.0555	0.0324	0.0196
8.	0.2316	0.1089	0.0546	0.0288	0.0159	0.0091
9.	0.1460	0.0641	0.0301	0.0150	0.0078	0.0042
10.	0.0921	0.0377	0.0166	0.0078	0.0038	0.0020
11.	0.0581	0.0222	0.0092	0.0040	0.0019	0.0009
12.	0.0366	0.0131	0.0051	0.0021	0.0009	0.0004
13.	0.0231	0.0077	0.0028	0.0011	0.0005	0.0002
14.	0.0146	0.0045	0.0015	0.0006	0.0002	0.0001
15.	0.0092	0.0027	0.0008	0.0003	0.0001	0.0000
16.	0.0058	0.0016	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000
17.	0.0036	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
18.	0.0023	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
19.	0.0015	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
20.	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

k -е приближение оптимального управления

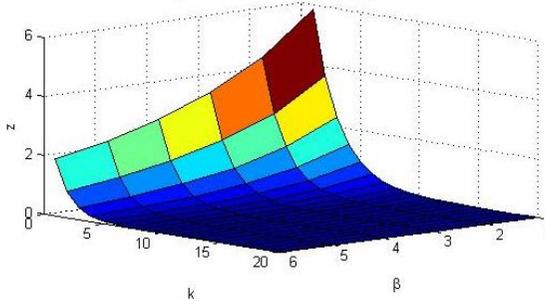


Рисунок 3.5

4) Зависимость k -го приближения от β нормы

$$\|v^0(t, x) - v_k^{m,r}(t, x)\|_H^2$$

Таблица 3.7

$\beta \backslash k$	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
1.	3.8841	2.9607	3.3305	1.8798	1.5460	1.2917
2.	3.4490	1.7423	1.2857	0.9761	0.7582	0.6001
3.	1.5441	1.0253	0.7093	0.5068	0.3718	0.2788
4.	0.9736	0.6034	0.3913	0.2632	0.1823	0.1295
5.	0.6139	0.3551	0.2159	0.1367	0.0894	0.0602
6.	0.3871	0.2090	0.1191	0.0710	0.0439	0.0280
7.	0.2440	0.1230	0.0657	0.0368	0.0215	0.0130
8.	0.1539	0.0724	0.0363	0.0191	0.0105	0.0060
9.	0.0970	0.0426	0.0200	0.0099	0.0052	0.0028
10.	0.0612	0.0251	0.0110	0.0052	0.0025	0.0013
11.	0.0386	0.0147	0.0061	0.0027	0.0012	0.0006
12.	0.0243	0.0087	0.0034	0.0014	0.0006	0.0003
13.	0.0153	0.0051	0.0019	0.0007	0.0003	0.0001
14.	0.0097	0.0030	0.0010	0.0004	0.0001	0.0001
15.	0.0061	0.0018	0.0006	0.0002	0.0001	0.0000
16.	0.0038	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
17.	0.0024	0.0006	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
18.	0.0015	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
19.	0.0010	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
20.	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

k, m, r -е приближение оптимального процесса

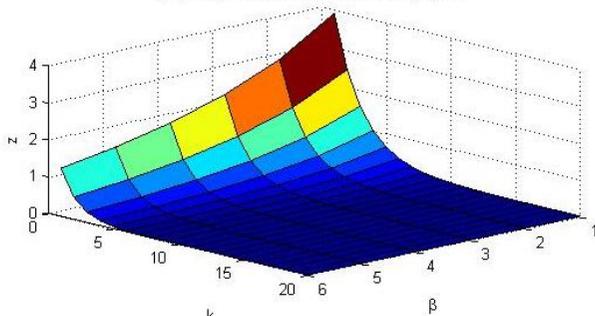


Рисунок 3.6

5) Зависимость k -го приближения от β нормы $|J[u^0] - J'_m[u_k]|$

Таблица 3.8

$\beta \backslash k$	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
1.	35.9671	27.4166	21.5805	17.4075	14.3162	11.9613
2.	22.6779	16.1342	11.9060	9.0388	7.0207	5.5571
3.	14.2988	9.4947	6.5686	4.6934	4.4430	3.5818
4.	9.0156	5.5875	3.6239	3.4371	1.6884	1.1995
5.	5.6845	4.2881	1.9993	1.2654	0.8280	0.5573
6.	3.5842	1.9350	1.1030	0.6571	0.4061	0.2589
7.	3.2599	1.1387	0.6085	0.3412	0.1991	0.1203
8.	1.4249	0.6701	0.3357	0.1772	0.0977	0.0559
9.	0.8984	0.3944	0.1852	0.0920	0.0479	0.0260
10.	0.5665	0.2321	0.1022	0.0478	0.0235	0.0121
11.	0.3572	0.1366	0.0564	0.0248	0.0115	0.0056
12.	0.2252	0.0804	0.0311	0.0129	0.0056	0.0026
13.	0.1420	0.0473	0.0172	0.0067	0.0028	0.0012
14.	0.0895	0.0278	0.0095	0.0035	0.0014	0.0006
15.	0.0564	0.0164	0.0052	0.0018	0.0007	0.0003
16.	0.0356	0.0096	0.0029	0.0009	0.0003	0.0001
17.	0.0224	0.0057	0.0016	0.0005	0.0002	0.0001
18.	0.0141	0.0033	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000
19.	0.0089	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
20.	0.0056	0.0012	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000

Приближенное значение функционала $|(u_0(t)) - I_m[u_k(t)]|$

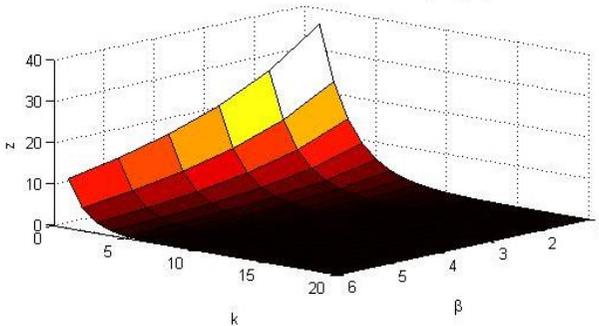


Рисунок 3.7

Вывод

В этой главе получено:

1. исследованы решения задач оптимального управления, когда тепловой процесс описывается вольтеррово интегродифференциальными уравнениями, граничное условие нелинейно содержит параметр управления;
2. оптимальное управление находится как решение нелинейного интегрального уравнения и удовлетворяет дополнительному условию, относительно функции источника и минимизируемого функционала;
3. установлено, что следует различать 3 вида приближенных решений;
4. приведена численная реализация конкретного примера, подтверждающая теоретические выводы.

ГЛАВА 4 ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПРИ ВЕКТОРНОМ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ

В этой главе исследованы решения задач векторного оптимального управления, когда тепловой процесс описывается вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями, граничные условия нелинейно содержат параметры управления. Как показали исследования, векторное оптимальное управление находится как решение системы нелинейных интегральных уравнений и удовлетворяет дополнительным условиям. Установлено, что задача нелинейного оптимального граничного управления, описываемая вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями однозначно разрешается и разработан алгоритм построения решение в виде тройки. Построены приближенные решения и доказано, что эти решения сходятся к точному решению. Установлено, что следует различать 3 вида приближенных решений.

4.1 Краевая задача управляемого процесса

Рассмотрим краевую задачу управляемого теплового процесса $v(t, x)$, $(t, x) \in Q = \{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ [25,26,36]

$$v_t = v_{xx} + \lambda \int_0^t K(t, \tau) v(\tau, x) d\tau + g(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (4.1.1)$$

$$v(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (4.1.2)$$

$$v_x(t, 0) = p_1[t, u_1(t)], \quad 0 < t \leq T,$$

$$v_x(t, 1) + \alpha v(t, 1) = p_2[t, u_2(t)], \quad 0 < t \leq T, \quad (4.1.3)$$

где $K(t, \tau)$ – известная ограниченная функция, т.е.

$$K_0 = \sup_{(t,\tau) \in D} |K(t,\tau)|; \quad (4.1.4)$$

$g(t,x) \in H(Q)$, $\psi(x) \in H(0,1)$ – заданные функции;
 $p_1[t, u_1(t)] \in H(0,T)$, $p_2[t, u_2(t)] \in H(0,T)$ – функции внешних источников, нелинейно зависящие от функции управления $u_1(t) \in H(0,T)$ и $u_2(t) \in H(0,T)$ и по функциональным переменным $u_1(t)$, $u_2(t)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial p_1[t, u_1(t)]}{\partial u_1} \neq 0, \quad \frac{\partial p_2[t, u_2(t)]}{\partial u_2} \neq 0, \quad \forall t \in [0, T]; \quad (4.1.5)$$

λ – параметр, постоянная $\alpha > 0$, T – фиксированный момент времени, $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y .

Любая функция $v(t,x) \in H(Q)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (v\phi)_{t_1}^{t_2} dx = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \left[(\phi_t + \phi_{xx})v(t,x) + \left(\lambda \int_0^t K(t,\tau)v(\tau,x) d\tau + g(t,x) \right) \phi(t,x) \right] dx dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[p_2[t, u_2(t)]\phi(t,1) - v(t,1)(\phi_x(t,1) + \alpha\phi(t,1)) - \right. \\ & \left. - p_1[t, u_1(t)]\phi(t,0) + v(t,0)\phi_x(t,0) \right] dt, \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

при произвольных моментах времени t_1 и t_2 ($0 < t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$), для любой функции $\phi(t,x) \in C^{1,2}(Q)$; начальному и граничным условиям в слабом смысле, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 v(0,x)\phi_0(x) dx = \int_0^1 \psi(x)\phi_0(x) dx,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^T v_x(t, 0) \phi_1(t) dt = \int_0^T p_1[t, u_1(t)] \phi_1(t) dt,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^T (v_x(t, 1) + \alpha v(t, 1)) \phi_1(t) dt = \int_0^T p_2[t, u_2(t)] \phi_1(t) dt, \quad (4.1.7)$$

любых функций $\phi_0(x) \in H(0, 1)$ и $\phi_1(t) \in H(0, T)$, называется слабо обобщенным решением (4.1.1)-(4.1.3).

Слабо обобщенное решение краевой задачи (4.1.1)-(4.1.3) построим аналогично задаче (3.1.1)-(3.1.3)

$$v_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left(\lambda \int_0^\tau K(\tau, s) v_n(s) ds + \right. \\ \left. + g_n(\tau) + p_2[t, u_2(t)] z_n(1) - p_1[t, u_1(t)] z_n(0) \right) d\tau, \quad (4.1.8)$$

которое при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, \dots$ определяется как решение линейного интегрального уравнения

$$v_n(t) = \lambda \int_0^t K_n(t, s) v_n(s) ds + a_n(t), \quad (4.1.9)$$

с ядром

$$K_n(t, s) = \int_s^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K(\tau, s) d\tau, \quad (4.1.10)$$

и свободным членом

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left(g_n(\tau) + \right. \\ \left. + p_2[\tau, u_2(\tau)] z_n(1) - p_1[\tau, u_1(\tau)] z_n(0) \right) d\tau, \quad (4.1.11)$$

где функции $z_n(x)$ и числа λ_n имеет те же характеристики, которые указаны в пункте 3.1., а ψ_n , $g_n(\tau)$ – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi(x)$ и $g(t, x)$.

Решение (4.1.9) находится по формуле [66]

$$v_n(t) = \lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t), \quad (4.1.12)$$

где $R_n(t, s, \lambda)$ - резольвента ядра $K_n(t, s) \equiv K_{n,1}(t, s)$, которая находится по формуле (3.1.24).

Слабо обобщенное решение (4.1.1) – (4.1.3) строится

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right] z_n(x), \quad (4.1.13)$$

и удовлетворяет соотношению $\int_0^T \int_0^1 v(t, x) dx dt < \infty$, т.е. $v(t, x) \in H(Q)$

4.2 Постановка задачи оптимизации с векторным управлением и вывод условия оптимальности

Требуется минимизировать

$$J[u_1(t), u_2(t)] = \int_0^1 [v(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt, \quad \beta > 0, \quad (4.2.1)$$

где $\xi(x) \in H(0, 1)$ – заданная функция, на множестве решений (4.1.1)-(4.1.3), т.е. нужно найти такие управления $u_1^0(t) \in H(0, T)$ и $u_2^0(t) \in H(0, T)$, и соответствующее им решение $v^0(t, x)$, которые минимизируют функционал (4.2.1). При этом $u_1^0(t)$ и $u_2^0(t)$ называются оптимальными управлениями, а $v^0(t, x)$ – оптимальным процессом.

В силу условия (4.1.5) каждому векторному управлению $(u_1^0(t), u_2^0(t))$ соответствует единственное решение краевой задачи (4.1.1)-(4.1.3). Тогда решению (4.1.1)-(4.1.3) вида $v(t) + \Delta v(t)$ соответствуют управления $u_1(t) + \Delta u_1(t)$ и $u_2(t) + \Delta u_2(t)$. Согласно методике работы [32], непосредственным вычислением, приращение функционала $\Delta J[u(t)]$ представим в виде

$$\Delta J[u_1, u_2] = J[u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2] - J[u_1, u_2] =$$

$$= -\int_0^T \Delta \Pi [t, v(t, x), \omega(t, x), u_1(t), u_2(t)] dt + \int_0^1 \Delta v^2(T, x) dx, \quad (4.2.2)$$

где

$$\begin{aligned} & \Delta \Pi [t, v(t, x), \omega(t, x), u_1(t), u_2(t)] = \\ & = \Pi [t, v(t, x), \omega(t, x), u_1(t) + \Delta u_1(t), u_2(t) + \Delta u_2(t)] - \\ & - \Pi [t, v(t, x), \omega(t, x), u_1(t), u_2(t)], \\ & \Pi [t, v(t, x), \omega(t, x), u_1(t), u_2(t)] = \\ & = -\omega(t, 0) p_1 [t, u_1(t)] + \omega(t, 1) p_2 [t, u_2(t)] - \beta (u_1^2(t) + u_2^2(t)), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

$\omega(t, x)$ – слабо обобщенное решение

$$\begin{aligned} \omega_t + \omega_{xx} + \lambda \int_t^T K(\tau, t) \omega(\tau, x) d\tau &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t < T, \\ \omega(T, x) + 2[v(T, x) - \xi(x)] &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ \omega_x(t, 0) = 0, \quad \omega_x(t, 1) + \alpha \omega(t, 1) &= 0, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Решение (4.2.4) определяется

$$\begin{aligned} \omega(t, x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_t^T L_n(s, t, \lambda) [v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds + \right. \\ \left. + [v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-t)} \right) z_n(x), \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

где
$$v_n(T) = \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(T),$$

$$\begin{aligned} a_n(T) = e^{-\lambda_n^2 T} \psi_n + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} (g_n(\tau) + \\ + p_2 [\tau, u_2(\tau)] z_n(1) - p_1 [\tau, u_1(\tau)] z_n(0)) d\tau, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

а резольвента $L_n(s, t, \lambda)$ определяется в виде ряда Неймана и сходится равномерно для любого значения λ (см. формулу (3.2.2)).

Нетрудно проверить, что $\omega(t, x) \in H(Q)$.

Для определения оптимального управления, согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [32], условия оптимальности векторного управления определяются соотношениями

$$\begin{cases} 2\beta \frac{u_1(t)}{\left(p_1[t, u_1(t)]\right)_{u_1}} = -\omega(t, 0), \\ 2\beta \frac{u_2(t)}{\left(p_2[t, u_2(t)]\right)_{u_2}} = \omega(t, 1), \end{cases} \quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned} \left(p_1[t, u_1(t)]\right)_{u_1} \left(\frac{u_1(t)}{\left(p_1[t, u_1(t)]\right)_{u_1}}\right)_{u_1} &> 0, \\ \left(p_2[t, u_2(t)]\right)_{u_2} \left(\frac{u_2(t)}{\left(p_2[t, u_2(t)]\right)_{u_2}}\right)_{u_2} &> 0. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

4.3 Система нелинейных интегральных уравнений оптимальных управлений

С учетом (4.3.5) и (4.2.6) условия оптимальности (4.2.7) приводим к виду

$$\begin{aligned} \beta u_1 \left(\frac{\partial p_1}{\partial u_1}\right)^{-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} z_n(0) [v_n(T) - \xi_n] \left(\lambda \int_t^T L_n(s, t, \lambda) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds + e^{-\lambda_n^2(T-t)} \right), \\ \beta u_2 \left(\frac{\partial p_2}{\partial u_2}\right)^{-1} &= -\sum_{n=1}^{\infty} z_n(1) [v_n(T) - \xi_n] \left(\lambda \int_t^T L_n(s, t, \lambda) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds + e^{-\lambda_n^2(T-t)} \right), \end{aligned}$$

и преобразуем

$$\beta \left(\frac{u_1(t)}{\left(p_1[t, u_1(t)] \right)_{u_1}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-z_n(0)}{z_n(1)} \right) G_n(t, \lambda) \int_0^T S_n(\tau, \lambda) (z_n(0), z_n(1)) \cdot \left(\frac{u_2(t)}{\left(p_2[t, u_2(t)] \right)_{u_2}} \right) \cdot \left(\frac{p_1[\tau, u_1(\tau)]}{p_2[\tau, u_2(\tau)]} \right) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-z_n(0)}{z_n(1)} \right) G_n(t, \lambda) h_n, \quad (4.3.1)$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) - \int_0^T S_n(t, \lambda) g_n(\tau) d\tau; \quad (4.3.2)$$

$$S_n(t, \lambda) = \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T R_n(T, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-t)} ds \right); \quad (4.3.3)$$

$$G_n(t, \lambda) = \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T L_n(s, t, \lambda) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds \right). \quad (4.3.4)$$

Таким образом, векторное оптимальное управление находится как решение (4.4.1), и причем это решение должно удовлетворять неравенству (4.2.8). Так, как условие (4.2.8) ограничивает класс функций $p_1[t, u_1(t)]$ и $p_2[t, u_2(t)]$, то будем полагать, что функции $p_1[t, u_1(t)]$ и $p_2[t, u_2(t)]$ удовлетворяют условию (4.2.8) для любых управлений $u_1(t) \in H(0, T)$ и $u_2(t) \in H(0, T)$.

Используя методику работы [41], положим

$$\beta \frac{u_1(t)}{\left(p_1[t, u_1(t)] \right)_{u_1}} = \theta_1(t), \quad \beta \frac{u_2(t)}{\left(p_2[t, u_2(t)] \right)_{u_2}} = \theta_2(t). \quad (4.3.5)$$

Лемма 4.3.1. Вектор функция $(\theta_1(t), \theta_2(t)) \in H^2(0, T) = H(0, T) \times H(0, T)$.

Доказательство. С учетом (4.1.5) имеет место

$$\sup \left| \left(p_1 \left[t, u_1(t) \right] \right)_{u_1} \right| \leq M_1, \quad \sup \left| \left(p_2 \left[t, u_2(t) \right] \right)_{u_2} \right| \leq M_2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Учитывая $u_1(t) = H(0, T)$ и $u_2(t) = H(0, T)$, утверждение леммы следует из

$$\int_0^T \theta_1^2(t) dt \leq \beta^2 \int_0^T \left| \left(p_1 \left[t, u_1(t) \right] \right)_{u_1} \right|^2 |u_1(t)|^2 dt \leq \beta^2 M_1^2 \int_0^T u_1^2(t) dt < \infty,$$

$$\int_0^T \theta_2^2(t) dt \leq \beta^2 \int_0^T \left| \left(p_2 \left[t, u_2(t) \right] \right)_{u_2} \right|^2 |u_2(t)|^2 dt \leq \beta^2 M_2^2 \int_0^T u_2^2(t) dt < \infty.$$

С учетом условия (4.1.8), из (4.3.5) управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ определяются однозначно, т.е. существуют функции φ_1 и φ_2 такие, что

$$u_1(t) = \varphi_1(t, \theta_1(t), \beta), \quad u_2(t) = \varphi_2(t, \theta_2(t), \beta). \quad (4.3.6)$$

В силу (4.3.5) и (4.3.6) систему уравнений (4.4.1) перепишем в виде

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} -z_n(0) \\ z_n(1) \end{pmatrix} G_n(t, \lambda) \int_0^T S_n(\tau, \lambda) (z_n(0), z_n(1)) \cdot \\ \cdot \begin{pmatrix} p_1 \left[\tau, \varphi_1(\tau, \theta_1(\tau), \beta) \right] \\ p_2 \left[\tau, \varphi_2(\tau, \theta_2(\tau), \beta) \right] \end{pmatrix} d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} -z_n(0) \\ z_n(1) \end{pmatrix} G_n(t, \lambda) h_n.$$

Введя обозначения

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}, \quad z_n(0, 1) = \begin{pmatrix} -z_n(0) \\ z_n(1) \end{pmatrix}, \quad p \left[\tau, u_1(\tau), u_2(\tau) \right] = \begin{pmatrix} p_1 \left[\tau, u_1(\tau) \right] \\ p_2 \left[\tau, u_2(\tau) \right] \end{pmatrix},$$

преобразуем к виду

$$\theta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} z_n(0, 1) G_n(t, \lambda) \int_0^T S_n(\tau, \lambda) z_n^*(0, 1) \cdot \\ \cdot p \left[\tau, \varphi_1(\tau, \theta_1(\tau), \beta), \varphi_2(\tau, \theta_2(\tau), \beta) \right] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(0, 1) G_n(t, \lambda) h_n \quad (4.3.7)$$

или в виде операторного уравнения

$$\theta(t) = E[\theta_1(t), \theta_2(t)] + \hbar(t), \quad (4.3.8)$$

где
$$E[\theta_1(t), \theta_2(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(0,1) G_n(t, \lambda) \int_0^T S_n(\tau, \lambda) z_n^*(0,1) \cdot \\ \cdot p[\tau, \varphi_1(\tau, \theta_1(\tau), \beta), \varphi_2(\tau, \theta_2(\tau), \beta)] d\tau, \\ \hbar(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(0,1) G_n(t, \lambda) h_n. \quad (4.3.9)$$

Теперь исследуем вопросы однозначной разрешимости (4.3.8).

Лемма 4.3.2. Функция $\hbar(t) \in H^2(0, T)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из

$$\int_0^T \|\hbar(t)\|_{R^2}^2 dt = \int_0^T (h_1^2(t) + h_2^2(t)) dt = \left\{ \int_0^T \left(-\sum_{n=1}^{\infty} z_n(0) G_n(t, \lambda) h_n \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n(1) G_n(t, \lambda) h_n \right)^2 \right\} dt \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t, \lambda) (z_n^2(1) + z_n^2(0)) dt \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2.$$

Вычислим следующие соотношения:

$$1) \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t, \lambda) (z_n^2(1) + z_n^2(0)) dt = \\ = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (z_n^2(1) + z_n^2(0)) \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T L_n(s, t, \lambda) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds \right)^2 dt \leq \\ \leq 8 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-2\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T L_n^2(s, t, \lambda) e^{-2\lambda_n^2(T-s)} ds \right)^2 dt \leq \\ \leq 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-t)} dt + \lambda^2 \int_0^T \int_t^T L_n^2(s, t, \lambda) ds \int_t^T e^{-2\lambda_n^2(T-s)} ds dt \right) \leq \\ \leq 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n^2} \left(1 + \lambda^2 \frac{K_0 T M_0}{2\lambda_1^2 |\lambda|} \right) \leq 4 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 T M_0}{2\lambda_1^2} \right); \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n - \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) \right) -$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \int_0^T S_n(t, \lambda) g_n(\tau) d\tau \right)^2 \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n^2 + 2\psi_n^2 \left(e^{-2\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n^2(T, s, \lambda) e^{-2\lambda_n^2 s} ds \right) \right) + \\
& + \int_0^T S_n^2(t, \lambda) d\tau \int_0^T g_n^2(\tau) d\tau \leq \\
& \leq 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n^2 + 2\psi_n^2 \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 M_0}{(2\lambda_1^2)^2} \right) + \frac{1}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) \|g(t, x)\|_H^2 \right) \leq \\
& \leq 3 \left(\|\xi(x)\|_H^2 + 2\|\psi(x)\|_H^2 \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 M_0}{(2\lambda_1^2)^2} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) \|g(t, x)\|_H^2 \right),
\end{aligned}$$

и получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t, \lambda) (z_n^2(1) + z_n^2(0)) dt \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 \leq 12 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \cdot \\
& \cdot \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 TM_0}{2\lambda_1^2} \right) \left(\|\xi(x)\|_H^2 + 2\|\psi(x)\|_H^2 \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 M_0}{(2\lambda_1^2)^2} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) \|g(t, x)\|_H^2 \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Лемма 4.3.3. Оператор $E[\theta_1(t), \theta_2(t)] \in H^2(0, T)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из вычислений

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T E^2[\theta_1(t), \theta_2(t)] dt = \\
 & = \int_0^T \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n(0,1) G_n(t, \lambda) \int_0^T S_n(\tau, \lambda) z_n^*(0,1) \cdot \right. \right. \\
 & \cdot p[\tau, \varphi_1(\tau, \theta_1(\tau), \beta), \varphi_2(\tau, \theta_2(\tau), \beta)] d\tau \left. \right\|^2 \leq \\
 & \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n(0,1)\|_{R^2}^2 |G_n(t, \lambda)|^2 dt \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T |S_n(\tau, \lambda)|^2 \|z_n^*(0,1)\|_{R^2}^2 d\tau \cdot \\
 & \cdot \int_0^T \|p[\tau, \varphi_1(\tau, \theta_1(\tau), \beta), \varphi_2(\tau, \theta_2(\tau), \beta)]\|_{R^2}^2 d\tau \leq \\
 & \leq 16 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 T M_0}{2\lambda_1^2} \right)^2 \cdot \\
 & \cdot \left(\|p_1[\tau, \varphi_1(\tau, \theta_1(\tau), \beta)]\|_H^2 + \|p_2[\varphi_2(\tau, \theta_2(\tau), \beta)]\|_H^2 \right) < \infty.
 \end{aligned}$$

Лемма 4.3.4. Оператор $E[\theta]$ является сжимающим, если выполнены следующие условия

$$\|p_i[t, u_i(t)] - p_i[t, \bar{u}_i(t)]\|_{H(0,T)} \leq p_{0i} \|u_i(t) - \bar{u}_i(t)\|_{H(0,T)}, \quad (4.3.10)$$

$$p_{0i} > 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\|\varphi_i[t, \theta_i(t), \beta] - \varphi_i[t, \bar{\theta}_i(t), \beta]\|_{H(0,T)} \leq \varphi_{0i}(\beta) \|\theta_i(t) - \bar{\theta}_i(t)\|_{H(0,T)},$$

$$\varphi_{0i}(\beta) > 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.3.11)$$

$$\gamma = 4 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 T M_0}{2\lambda_1^2} \right) B(p_{01}, p_{02}, \varphi_{10}(\beta), \varphi_{20}(\beta)) < 1. \quad (4.3.12)$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из

$$\begin{aligned}
& \|E[\theta] - E[\bar{\theta}]\|_{H^2}^2 = \\
& = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n(0,1) G_n(t, \lambda) \int_0^T S_n(\tau, \lambda) z_n^*(0,1) \begin{pmatrix} p_1[\tau, \varphi_1(\tau, \theta_1(\tau), \beta)] \\ p_2[\tau, \varphi_2(\tau, \theta_2(\tau), \beta)] \end{pmatrix} d\tau - \right. \\
& \left. - \sum_{n=1}^{\infty} z_n(0,1) G_n(t, \lambda) \int_0^T S_n(\tau, \lambda) z_n^*(0,1) \begin{pmatrix} p_1[\tau, \varphi_1(\tau, \bar{\theta}_1(\tau), \beta)] \\ p_2[\tau, \varphi_2(\tau, \bar{\theta}_2(\tau), \beta)] \end{pmatrix} d\tau \right)^2 dt \leq \\
& \leq \int_0^T \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n(0,1) G_n(t, \lambda) \right)^2 dt \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} S_n(\tau, \lambda) z_n^*(0,1) \right) \cdot \right. \\
& \left. \cdot \begin{pmatrix} p_1[\tau, \varphi_1(\tau, \theta_1(\tau), \beta)] - p_1[\tau, \varphi_1(\tau, \bar{\theta}_1(\tau), \beta)] \\ p_2[\tau, \varphi_2(\tau, \theta_2(\tau), \beta)] - p_2[\tau, \varphi_2(\tau, \bar{\theta}_2(\tau), \beta)] \end{pmatrix} \right)^2 d\tau \leq \\
& \leq 16 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 T M_0}{2\lambda_1^2} \right)^2 \cdot \\
& \cdot \left(\|p_1[\tau, \varphi_1(\tau, \theta_1(\tau), \beta)] - p_1[\tau, \varphi_1(\tau, \bar{\theta}_1(\tau), \beta)]\|_H^2 + \right. \\
& \left. + p_2[\tau, \varphi_2(\tau, \theta_2(\tau), \beta)] - p_2[\tau, \varphi_2(\tau, \bar{\theta}_2(\tau), \beta)] \right)_H^2 \leq \\
& \leq 16 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 T M_0}{2\lambda_1^2} \right)^2 \cdot \\
& \cdot \left(p_{01}^2 \varphi_{01}^2(\beta) \|\theta_1(t) - \bar{\theta}_1(t)\|_H^2 + p_{02}^2 \varphi_{02}^2(\beta) \|\theta_2(t) - \bar{\theta}_2(t)\|_H^2 \right) \leq \\
& \leq 16 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 T M_0}{2\lambda_1^2} \right)^2 B^2 \cdot \\
& \cdot (p_{01}, p_{02}, \varphi_{10}(\beta), \varphi_{20}(\beta)) \|\theta(t) - \bar{\theta}(t)\|_H^2 < \infty, \\
& \text{где } B^2(p_{01}, p_{02}, \varphi_{10}(\beta), \varphi_{20}(\beta)) = \max(p_{01}^2 \varphi_{01}^2(\beta), p_{02}^2 \varphi_{02}^2(\beta)),
\end{aligned}$$

откуда находим, что

$$\begin{aligned} & \|E[\theta] - E[\bar{\theta}]\|_H \leq \\ & \leq 4 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 T M_0}{2\lambda_1^2} \right) B(p_{01}, p_{02}, \varphi_{10}(\beta), \varphi_{20}(\beta)) \|\theta(t) - \bar{\theta}(t)\|_H = \\ & = \gamma \|\theta(t) - \bar{\theta}(t)\|_H < \infty. \end{aligned}$$

Теорема 4.3.1. Пусть выполнены условия

$$1) \frac{\partial p_1[t, u_1(t)]}{\partial u_1} \neq 0, \quad \frac{\partial p_2[t, u_2(t)]}{\partial u_2} \neq 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$2) \left(p_1[t, u_1(t)] \right)_{u_1} \left(\frac{u_1(t)}{\left(p_1[t, u_1(t)] \right)_{u_1}} \right)_{u_1} > 0,$$

$$\left(p_2[t, u_2(t)] \right)_{u_2} \left(\frac{u_2(t)}{\left(p_2[t, u_2(t)] \right)_{u_2}} \right)_{u_2} > 0,$$

$$3) \|p_i[t, u_i(t)] - p_i[t, \bar{u}_i(t)]\|_{H(0,T)} \leq p_{0i} \|u_i(t) - \bar{u}_i(t)\|_{H(0,T)},$$

$$p_{0i} > 0, \quad i = 1, 2,$$

$$4) \|\varphi_i[t, \theta_i(t), \beta] - \varphi_i[t, \bar{\theta}_i(t), \beta]\|_{H(0,T)} \leq \varphi_{0i}(\beta) \|\theta_i(t) - \bar{\theta}_i(t)\|_{H(0,T)},$$

$$\varphi_{0i}(\beta) > 0, \quad i = 1, 2$$

$$5) \gamma = 4 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 T M_0}{2\lambda_1^2} \right) B(p_{01}, p_{02}, \varphi_{10}(\beta), \varphi_{20}(\beta)) < 1.$$

Тогда существует единственное решение $E[\theta] \in H^2(0, T)$.

Доказательство. С учетом Лемм 4.4.1 – 4.3.3, $E[\theta] \in H^2(0, T)$. С учетом Леммы 3.4.4, $E[\theta]$ является сжимающим. Так, как $H(0, T)$ является полным метрическим пространством, то учитывая теорему [71] о принципе сжимающих

отображений, $E[\theta]$ имеет единственное решение, т.е. $E[\theta] \in H^2(0, T)$.

Чтобы найти решение $E[\theta]$, используем метод последовательных приближений, т.е. l -е приближение $E[\theta]$ определяется $\theta_l(t) = E[\theta_{l-1}(t)]$, $l = 1, 2, 3, \dots$,

где $\theta_0(t)$ - произвольный элемент пространства $H^2(0, T)$, причем

$$\|\bar{\theta}(t) - \theta_l(t)\|_{H^2(0, T)} \leq \frac{\gamma^l}{1 - \gamma} \|E[\theta_0(t)] + \dot{h}(t) - \theta_0(t)\|_H,$$

откуда, в силу произвольности $\theta_0(t)$ при $\theta_0(t) = \dot{h}(t)$

$$\|\bar{\theta}(t) - \theta_l(t)\|_{H^2(0, T)} \leq \frac{\gamma^l}{1 - \gamma} \|E[\theta_0(t)]\|_H. \quad (4.3.13)$$

Точное решение $\bar{\theta}(t)$ находится из равенства

$$\bar{\theta}(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} \theta_l(t),$$

т.е. как предел приближенных решений.

Точное решение $\bar{\theta}(t)$ подставляя в (4.3.6) определяем

$$\begin{aligned} u_1^0(t) &= \varphi_1(t, \bar{\theta}_1(t), \beta), \\ u_2^0(t) &= \varphi_2(t, \bar{\theta}_2(t), \beta). \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Соответствующий оптимальным управлениям $u_1^0(t)$ и $u_2^0(t)$, оптимальный процесс $v^0(t, x)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} v^0(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right] z_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) \left(e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} (g_n(\tau) + \right. \right. \\ &\left. \left. + z_n(1) p_2[\tau, u_2^0(\tau)] - z_n(0) p_1[\tau, u_1^0(\tau)] \right) d\tau \right) ds + e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n(1) p_2[\tau, u_2^0(\tau)] - z_n(0) p_1[\tau, u_1^0(\tau)] \right) d\tau \Big] z_n(x) = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) \left(g_n(\tau) + \right. \right. \\
& + z_n(1) p_2[\tau, u_2^0(\tau)] - z_n(0) p_1[\tau, u_1^0(\tau)] \Big) d\tau + \\
& \left. \left. + \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) \right] z_n(x), \quad (4.3.15)
\end{aligned}$$

минимальное значение функционала (4.3.1) вычисляется

$$J[u_1^0(t), u_2^0(t)] = \int_0^1 [v^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \left([u_1^0(t)]^2 + [u_2^0(t)]^2 \right) dt \quad (4.3.16)$$

Найденная тройка $\left((u_1^0(t), u_2^0(t)), v^0(t, x), J[u_1^0(t), u_2^0(t)] \right)$

является полным решением задачи нелинейного оптимального граничного управления.

4.4 Приближенное решение задач нелинейной оптимизации и его сходимость

На практике не всегда удастся найти точное решение уравнения (4.3.13). Поэтому, в большинстве случаев ограничиваются нахождением приближенного решения $\theta_k(t)$ уравнения (4.3.13), где число k определяется из неравенства [71]

$$\left\| \bar{\theta}(t) - \theta^{(k)}(t) \right\|_{H^2} \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \left\| E[\theta_0(t)] \right\|_{H^2} < \varepsilon \quad (4.4.1)$$

при заданном $\varepsilon > 0$. Согласно структуре векторного оптимального управления k – е приближение находим по формуле

$$\begin{aligned}
u_1^{(k)}(t) &= \varphi_1(t, \theta_1^{(k)}(t), \beta), \\
u_2^{(k)}(t) &= \varphi_2(t, \theta_2^{(k)}(t), \beta), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4.2)
\end{aligned}$$

Лемма 4.4.1. $k - \epsilon$ приближение оптимального управления удовлетворяет оценке

$$\|u_i^0(t) - u_i^{(k)}(t)\|_{H^2} \leq \varphi_{0i}(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|E[\theta_0(t)]\|_{H^2}, \quad i=1,2, \quad (4.4.3)$$

и сходится к оптимальному управлению $u_i^0(t)$, $i=1,2$ по норме пространства $H^2(0, T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|u_i^0(t) - u_i^{(k)}(t)\|_{H^2} &\leq \|\varphi_i[t, \bar{\theta}_i(t), \beta] - \varphi_i[t, \theta_i^{(k)}(t), \beta]\|_{H^2} \leq \\ &\leq \varphi_{0i}(\beta) \|\bar{\theta}_i(t) - \theta_i^{(k)}(t)\|_{H^2} \leq \varphi_{0i}(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|E[\theta_0(t)]\|_{H^2}, \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

$k - \epsilon$ приближение управление $u_i^{(k)}(t)$ подставляя в (4.3.15) находим $k - \epsilon$ приближение $v_k(t, x)$ оптимального процесса $v^0(t, x)$, т.е.

$$\begin{aligned} v_k(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) + \right. \\ &+ \left. \int_0^t \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left(g_n(\tau) + z_n(1) p_2[\tau, u_2^{(k)}(\tau)] - z_n(0) p_1[\tau, u_1^{(k)}(\tau)] \right) d\tau \right] z_n(x). \quad (4.4.4) \end{aligned}$$

Как нам известно, из третьей главы, оптимальный процесс $v(t, x)$ имеет приближение по резольвенту

$$\begin{aligned} v_k^m(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^t R_n^m(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) + \right. \\ &+ \left. \int_0^t \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n^m(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\cdot \left(g_n(\tau) + z_n(1) p_2 \left[\tau, u_2^{(k)}(\tau) \right] - z_n(0) p_1 \left[\tau, u_1^{(k)}(\tau) \right] \right) d\tau \Big|_{z_n(x)}, \quad (4.4.5)$$

и приближение, используемое на практике

$$\begin{aligned} v_k^{m,r}(t,x) &= \sum_{n=1}^r \left[\psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^t R_n^m(t,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) + \right. \\ &+ \left. \int_0^t \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_\tau^t R_n^m(t,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left(g_n(\tau) + z_n(1) p_2 \left[\tau, u_2^{(k)}(\tau) \right] - z_n(0) p_1 \left[\tau, u_1^{(k)}(\tau) \right] \right) d\tau \right]_{z_n(x)}, \quad (4.4.6) \end{aligned}$$

которые называются k , m -ым и k , m , r -ым приближениям.

Лемма 4.4.2. k – е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} &\|v^0(t,x) - v_k(t,x)\|_H \leq \\ &\leq 2 \sqrt{T \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \lambda^2 T^2 \left[\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda|K_0 T}{\lambda_1^2}} \right]^2 \right)} p_{0i} \|u_i^0(t) - u_i^{(k)}(t)\|_{H^2} = \\ &= 2 \sqrt{T \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \lambda^2 T^2 \left[\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda|K_0 T}{\lambda_1^2}} \right]^2 \right)}. \\ &\cdot \left(p_{01}^2 \|u_1^0(t) - u_1^{(k)}(t)\|_H + p_{02}^2 \|u_2^0(t) - u_2^{(k)}(t)\|_H \right) \quad (4.4.7) \end{aligned}$$

и сходится к оптимальному процессу $v^0(t,x)$ по норме пространства $H(Q)$.

Доказательство. Согласно (4.4.3) и (4.4.4), непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned}
& \left\| v^0(t, x) - v_k(t, x) \right\|_H^2 = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \left(z_n(1) p_2[\tau, u_2^0(\tau)] - z_n(0) p_1[\tau, u_1^0(\tau)] \right) \cdot \right. \\
& \cdot \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau - \\
& \left. - \int_0^t \left(z_n(1) p_2[\tau, u_2^{(k)}(\tau)] - z_n(0) p_1[\tau, u_1^{(k)}(\tau)] \right) \cdot \right. \\
& \cdot \left. \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau \right\}^2 dt \leq \\
& \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \left[\left(p_2[\tau, u_2^0(\tau)] - p_2[\tau, u_2^{(k)}(\tau)] \right) z_n(1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(p_1[\tau, u_1^0(\tau)] - p_1[\tau, u_1^{(k)}(\tau)] \right) z_n(0) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left. \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau \right\}^2 dt \leq \\
& \leq 2 \cdot 4 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left(e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda^2 \int_{\tau}^T R_n^2(t, s, \lambda) ds \int_{\tau}^T e^{-2\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau dt \times \\
& \times \left(\left\| p_2[\tau, u_2^0(\tau)] - p_2[\tau, u_2^{(k)}(\tau)] \right\|_H^2 + \left\| p_1[\tau, u_1^0(\tau)] - p_1[\tau, u_1^{(k)}(\tau)] \right\|_H^2 \right) \leq \\
& \leq 4T \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \lambda^2 T^2 \left[\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right]^2 \right) \cdot \\
& \cdot \left(p_{01}^2 \left\| u_1^0(t) - u_1^{(k)}(t) \right\|_H^2 + p_{02}^2 \left\| u_2^0(t) - u_2^{(k)}(t) \right\|_H^2 \right),
\end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 4.4.3. k, m – е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\|v_k(t, x) - v_k^m(t, x)\|_H \leq \lambda T \sqrt{2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)} \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} \frac{1}{m!} \left[\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right]^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right). \quad (4.4.8)$$

$$\cdot \left[\|\psi(x)\|_H + T \|g(\tau, x)\|_H + 2T \left\| \left[\tau, u_2^{(k)}(\tau) \right] \right\|_H + 2T \left\| p_1 \left[\tau, u_1^{(k)}(\tau) \right] \right\|_H \right]$$

и сходится к функции $v_k(t, x)$ по норме пространства $H(Q)$.

Доказательство. Согласно (4.4.5) и (3.4.6), непосредственным вычислением имеем неравенст

$$\begin{aligned} & \|v_k(t, x) - v_k^m(t, x)\|_H^2 = \\ & = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} \cdot \right. \right. \\ & \cdot \left. \left. (g_n(\tau) + z_n(1) p_2 \left[\tau, u_2^{(k)}(\tau) \right] - z_n(0) p_1 \left[\tau, u_1^{(k)}(\tau) \right]) d\tau \right] ds - \right. \\ & \left. - \lambda \int_0^t R_n^m(t, s, \lambda) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. (g_n(\tau) + z_n(1) p_2 \left[\tau, u_2^{(k)}(\tau) \right] - z_n(0) p_1 \left[\tau, u_1^{(k)}(\tau) \right]) d\tau \right] ds \right\}^2 dt \leq \\ & \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda \int_0^t (R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda)) \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} (g_n(\tau) + \right. \right. \\ & \left. \left. + z_n(1) p_2 \left[\tau, u_2^{(k)}(\tau) \right] - z_n(0) p_1 \left[\tau, u_1^{(k)}(\tau) \right]) d\tau \right] ds \right\}^2 dt \leq \\ & \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda^2 \int_0^t (R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda))^2 ds \left[e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} (g_n(\tau) + \right. \right. \\ & \left. \left. + z_n(1) p_2 \left[\tau, u_2^{(k)}(\tau) \right] - z_n(0) p_1 \left[\tau, u_1^{(k)}(\tau) \right]) d\tau \right]^2 ds \right\} dt \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda^2 T \left(\frac{K_0}{\lambda_n^2} \cdot \frac{1}{m!} \left(\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right)^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \frac{4}{2\lambda_n^2} \cdot \right. \\
&\cdot \left. \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + 2T \|p_2[\tau, u_2^{(k)}(\tau)]\|_H^2 + 2T \|p_1[\tau, u_1^{(k)}(\tau)]\|_H^2 \right] \right\} dt \leq \\
&\leq 2\lambda^2 T^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} \frac{1}{m!} \left[\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right]^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \cdot \\
&\cdot \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + 2T \|p_2[\tau, u_2^{(k)}(\tau)]\|_H^2 + 2T \|p_1[\tau, u_1^{(k)}(\tau)]\|_H^2 \right]
\end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 4.4.4. k, m, r – е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned}
\|v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x)\|_H &\leq \sqrt{8 \left(1 + \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right) \left\{ \frac{1}{2\lambda_1^2} \sum_{n=r+1}^{\infty} \psi_n^2 + \right.} \\
&\sqrt{\left. + \frac{T}{2\lambda_1^2} \sum_{n=r+1}^{\infty} \int_0^T g_n^2(\tau) d\tau + T \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T \left(p_2^2[\tau, u_2^{(k)}(\tau)] + p_1^2[\tau, u_1^{(k)}(\tau)] \right) d\tau \right\}} \quad (4.4.9)
\end{aligned}$$

и при $r \rightarrow \infty$ сходится к функции $v_k^m(t, x)$ по норме пространства $H(Q)$

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем соотношение

$$\begin{aligned}
\|v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x)\|_H^2 &= \int_0^T \sum_{n=r+1}^{\infty} \left\{ \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^t R_n^m(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) + \right. \\
&+ \int_0^t g_n(\tau) \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n^m(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau + \int_0^t \left(z_n(1) p_2[\tau, u_2^{(k)}(\tau)] - \right. \\
&\left. \left. - z_n(0) p_1[\tau, u_1^{(k)}(\tau)] \right) \left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n^m(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau \right\}^2 dt \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 8 \sum_{n=r+1}^{\infty} \left\{ \psi_n^2 \left(e^{-2\lambda_n^2 t} + \lambda^2 \int_0^T (R_n^m(t, s, \lambda))^2 ds \int_0^T e^{-2\lambda_n^2 s} ds \right) + \right. \\
&+ \int_0^T g_n^2(\tau) \left(e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda^2 \int_{\tau}^T (R_n^m(t, s, \lambda))^2 ds \int_{\tau}^T e^{-2\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau + \\
&+ \int_0^T \left(z_n^2(1) p_2^2[\tau, u_2^{(k)}(\tau)] + z_n^2(0) p_1^2[\tau, u_1^{(k)}(\tau)] \right) \cdot \\
&\cdot \left(e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda^2 \int_{\tau}^T (R_n^m(t, s, \lambda))^2 ds \int_{\tau}^T e^{-2\lambda_n^2(s-\tau)} ds \right) d\tau \Big\} dt \leq \\
&\leq 8 \sum_{n=r+1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right) \frac{1}{2\lambda_n^2} \psi_n^2 + \right. \\
&+ T \left(1 + \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right) \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_0^T g_n^2(\tau) d\tau + \\
&+ 2T \left(1 + \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right) \frac{1}{2\lambda_n^2} \int_0^T \left(p_2^2[\tau, u_2^{(k)}(\tau)] + p_1^2[\tau, u_1^{(k)}(\tau)] \right) d\tau \Big\} \leq \\
&\leq 8 \left(1 + \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \right) \left\{ \frac{1}{2\lambda_1^2} \sum_{n=r+1}^{\infty} \psi_n^2 + \right. \\
&+ \frac{T}{2\lambda_1^2} \sum_{n=r+1}^{\infty} \int_0^T g_n^2(\tau) d\tau + T \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T \left(p_2^2[\tau, u_2^{(k)}(\tau)] + p_1^2[\tau, u_1^{(k)}(\tau)] \right) d\tau \Big\},
\end{aligned}$$

которое справедливо при каждом фиксированном $k = 1, 2, 3, \dots$, так как остаточный член сходящегося ряда стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$.

Лемма 4.4.5. k, m, r – е приближение оптимального процесса при $k, m, r \rightarrow \infty$ сходится к функции $v^0(t, x)$ по норме пространства $H(Q)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned} & \|v^0(t, x) - v_k^{m,r}(t, x)\|_H^2 \leq \|v^0(t, x) - v_k(t, x) + v_k(t, x) - \\ & - v_k^m(t, x) + v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x)\|_H^2 \leq \|v^0(t, x) - v_k(t, x)\|_H^2 + \\ & + \|v_k(t, x) - v_k^m(t, x)\|_H^2 + \|v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x)\|_H^2 \xrightarrow{k, m, r \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

которое справедливо согласно леммам 4.4.2.-4.4.4.

Поскольку оптимальный процесс имеет приближения $v_k(t, x)$, $v_k^m(t, x)$ и $v_k^{m,r}(t, x)$, то будем различать три вида приближенного значений функционала (4.2.1) в следующем виде

$$\begin{aligned} J[u_1^{(k)}(t), u_2^{(k)}(t)] &= \\ &= \int_0^1 [v_k(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T ([u_1^{(k)}(t)]^2 + [u_2^{(k)}(t)]^2) dt, \\ J_m[u_1^{(k)}(t), u_2^{(k)}(t)] &= \\ &= \int_0^1 [v_k^m(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T ([u_1^{(k)}(t)]^2 + [u_2^{(k)}(t)]^2) dt, \\ J_m^r[u_1^{(k)}(t), u_2^{(k)}(t)] &= \\ &= \int_0^1 [v_k^{m,r}(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T ([u_1^{(k)}(t)]^2 + [u_2^{(k)}(t)]^2) dt. \end{aligned}$$

Лемма 4.4.6. k – е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} |J[u_1^0, u_2^0] - J[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}]| &\leq C_1 \|v^0(T, x) - v_k(T, x)\|_H + \\ &+ C_2 \|u_1^0(t) - u_1^{(k)}(t)\|_H + C_3 \|u_2^0(t) - u_2^{(k)}(t)\|_H, \quad (4.4.10) \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3 – положительные постоянные и сходится к точному значению функционала $J[u_1^0, u_2^0]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned}
& \left| J[u_1^0, u_2^0] - J[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] \right| \leq \int_0^1 \left\{ \left[v^0(T, x) - \xi(x) \right]^2 - \left[v_k(T, x) - \xi(x) \right]^2 \right\} dx + \\
& + \beta \int_0^T \left(\left[u_1^0(t) \right]^2 - \left[u_1^{(k)}(t) \right]^2 + \left[u_2^0(t) \right]^2 - \left[u_2^{(k)}(t) \right]^2 \right) dt \leq \\
& \leq \int_0^1 \left\{ \left[v^0(T, x) \right]^2 - 2\xi(x)v^0(T, x) + \xi^2(x) - \right. \\
& \left. - \left[v_k(T, x) \right]^2 + 2\xi(x)v_k(T, x) - \xi^2(x) \right\} dx + \\
& + \beta \left(\left\| u_1^0(t) + u_1^{(k)}(t) \right\|_H \left\| u_1^0(t) - u_1^{(k)}(t) \right\|_H + \right. \\
& \left. + \left\| u_2^0(t) + u_2^{(k)}(t) \right\|_H \left\| u_2^0(t) - u_2^{(k)}(t) \right\|_H \right) \leq \\
& \leq \int_0^1 \left\{ (v^0(T, x) + v_k(T, x))(v^0(T, x) - v_k(T, x)) - \right. \\
& \left. - 2\xi(x)(v^0(T, x) - v_k(T, x)) \right\} dx + \\
& + \beta \left(\left\| u_1^0(t) + u_1^{(k)}(t) \right\|_H \left\| u_1^0(t) - u_1^{(k)}(t) \right\|_H + \right. \\
& \left. + \left\| u_2^0(t) + u_2^{(k)}(t) \right\|_H \left\| u_2^0(t) - u_2^{(k)}(t) \right\|_H \right) \leq \\
& \leq \int_0^1 \left\{ (v^0(T, x) + v_k(T, x) - 2\xi(x))(v^0(T, x) - v_k(T, x)) \right\} dx + \\
& + \beta \left(\left\| u_1^0(t) + u_1^{(k)}(t) \right\|_H \left\| u_1^0(t) - u_1^{(k)}(t) \right\|_H + \right. \\
& \left. + \left\| u_2^0(t) + u_2^{(k)}(t) \right\|_H \left\| u_2^0(t) - u_2^{(k)}(t) \right\|_H \right) \leq \\
& \leq \left\| v^0(T, x) + v_k(T, x) - 2\xi(x) \right\|_H \left\| v^0(T, x) - v_k(T, x) \right\|_H +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta \left(\left\| u_1^0(t) + u_1^{(k)}(t) \right\|_H \left\| u_1^0(t) - u_1^{(k)}(t) \right\|_H + \right. \\
& \left. + \left\| u_2^0(t) + u_2^{(k)}(t) \right\|_H \left\| u_2^0(t) - u_2^{(k)}(t) \right\|_H \right) \leq \\
& \leq C_1 \left\| v^0(T, x) - v_k(T, x) \right\|_H + C_2 \left\| u_1^0(t) - u_1^{(k)}(t) \right\|_H + C_3 \left\| u_2^0(t) - u_2^{(k)}(t) \right\|_H,
\end{aligned}$$

которое справедливо согласно леммам 4.4.1. – 4.4.2..

Лемма 4.4.7. k, m – е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned}
& \left| J[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] - J_m[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] \right| \leq \\
& \leq \int_0^1 \left\{ \left[v_k(T, x) - \xi(x) \right]^2 - \left[v_k^m(T, x) - \xi(x) \right]^2 \right\} dx \leq \\
& \leq C_4 \left\| v_k(T, x) - v_k^m(T, x) \right\|_H, \tag{4.4.11}
\end{aligned}$$

где C_4 – положительная постоянная и сходится к значению функционала $J[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned}
& \left| J[u_k] - J_m[u_k] \right| \leq \int_0^1 \left\{ \left[v_k(T, x) - \xi(x) \right]^2 - \left[v_k^m(T, x) - \xi(x) \right]^2 \right\} dx \leq \\
& \leq \int_0^1 \left\{ \left[v_k(T, x) \right]^2 - 2\xi(x)v_k(T, x) + \xi^2(x) - \left[v_k^m(T, x) \right]^2 + \right. \\
& \left. + 2\xi(x)v_k^m(T, x) - \xi^2(x) \right\} dx \leq \int_0^1 \left\{ \left(v_k(T, x) + v_k^m(T, x) \right) \cdot \right. \\
& \left. \cdot \left(v_k(T, x) - v_k^m(T, x) \right) - 2\xi(x) \left(v_k(T, x) - v_k^m(T, x) \right) \right\} dx \leq \\
& \leq \int_0^1 \left\{ \left(v_k(T, x) + v_k^m(T, x) - 2\xi(x) \right) \left(v_k(T, x) - v_k^m(T, x) \right) \right\} dx \leq \\
& \leq \left\| v_k(T, x) + v_k^m(T, x) - 2\xi(x) \right\|_H \left\| v_k(T, x) - v_k^m(T, x) \right\|_H \leq \\
& \leq C_4 \left\| v_k(T, x) - v_k^m(T, x) \right\|_H,
\end{aligned}$$

которое справедливо согласно лемме 4.4.3.

Лемма 4.4.8. k, m, r – е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$\left| J_m[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] - J_m^r[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] \right| \leq C_5 \left\| v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x) \right\|_H, \quad (4.4.12)$$

где C_5 – положительная постоянная и сходится к значению функционала $J_m[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned} & \left| J_m[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] - J_m^r[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] \right| \leq \\ & \leq \int_0^1 \left\{ \left[v_k^m(T, x) - \xi(x) \right]^2 - \left[v_k^{m,r}(T, x) - \xi(x) \right]^2 \right\} dx \leq \\ & \leq \int_0^1 \left\{ \left[v_k^m(T, x) \right]^2 - 2\xi(x)v_k^m(T, x) + \xi^2(x) - \right. \\ & \left. - \left[v_k^{m,r}(T, x) \right]^2 + 2\xi(x)v_k^{m,r}(T, x) - \xi^2(x) \right\} dx \leq \\ & \leq \int_0^1 \left\{ \left(v_k^m(T, x) + v_k^{m,r}(T, x) \right) \left(v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x) \right) - \right. \\ & \left. - 2\xi(x) \left(v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x) \right) \right\} dx \leq \\ & \leq \int_0^1 \left\{ \left(v_k^m(T, x) + v_k^{m,r}(T, x) - 2\xi(x) \right) \left(v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x) \right) \right\} dx \leq \\ & \leq \left\| v_k^m(T, x) + v_k^{m,r}(T, x) - 2\xi(x) \right\|_H \left\| v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x) \right\|_H \leq \\ & \leq C_5 \left\| v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x) \right\|_H, \end{aligned}$$

которое справедливо согласно лемме 4.4.4.

Лемма 4.4.9. k, m, r – е приближенное значение функционала при $k, m, r \rightarrow \infty$ сходится к точному значению функционала $J[u_1^0, u_2^0]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned}
& \left| J[u_1^0, u_2^0] - J[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] \right| \leq \left| J[u_1^0, u_2^0] - J[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] \right| + \\
& + \left| J[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] - J_m[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] + J_m[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] - J_m^r[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] \right| \leq \\
& \leq \left| J[u_1^0, u_2^0] - J[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] \right| + \left| J[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] - J_m[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] \right| + \\
& + \left| J_m[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] - J_m^r[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}] \right| \xrightarrow{k, m, r \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

которое справедливо согласно леммам 4.4.6. – 4.4.8..

Как следует из лемм 4.4.1-4.4.9 доказано, что приближенное решение $\left((u_1^{(k)}(t), u_2^{(k)}(t)), v_k^{m,r}(t, x), J_m^r[u_1^{(k)}(t), u_2^{(k)}(t)] \right)$ задачи нелинейного оптимального граничного управления сходится к точному решению

$$\left((u_1^0(t), u_2^0(t)), v^0(t, x), J[u_1^0(t), u_2^0(t)] \right).$$

Вывод

В этой главе получено:

1. исследованы решения задач нелинейного оптимального граничного управления тепловых процессов, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями в случае двухстороннего управления;
2. оптимальное векторное управление находится как решение системы нелинейных интегральных уравнений и удовлетворяет дополнительным условиям;
3. разработан алгоритм построения решение задачи нелинейного оптимального граничного управления, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями в виде тройки;
4. разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями и установлено, что следует различать 3 вида приближенных решений;
5. доказана сходимость приближенного решения задачи нелинейной оптимизации к точному решению по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии исследована задача нелинейной оптимизации тепловых процессов в случаях нелинейных граничных управлений.

В введении приведены примеры краевых задач, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных и интегро-дифференциальными уравнениями, задач оптимизации с граничным управлением для тепловых процессов, сделан краткий обзор исследований, примыкающих к теме монографии, и изложено краткое содержание исследований.

В первой главе исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса в случае, когда управление нелинейно входит в граничное условие и минимизируется квадратичный функционал. Установлено, что оптимальное управление удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению и дополнительному условию в виде неравенства. Найдено достаточное условие однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации.

Во второй главе исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации в случае двухстороннего управления процессом распространения тепла по стержню, причем функции граничного управления нелинейно зависят от векторного управления. Установлено, что оптимальное векторное управление удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений и дополнительным условиям в виде системы неравенств. Разработан алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации и доказана его сходимости к точному решению по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

В третьей главе исследованы решения задач оптимального управления, когда тепловой процесс описывается вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями, граничное условие нелинейно содержит параметр управления. Оптимальное управление находится как решение нелинейного интегрального уравнения и удовлетворяет дополнительному условию, относительно функции источника с учетом минимизируемого

функционала. Найдены достаточные условия однозначной разрешимости задач нелинейного оптимального управления, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями. Исследована сходимость приближенного решения по оптимальному управлению, оптимальному процессу и функционалу, и указан алгоритм их построения. Приведенный численный пример подтверждает теоретические выводы.

В четвертой главе исследованы решения задач нелинейного оптимального граничного управления тепловых процессов, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями, в случае двухстороннего управления. Оптимальное векторное управление находится как решение системы нелинейных интегральных уравнений и удовлетворяет дополнительным условиям. Исследована сходимость приближенного решения, и указан алгоритм их построения по оптимальному управлению, оптимальному процессу и функционалу.

Полученные теоретические результаты могут быть использованы в приложениях и полезными при исследовании нелинейных задач теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных и интегро-дифференциальными уравнениями, и при разработке конструктивных методов решения нелинейных прикладных задач оптимизации, а также в развитии теории краевых задач и нелинейных интегральных уравнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Литература к главам 1 и 2.

1. Авдонин С.А., Иванов С.А. Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент. Киев: УМК ВО, 1989. 244 с.
2. Алексеев Г.В., Смышляев А.Б., Терешко Д.А. Разрешимость краевой задачи для стационарных уравнений теплопереноса при смешанных краевых условиях // Журнал вычислительной математики и математической физики.- 2007. № 1. С. 66-80.

3. Алиферов, В.В. О приближенном решении задачи с точечными и граничными управлениями. / В.В. Алиферов, Ы. Каимкулов. //Математические методы оптимизации систем с распределенными параметрами. – Фрунзе: Илим, 1975. С. 32-48.
4. Аргучинцев А. В. К поиску оптимальных граничных управлений в двумерных полулинейных гиперболических уравнениях // Модели и методы исследования операций. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. С. 50
5. Аргучинцев А. В. Оптимизация гиперболических систем с интегральными ограничениями на граничные управления // Изв. вузов. Математика. – 2004. - № 1. С. 10-17.
6. Аргучинцев А. В. Решение задачи оптимального управления начально-краевыми условиями гиперболической системы на основе точных формул приращения // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 12. С. 23-29.
7. Аргучинцев А. В., Крутикова О. А. Оптимизация полулинейных гиперболических систем с гладкими граничными управлениями // Изв. вузов. Математика. - 2001. №2. С. 3-12.
8. Аргучинцев А.В. Оптимальное управление начально-краевыми условиями гиперболических систем первого порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. С. 42-48.
9. Аргучинцев А.В. Оптимизация гиперболических систем с управляемыми начально-краевыми условиями в виде дифференциальных связей// Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2004. № 2. С. 287-296.
10. Асанова, Ж.К. Нелинейное точечное оптимальное управление процессом теплопередачи при минимизации кусочно-линейного функционала//Вестник. КГУ им. И.Арабаева. Сер. Естественные науки. –Бишкек, 2008. – Вып.11. –С.18-22.
11. Асанова, Ж.К. О разрешимости одной задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при точечных подвижных источниках. //Исследования по интегро – дифференциальным

- уравнениям. –Вып. 39. НАН Кыргызской Республики, Институт теоретической и прикладной математики.
12. Асанова, Ж.К. Точечное подвижное нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами при минимизации кусочно-линейного функционала. //Вестник. КГУ им. И.Арабаева. Сер. Естественные науки. – Бишкек, 2008. Вып.11. С.23-27.
 13. Бабат Г.И. Индукционный нагрев металлов и его промышленное применение. - 2-е изд. М.; Л.: Энергия, 1965. 552 с.
 14. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
 15. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
 16. Бутковский А.Г. Управление системами с распределенными параметрами (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1979. №11. С. 16-65.
 17. Васильев О. В. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем с распределенными параметрами // Прикладная математика. – Новосибирск, 1978. С. 109-138.
 18. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1988. 552 с.
 19. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. -512 с.
 20. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Госуд. изд-во техн.-теоретич. лит., 1957. 491 с.
 21. Дженалиев М.Т., Сматов К.С. Последовательные приближения в задачах оптимизации параболическими уравнениями // Проблемы автоматизации и управления. Бишкек: Илим, 1999. С. 102-108.
 22. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
 23. Егоров А.И. Оптимальное управление линейными системами. Киев: Выща школа, Головное изд-во, 1988. 278 с.
 24. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004. 504 с.

25. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Управление колебаниями связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами// Журнал вычислительной математики и математической физики.- 2005. № 10. С. 1766-1784.
26. Ильин В.А. Независимость оптимальных граничных управлений колебаниями струны от выбора точки согласования начальных и финальных условий//Доклады АН.-2008., Т420. №1. С18-...
27. Ильин В.А. Теоремы о единственности обобщенных решений четырех смешанных задач для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями//Доклады АН. -2008., Т420. №2. С162-...
28. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничного управления упругой силой на двух концах струны//Доклады АН.-2005., Т402. №2.-С163-169.
29. Квитко А.Н. Об одном методе решения граничной задачи для нелинейной управляемой системы // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2004. № 7. - С. 1241-1250.
30. Керимбеков А. Нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами //Наука и новые технологии. 2000. Бишкек. №2. С. 30-35.
31. Керимбеков А. О разрешимости задачи нелинейного оптимального управления процессом теплопередачи. //Тезисы докладов II-международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике». Бишкек, 2006. С. 72.
32. Керимбеков А. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации слабо нелинейных систем с распределенными параметрами. // Труды международной конференции «Программные системы: теория и приложения» / ИПС РАН г. Переславль – Залесский, октябрь 2006; под ред. С.М. Абрамова: В 2 т. – М.: Физматлит, 2006; Т.2. 408 с.
33. Керимбеков А. О разрешимости одной нелинейной задачи оптимизации тепловых процессов //Проблемы автоматизации и управления. Бишкек: Илим, 2000. С. 151-158.

34. Керимбеков А. Приближенное решение нелинейной задачи оптимизации тепловых процессов // Проблемы автоматизации и управления. Бишкек: Илим, 2001. С. 58-65.
35. Керимбеков А., Джээнбаева Г., Шаршенова И. О разрешимости нелинейной задачи оптимизации тепловых процессов при граничном управлении // Вестник КГНУ, серия 3. Естественно-технические науки. Бишкек, 2001. Вып. 7. С. 30-34.
36. Керимбеков А., Урывская Т.Ю. О разрешимости нелинейной задачи оптимального управления процессами, описываемыми полулинейными параболическими уравнениями // Вестник КРСУ. Бишкек. 2010. Т.10. №9. С.47-52.
37. Керимбеков А., Урывская Т.Ю. Оптимальное управление процессом теплопередачи, описываемое уравнениями с разрывными коэффициентами. // Исследования по интегрально-дифференциальным уравнениям. Выпуск 40. Бишкек: Илим, 2009. 302 с.
38. Керимбеков А., Урывская Т.Ю. Распределенное оптимальное управление процессом теплопередачи, описываемое уравнениями с разрывными коэффициентами. // Ежегодная конференция молодых ученых и студентов. Современные техника и технологии в научных исследованиях. Бишкек: МНИЦГП Научная станция РАН, 2010. 47 с.
39. Керимбеков А., Урывская Т.Ю. Слабо-обобщенное решение уравнения теплопередачи с разрывными коэффициентами. // Вестник КРСУ. Бишкек, 2010. Т.10. №5. С.140-142.
40. Керимбеков А.К., Красниченко Л.С. Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при минимизации кусочно-линейного функционала, в случае граничного управления. // Ежегодная конференция молодых ученых и студентов. Современные техника и технологии в научных исследованиях. Бишкек: МНИЦГП Научная станция РАН, 2011. 45 с.
41. Керимбеков А.К., Асанова Ж.К. Точечное подвижное нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами при минимизации кусочно-линейного

- функционала. // Международная юбилейная научная конференция, посвященная 15-летию образования КРСУ «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». Бишкек: КРСУ, 2008. С. 95-99.
42. Керимбеков А.К., Красниченко Л.С. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при граничном управлении // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике. Бишкек, 2011. С.76-79.
 43. Керимбеков А.К., Красниченко Л.С. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации // Вестник КРСУ. Бишкек: 2012. Т.12. №4. С.183-186.
 44. Керимбеков, А. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: Дисс... докт. физ.-мат. наук. Институт математики НАН КР. /А.Керимбеков –Бишкек, 2003. –224 с.
 45. Керимбеков, А. Асанова, Ж Нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами при точечных подвижных источниках. //Поиск. Научное приложение международного журнала «Высшая школа Казахстана» Министерства образования и науки Республики Казахстан. Сер. Естественных и технических наук. –Алмата, 2009. – Вып.№1. С.201– 205.
 46. Керимбеков, А. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации процессов теплопередачи при подвижных точечных источниках //Исследования по интегро – дифференциальным уравнениям. –Бишкек: Илим, 2008. –Вып. 39. С. 113 –117.
 47. Керимбеков, А., Асанов Ж.К. Точечное подвижное нелинейное оптимальное управление тепловыми процессами. // Труды ИВ и МГ СО РАН Материалы Третьей азиатской международной школы-семинара «Проблемы оптимизации сложных систем» сер. информатика. – Новосибирск, 2007. – Вып.7. –С. 244– 249.
 48. Красниченко Л.С. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при векторном граничном управлении // Вестник КРСУ. Бишкек: 2012. Т.12. №4. С.179-182.

49. Краснов М.В. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 303с.
50. Крылов Н.В. Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977. 400 с.
51. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.:Наука, 1973. 408 с.
52. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
53. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
54. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. Эволюция диссипативных структур. М.: Наука, 1987. 352 с.
55. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. 2-е изд., перераб. и доп. М: Наука, 1983. 424 с.
56. Плотников В.И. Энергетические неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР, серия мат. 1968. Т. 32. №4. С. 743-755.
57. Потапов М.М. Приближенное решение задач граничного управления и наблюдения для уравнения поперечных колебаний стержня // Журнал вычислительной математики и математической физики.- 2005. № 6. - С. 1015-1032.
58. Пузырев В.А. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами (обзор) // Зарубежная радиоэлектроника. 1975. №7. С. 38-57.
59. Садовничий В.А. Теория операторов. 2-е изд-е. М.: Изд-во МГУ, 1986. 368 с.
60. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 497 с.
61. Смышляев П.П., Лыкосов В.М., Осипков Л.П. Управление технологическими процессами. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989. 284 с.
62. Тихомиров В. В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. I //— 2002. – Т. 38, № 3. С.393-403.
63. Тихомиров В. В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. II // Дифференциальные уравнения.—

2002. – Т. 38, №4. – С. 529-537.
64. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
 65. Урывская Т.Ю. О разрешимости одной задачи оптимизации тепловых процессов при минимизации кусочно-линейного функционала // Вестник КPCУ. Бишкек: 2010. Т.10. №9. С.52-56.
 66. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. М.: Наука, 1971. 744 с.
 67. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 376 с.
 68. Kerimbekov A. On solvability of nonlinear optimization problem for heat processes // Generalized solitions in control problems. Proceedings of the International Symposium. Pereslavl-Zalessky, Russia, August 27-31, 2002. Abstract of talks. Research Center of Control Processes, Program Systems Institute, Russian Academy of Sciences, 2002. P. 117-120.
 69. Kerimbekov A., Asanova Zh. Dot Active Nonlinear Optimal Control Thermal Processes at Minimization Piecewise-Linear Functional. //Actual Problems of Control Theory, Topology and Operator Equations.-Aachen: Shaker Verlaq, 2009. –P. 133– 138.

Литература к главам 3 и 4.

1. Абдылдаева, Э.Ф. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления и его разрешимость [Текст] / Э.Ф. Абдылдаева // Вестн. Кырг.-Рос. Славян. ун-т им. Б.Н. Ельцина. – 2014. – Т.14, № 12. – С. 55-60.
2. Авдонин, С.А. Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент [Текст] / С.А. Авдонин, С.А. Иванов. – Киев: УМК ВО, 1989. – 244 с.
3. Алексеев, Б.В. Физическая газодинамика реагирующих сред [Текст] / Б.В. Алексеев, А.М. Гришин. – М.: Высш. шк., 1985. – 464 с.
4. Арман, Ж.Л. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций [Текст] / Ж.Л. Арман. – М.: Мир, 1977. – 142 с.

5. Алиферов, В.В. О приближенном решении задачи с точечными и граничными управлениями [Текст] / В.В. Алиферов, Ы. Каимкулов // Математические методы оптимизации систем с распределенными параметрами. – Фрунзе, 1975. – С. 32-48.
6. Аргучинцев, А.В. К поиску оптимальных граничных управлений в двумерных полулинейных гиперболических уравнениях [Текст] / А.В. Аргучинцев // Модели и методы исследования операций. – Новосибирск, 1988. – С. 50.
7. Аргучинцев, А.В. Оптимизация гиперболических систем с интегральными ограничениями на граничные управления [Текст] / А.В. Аргучинцев // Изв. вузов. Математика. – 2004. № 1. С. 10-17.
8. Аргучинцев, А.В. Решение задачи оптимального управления начально-краевыми условиями гиперболической системы на основе точных формул приращения [Текст] / А.В. Аргучинцев // Изв. вузов. Математика. – 2002. № 12. С. 10-17.
9. Аргучинцев, А.В. Оптимизация полулинейных гиперболических систем с гладкими граничными управлениями [Текст] / А.В. Аргучинцев, О.А. Крутикова // Изв. вузов. Математика. – 2001. № 2. С. 3-12.
10. Аргучинцев, А.В. Оптимальное управление начально-краевыми условиями гиперболических систем первого порядка [Текст] / А.В. Аргучинцев // Изв. РАН. Теория и системы упр. – 2004. – № 5. – С. 42-48.
11. Аргучинцев, А.В. Оптимизация гиперболических систем с управляемыми начально-краевыми условиями в виде дифференциальных связей [Текст] / А.В. Аргучинцев // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2004. – № 2. С. 287-296.
12. Асанова, Ж.К. Точечное подвижное нелинейное оптимальное управление процессом теплопередачи [Текст]: автореф. дис.... канд. физ-мат. наук: 01.01.02 / Ж.К. Асанова. – Ош, 2012. – 18 с.
13. Бабат, Г.И. Индукционный нагрев металлов и его промышленное применение [Текст] / Г.И. Бабат. – 2-е изд. – М.; Л.: Энергия, 1965. – 552 с.

14. Баатов, А.К. Приближенные решения задач нелинейной оптимизации колебательных процессов [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / А.К. Баатов. – Бишкек, 2014. – 26 с.
15. Будаг, Б.М. Кратные интегралы и ряды [Текст] / Б.М. Будаг, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1967. – 607 с.
16. Бутковский, А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами [Текст] / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965. – 474 с.
17. Бутковский, А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами [Текст] / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.
18. Бутковский, А.Г. Управление системами с распределенными параметрами [Текст]: обзор / А.Г. Бутковский // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 11. – С. 16-65.
19. Бутковский, А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами [Текст] / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1979. – 224 с.
20. Бутковский, А.Г. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами [Текст] / А.Г. Бутковский, Л.М. Пустыльников. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
21. Васильева, А. Б. Интегральные уравнения [Текст] / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 156 с.
22. Васильев, Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
23. Верлань, А.Ф. Математическое моделирование непрерывных динамических систем [Текст] / А.Ф. Верлань, С.С. Москалюк. – Киев: Наукова думка, 1988. – 288 с.
24. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
25. Владимиров, В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц [Текст] / В.С. Владимиров // Тр. мат. ин-та АН СССР (МИАН). – 1961. – Т. 61. – С. 3-158.
26. Вольтерра, В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

27. Volterra, V. Theory Of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations [Text] / V. Volterra. – New York: Published by Dover Publications, 1959. – 304 p.
28. Volterra, V. Sulle equazioni della elettrodinamica [Text] / V. Volterra // Rend. Accad. dei Lincei. – 1909. – № 18 (5). – P. 203-211.
29. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц [Текст] / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1957. – 491 с.
30. Гончаренко, В.М. Основы теории уравнений с частными производными [Текст] / В.М. Гончаренко. – Киев: Вища шк., 1985. – 311 с.
31. Егоров, А.И. О приближенном решении одной задачи оптимального управления [Текст] / А.И. Егоров, Р. Рафатов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1972. – Т. 12, № 4. – С. 943-956.
32. Егоров, А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами [Текст] / А.И. Егоров. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
33. Егоров, А.И. Оптимальное управление линейными системами [Текст] / А.И. Егоров. – Киев: Выща шк., 1988. – 278 с.
34. Егоров, А.И. Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии [Текст] / Егоров А. И. Р. Рафатов. –Фрунзе: Илим, 1990. – 336 с.
35. Егоров, А.И. Основы теории управления [Текст] / А.И. Егоров. – М.: Физматлит., 2004. – 504 с.
36. Evans, G.C. Sull equazione integro-differenziale di tipo parabolico [Text] / G.C. Evans // Rend. Accad. dei Lincei. – 1912. – № 21(5). – P. 25-31.
37. Ильин, В.А. Независимость оптимальных граничных управлений колебаниями струны от выбора точки согласования начальных и финальных условий [Текст] / В.А. Ильин // Докл. РАН. – 2008. – Т.420, № 1. – С. 18-23.
38. Ильин, В.А. Теоремы о единственности обобщенных решений четырех смешанных задач для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями [Текст] / В.А. Ильин // Докл. РАН. – 2008. – Т. 420, № 2. – С. 162-165.

39. Ильин, В.А. Оптимизация граничного управления упругой силой на двух концах струны [Текст] / В.А. Ильин // Докл. АН. – 2005. – Т. 402, № 2. – С. 163-169.
40. Канторович, Л.В. Функциональный анализ [Текст] / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
41. Керимбеков, А. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами [Текст]: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / А.Керимбеков. – Бишкек, 2003. – 224 с.
42. Керимбеков, А. О разрешимости задачи «слежения» при нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / А. Керимбеков // Материалы Кыргызской секции IX Междунар. симпоз. «Фундаментальные и прикладные проблемы науки». РАН, Москва, 11-13 сент. – М., 2014. – Т.7. – С. 90-99.
43. Керимбеков, А. О разрешимости задачи нелинейного оптимального управления тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А. Керимбеков // Докл. Нац. АН Кырг. Респ. – 2014. – № 1. – С. 22-27.
44. Kerimbekov, A. About the solvability of a nonlinear optimization of the processes described by integro-differential equations [Text] / A. Kerimbekov // ISAAC 9th congress. – Krakov, Poland, 2013. – P. 108-109.
45. Kerimbekov, A. About the one method of solving nonlinear Fredholm-integral equations [Text] / A. Kerimbekov // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June. – Bishkek, 2014. – P. 121.
46. Kerimbekov, A. Approximate solution of the optimal control of thermal processes described by a Fredholm integro-differential equation [Text] / A. Kerimbekov // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June. – Bishkek, 2014. – P. 278.
47. Kerimbekov, A. On the solvability of the problem of the boundary control of thermal processes, described by the Fredholm integro-differential equation [Text] / A. Kerimbekov //

- Abstracts of International Congress of Mathematicians. South Korea, Seoul, 13-21 August. – 2014. – P. 570.
48. Керимбеков, А. Обобщенное решение краевой задачи управляемого колебательного процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А. Керимбеков, Э.Ф. Абдылдаева // Вестн. Кырг.-Рос. Славян. ун-т. – 2014. – Т. 14, № 12. – С. 61-66.
 49. Kerimbekov, A. The solution of the boundary control problem for the process of oscillation described by the Fredholm integro-differential equations [Text] / A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June. – Bishkek, 2014. – P. 275.
 50. Kerimbekov, A. On the solvability of the problem of the distributed optimal control of oscillation processes described by the Fredholm integro-differential equations [Text] / A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva // Abstract book of second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September. – Shymkent, 2014. – P. 116.
 51. Kerimbekov, A. On the problem of minimization of the piecewise linear functional in distributed optimal control of oscillation processes [Text] / A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June. – Bishkek, 2014. – P. 218-224.
 52. On the solvability of a nonlinear optimization problem for thermal processes described by Fredholm integro-differential equations with external and boundary controls [Text] / A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva, R. Nametkulova, A. Kadirimbetova // Applied Mathematics & Information Sciences, An International Journal. – 2016. – Vol. 10, No. 1. – P. 215–223.
 53. Керимбеков, А. О разрешимости нелинейной задачи оптимизации тепловых процессов при граничном управлении [Текст] / А. Керимбеков, Г. Джээнбаева, И. Шаршенова // Вестн. Кырг. гос. нац. ун-т. Сер. 3: Естеств.-техн. науки. – 2001, Вып. 7. – С. 30-34.
 54. Керимбеков, А. О разрешимости задачи нелинейного граничного управления тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением

- [Текст] / А. Керимбеков, А.К. Кадирибетова // Вестн. ОшГУ. – 2013. – № 1. – С. 173-177.
55. Керимбеков, А. Решение одной задачи теории нелинейных интегральных уравнений [Текст] / А. Керимбеков, А.К. Кадирибетова // Вестн. ОшГУ. – 2013. – № 1. – С. 168-173.
56. Керимбеков, А. Обобщенное решение краевой задачи управляемого теплового процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А. Керимбеков, А.К. Кадирибетова, Р.Ж. Наметкулова // Механика и моделирование процессов. – 2013. – № 2. – С. 80-86.
57. Керимбеков, А. Условия оптимальности в задаче управления тепловыми процессами с интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А. Керимбеков, А. К. Кадирибетова, Р. Ж. Наметкулова // Изв. Иркут. гос. ун-т (ИГУ). Сер.: Математика. – 2016. – Т. 15. – С. 50-61.
58. Kerimbekov, A. Приближенное решение задачи распределенного и граничного управления тепловым процессом [Text] / А. Керимбеков, А. К. Кадирибетова, Р. Ж. Наметкулова // Изв. Иркут. гос. ун-т (ИГУ). Сер. Математика. – 2016. – Т. 16. – С. 71-88.
59. Kerimbekov, A. On the solvability of the problem of the optimal boundary control of thermal processes described by the Fredholm integro-differential equations [Text] / А. Kerimbekov, А. Kadirimbetova // Abstract book of second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September. – Shymkent, 2014. – P. 119.
60. Керимбеков, А. Решение задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемого вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / А. Керимбеков, Б.Ж. Кулбаева // Вестн. Кырг.-Рос. Славян. ун-т. – 2013. – Т. 13, № 7. – С. 14-19.
61. Kerimbekov, A. On the solvability of the problem of the optimal control of thermal processes described by the Volterra integro-differential equations [Текст] / А. Kerimbekov, В. Kulbaeva // Abstract book of second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September. – Shymkent, 2014. – P. 118.

62. Керимбеков, А. Решение задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемого интегро-дифференциальным уравнением Фредгольма [Текст] / А.К. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова // Вестн. Кырг.- Рос. Славян. ун-т. – 2014. – Т. 14, № 1. – С 166-172.
63. Kerimbekov, A. On the solvability of the problem of the optimal control of thermal processes described by the Fredholm integro-differential equations [Text] / A. Kerimbekov, R. Nametkulova // Abstract book of second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September. – Shymkent, 2014. – P. 117.
64. Красниченко, Л.С. Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при граничном управлении [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Л.С. Красниченко. – Бишкек, 2012. – 18 с.
65. Краснов, М. В. Интегральные уравнения [Текст] / М.В. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 303 с.
66. Краснов, М. В. Интегральные уравнения [Текст] / М.В. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1968. – 192 с.
67. Крылов, Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа [Текст] / Н. В. Крылов. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
68. Кульбаева, Б.Ж. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемого вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / Б.Ж. Кулбаева // Вестн. Кырг.- Рос. Славян. ун-т. – 2013. – Т. 13, № 7. – С. 20-23.
69. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики [Текст] / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
70. Лионс, Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными [Текст] / Ж.Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
71. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа [Текст] / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
72. Марчук, Г.И. Численные методы расчета ядерных реакторов [Текст] / Марчук Г.И. – М.: Атомиздат, 1958. – 324 с.

73. Маслов, В.П. Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса. Эволюция диссипативных структур [Текст] / В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
74. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных [Текст] / В.П. Михайлов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
75. Наметкулова, Р.Ж. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации теплового процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / Р.Ж. Наметкулова // Вестн. Кырг.-Рос. Славян. ун-т. – 2013. – Т. 13, № 7. – С. 23-27.
76. Плотников, В.И. Энергетические неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций [Текст] / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – Т. 32, № 4. – С. 743– 755.
77. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1983. – 392 с.
78. Потапов, М.М. Приближенное решение задач граничного управления и наблюдения для уравнения поперечных колебаний стержня [Текст] / М.М. Потапов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2005. – № 6. – С. 1015-1032.
79. Пузырев, В.А. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами [Текст]: обзор / В.А. Пузырев // Зарубежная радиоэлектроника. – 1975. – № 7. – С. 38-57.
80. Рафатов, Р.Р. Решение интегро-дифференциальной краевой задачи Риккати в проблеме оптимизации процесса переноса частиц [Текст] / Р.Р. Рафатов // Проблемы автоматизации и упр. – 1999. – С. 75-84.
81. Садовничий, В.А. Теория операторов [Текст] / В.А. Садовничий. – 2-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 368 с.
82. Сейдакмат кызы, Э. Обобщенное решение краевой задачи управляемого теплового процесса, описываемого вольтеррово интегро-дифференциальным уравнением [Текст] / Э. Сейдакмат кызы, А. Керимбеков, Б.Ж. Кулбаева // Вестн. ОшГУ. – 2013. – № 1. – С. 163-168.

83. Сейдакмат кызы, Э. Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / Э. Сейдакмат кызы, А. Керимбеков, Б.Ж. Кулбаева // Тезисы II Междунар. конф. «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». – Бишкек, 2013. – С. 49.
84. Сейдакмат кызы, Э. Условия оптимальности в задаче граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / Э. Сейдакмат кызы, А. Керимбеков // Материалы II Междунар. конф. «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». – Бишкек, 2013. – № 1. – С. 61-66.
85. Сейдакмат кызы, Э. Решение задачи граничного векторного управления тепловыми процессам, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / Э. Сейдакмат кызы, А. Керимбеков // Вестн. Кырг.-Рос. Славян. ун-т. – 2014. – Т.14, № 12. – С. 67-73.
86. Сейдакмат кызы, Э. О разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / Э. Сейдакмат кызы, А. Керимбеков // Вестн. Актюбин. регион. гос. ун-та им. К. Жубанова. – 2014. – № 4(38). – С. 13-21.
87. Seidakmat kyzy, E. Boundary control of thermal processes described by Volterra integro-differential equations [Text] / A. Kerimbekov, E. Seidakmat kyzy // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June. – Bishkek, 2014. – P. 277.
88. Seidakmat kyzy, E. On the solvability of the problem of the optimal boundary control of thermal processes described by the Volterra integro-differential equations [Text] / A. Kerimbekov, E. Seidakmat kyzy // Abstract book of second ICAAM. Kazakstan, Shymkent, 11-13 September. – Shymkent, 2014. – P. 115.
89. Seidakmat kyzy, E. Approximate solution of the boundary control problem of thermal processes described by Volterra integro-

- differential equations [Text] / A. Kerimbekov, E. Seidakmat kyzy // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June. – Bishkek, 2014. – P. 213-218.
90. Сейдакмат кызы, Э. Условие оптимальности в задаче граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / Э. Сейдакмат кызы, А. Керимбеков // Материалы Междунар. науч.-практ. конф. Информационные технологии: Инновации в науке и образовании. –Актобе, 2015. – С. 193-197.
 91. Seidakmat kyzy, E. Vector control of thermal processes described by Volterra integro-differential equations [Text] / A. Kerimbekov, E. Seidakmat kyzy // Abstracts of the Issyk-Kul International Mathematical Forum (Kyrgyzstan, Bozteri, June 24-27, 2015). – Bishkek, 2015. – P. 63.
 92. Сейдакмат кызы, Э. О разрешимости задачи граничного векторного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / Э. Сейдакмат кызы, А. Керимбеков // Вестн. Кырг.-Рос. Славян. ун-т. – 2015. – Т. 15, № 9. – С. 28-32.
 93. Seidakmat kyzy, E. The solution of nonlinear optimization problem for thermal processes with vector control [Text] / E. Seidakmat kyzy, A. Kerimbekov // The abstract book of the International Conference on Advancements in Mathematical Sciences (Antalya, Turkey, November 5-7, 2015). – Antalya, 2015. – 199 p.
 94. Сейдакмат кызы, Э. Вывод уравнения векторного оптимального управления в задаче нелинейной оптимизации тепловых процессов [Текст] / Э. Сейдакмат кызы, А. Керимбеков // Докл. АН Респ. Таджикистан. – 2015. – Т.58. – С. 570-576.
 95. Сейдакмат кызы, Э. Решение задачи граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / Э. Сейдакмат кызы // Материалы II Междунар. конф.

- Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений. – Бишкек, 2013. – № 1. – С. 76-81.
96. Сейдакмат кызы, Э. Вывод системы нелинейных интегральных уравнений в задаче граничного векторного управления тепловыми процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / Э. Сейдакмат кызы // Вестн. Кырг. гос. ун-т им. И. Арабаева. – 2014. – № 3. – С. 292-297.
 97. Сейдакмат кызы, Э. Приближенное решение задачи граничного векторного управления тепловыми процессам, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / Э. Сейдакмат кызы // Вестн. Кырг.-Рос. Славян. ун-т. – 2014. – Т.14, № 12. –С. 80-86.
 98. Сейдакмат кызы, Э. Приближенное решение задачи граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / Э. Сейдакмат кызы // Вестн. Кырг.-Рос. Славян. ун-т. – 2015. – Т.15, № 9. – С. 33-37.
 99. Сейдакмат кызы, Э. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / Э. Сейдакмат кызы // Изв. АН Респ. Таджикистан. – 2015. – № 3 (160). – С. 31-38.
 100. Сиразетдинов, Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами [Текст] / Т.К. Сиразетдинов. – М.: Наука, 1977. – 497 с.
 101. Смышляев, П.П. Управление технологическими процессами [Текст] / П.П. Смышляев, В.М. Лыкосов, Л.П. Осипков. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989. – 284 с.
 102. Тихомиров, В. В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении I [Текст] / В.В. Тихомиров // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 393-403.
 103. Тихомиров, В. В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении II [Текст] / В.В. Тихомиров // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 4. – С. 529-537.

104. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
105. Урывская, Т.Ю. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Т.Ю. Урывская. – Бишкек, 2010. – 18 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А.1

Расчет примера 1

1. Функция управления

$$p[t, u(t)] = \ln \sqrt{u^2(t) + 1} = \frac{1}{2} \ln(u^2(t) + 1) \quad (1)$$

удовлетворяет условию

$$p_u \left(\frac{u(t)}{p_u} \right)_u = \frac{u(t)}{u^2(t) + 1} \cdot 2u = 2 \frac{u^2(t)}{u^2(t) + 1} > 0, \quad \forall u(t). \quad (2)$$

2. Проверим условие

$$\gamma = M_1 p_0 \varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < 1 \quad (3)$$

2.1. Вычислим p_0

$$\int_0^T |p[t, u(t)] - p[t, \bar{u}(t)]|^2 dt \leq \int_0^T |p_u[t, u(t)]|^2 |u(t) - \bar{u}(t)|^2 dt$$

$$\|p[t, u(t)] - p[t, \bar{u}(t)]\|_H^2 \leq p_0^2 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H^2,$$

$$\|p[t, u(t)] - p[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq p_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H.$$

$$p_0 = \max_{\substack{u(t) \\ 0 \leq t \leq T}} |p_u[t, u(t)]| = 0,5$$

2.2. Вычислим $\varphi_0(\beta)$ согласно (1.5.10)

$$\beta u(t) p_u^{-1}[t, u(t)] = \beta (u^2(t) + 1) = \theta(t). \quad (4)$$

следовательно $u(t) = \pm \sqrt{\frac{\theta - \beta}{\beta}} = \varphi[t, \theta(t), \beta], \quad \theta(t) > \beta,$

$\theta(t) \leq 2\beta.$

$$\varphi_0(\beta) = \max_{\substack{\theta(t) \\ 0 \leq t \leq T}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{\beta} \sqrt{\theta(t) - \beta}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\beta - \beta}} = \frac{1}{2\beta}$$

Учитывая оценку

$$\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-t)} z_n^2(1) dt \leq \frac{1}{\lambda_n^2} (1 - e^{-2\lambda_n^2 T}) = \frac{M_1}{\lambda_n^2} \Rightarrow M_1 = 1 - e^{-2\lambda_n^2 T} \leq 1, \quad \forall n \in N,$$

окончательно получим

$$\gamma = M_1 p_0 \varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{1,5^2} + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{\beta} \cdot 0,1527766$$

< 1

следовательно $\beta > 0,1527766$.

3. На основе формул, приведенных в разделе 1.4, рассмотрим вопросы сходимости приближенного решения задачи оптимизации:

3.1. Приближенное решение нелинейного интегрального уравнения удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{\theta}(t) - \theta_k(t)\|_H \leq \frac{\gamma^k}{1 - \gamma} \|G[\theta_0(t)] + h(t) - \theta_0(t)\|_H.$$

$$G[\theta_0(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) p[\tau, \varphi(\tau, \theta(\tau), \beta)] d\tau. \quad (5)$$

Так как

$$p[t, \varphi[t, \theta(t), \beta]] = \frac{1}{2} \ln(u^2(t) + 1) = \frac{1}{2} \ln \frac{\theta(t)}{\beta}, \quad \theta(t) > \beta \quad (6)$$

следовательно

$$\begin{aligned} G[\theta_0(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) \frac{1}{2} \ln \frac{\theta_0(\tau)}{\beta} d\tau = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(1) \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(1) \frac{1}{2} \ln \frac{\theta_0(\tau)}{\beta} d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(T-t)} \sqrt{2} \cos \lambda_n \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} \sqrt{2} \cos \lambda_n \ln \frac{\theta_0(\tau)}{\beta} d\tau \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(T-t)} \cos^2 \lambda_n \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} \ln \frac{\theta_0(\tau)}{\beta} d\tau \leq \\ &\leq \ln \frac{\beta + 1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(T-t)} \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} d\tau = \ln \frac{\beta + 1}{\beta} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right), \end{aligned}$$

с учетом предельных значений

$$\int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} = \frac{1}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2(T-t)} \Big|_0^T \leq \frac{M_1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{\lambda_n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2 \pi^2} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}.$$

Пусть

$$\theta_0(t) = h(t) \quad (7)$$

$$\|\tilde{\theta}(t) - \theta_k(t)\|_H \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[\theta_0(t)]\|_H.$$

Рассчитаем $\|G_0[\theta_0(t)]\|_H^2$, рассматривая (1.3.7) с учетом (1.3.2) и (1.3.1) получим

$$G_0[\theta_0(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, 1) \int_0^T G_n(\tau, 1) \frac{1}{2} \ln \frac{\theta_0(\tau)}{\beta} d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(1) \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(1) \frac{1}{2} \ln \frac{\theta_0(\tau)}{\beta} d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(T-t)} \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} \frac{1}{2} \ln \frac{h(\tau)}{\beta} d\tau \quad (8)$$

Рассмотрим функцию $h(\tau)$

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n - e^{-\lambda_n^2 T} \psi_n - \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} f_n(t) dt. \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - e^{-\lambda_n^2 T} \psi_n) e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(1) \leq \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - e^{-\lambda_n^2 T} \psi_n) \leq$$

$$\leq \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|\xi_n| - |\psi_n|)$$

$$\leq \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|\xi_n| - |\psi_n|) \leq \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{\lambda_n^2} + \xi_0 \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n^2} \right) =$$

$$= 2(1 + \xi_0) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \quad (9)$$

где

$$\psi_n = \langle z_n(x), \psi(x) \rangle = \int_0^1 z_n(x) \psi(x) dx = \psi_n \int_0^1 \psi(x) C_n \cos \lambda_n x dx.$$

Дважды интегрируя по частям принимая во внимание $\psi(x) = (x - 1)$ и коэффициент нормирования $C_n = \sqrt{2}$ получим

$$\psi_n = \sqrt{2} \frac{1}{\lambda_n^2} (\cos \lambda_n - 1) \Rightarrow |\psi_n| \leq \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n^2}.$$

Аналогично рассчитывается $|\xi_n| \leq \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n^2} \xi_0$.

Подставив (1.3.5) в (1.1.3), придем к следующему результату

$$\begin{aligned} G_0[\theta_0(t)] &\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(T-t)} \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} \ln \frac{2}{\beta} (1 + \xi_0) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) dt = \\ &= \ln \frac{2}{\beta} (1 + \xi_0) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(T-t)} \frac{1}{\lambda_n^2} (1 - e^{-\lambda_n^2 T}) = \\ &= \ln \frac{2}{\beta} (1 + \xi_0) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \ln \frac{2}{\beta} (1 + \xi_0) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \|G_0[\theta_0(t)]\|_H &\leq \left(\int_0^T |G_0[\theta_0(t)]|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{T} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \ln \left[\frac{2}{\beta} (1 + \xi_0) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]. \end{aligned}$$

3.2. Найдем оценку между точным решением нелинейного интегрального уравнения и приближенным

$$|I[u(t)] - I[u_k(t)]| \leq C \|u^0(t) - u_k(t)\|.$$

$$C = \left\{ (2\|V(T, x)\|_H + 2\|\xi(x)\|_H) \left[TM_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{1/2} P_0 + 2\beta \|u(t)\|_H \right\}$$

Рассмотрим каждую из норм отдельно

3.2.1.

$$\begin{aligned} \|V(T, x)\|_H^2 &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n(1) p[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right]^2 dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n^2 t} \psi_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} z_n^2(1) d\tau \cdot \int_0^T p^2[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right) dt \leq \\ &\leq 2T \left[\|\psi(x)\|_H^2 + 2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \cdot \int_0^T p^2[t, u(t)] dt \right] = \\ &= 2T \left[\|\psi(x)\|_H^2 + 2 \left(\frac{1}{1,5^2} + \frac{1}{6} \right) \cdot \int_0^T \frac{1}{4} \ln^2(u^2(t) + 1) dt \right] \end{aligned}$$

$$\|V(T, x)\|_H = 0.979938148.$$

С учетом вычислений

$$\|\psi(x)\|_H^2 = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\|\xi(x)\|_H^2 = \int_0^1 \xi_0^2 (x-1)^2 dx = \xi_0^2 \frac{1}{3}, \quad \|\xi(x)\|_H = \xi_0 \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\|u(t)\|_H^2 = \int_0^T |u(t)|^2 dt \leq T = 1$$

Приложение А.2

Листинг кода Matlab для расчета примера №1.

```
clc
clear

%% рассчитаем числа lambda
figure
hold on
ezplot('tan(x)-y',[0,15],[-0,16]);
ezplot('(21.15)/x-y',[0,15],[-0,16]);
grid on
title(' \lambda tg(\lambda)=\alpha, \alpha=21.15 ')
legend('tg(\lambda)', '\alpha/\lambda')
%axis equal
[w,f]=fsolve(@f1,[1.5,14]);
l(1)=w(1);y(1)=w(2);
[w,f]=fsolve(@f1,[4,1]);
l(2)=w(1);y(2)=w(2);
[w,f]=fsolve(@f1,[6,0]);
l(3)=w(1);y(3)=w(2);
[w,f]=fsolve(@f1,[9,0]);
l(4)=w(1);y(4)=w(2);
[w,f]=fsolve(@f1,[12,0]);
l(5)=w(1);y(5)=w(2);
lambda=l()

%% зададим варьируемые коэффициенты
beta=[0.2:0.1:0.7];
xi0=3
%xi0=[2:0.5:4.5];
M1=1; % согласно аналитической оценке
n=6;
k=10;
T=1 %величина временного интервала
```

```

%%% построим функцию u(t)
figure
subplot(2,1,1)
u=[-1:0.001:1];
p_ot_u=log(sqrt(u.^2+1));

plot (u,p_ot_u)
title('Функция управления  $p(u)=0.5\ln(u^2+1)$ ')
xlabel( 'u(t)')
ylabel( 'p[t,u(t)]')
%%-----

%%% вычислим  $p0=\max|p'(u)|$ 
subplot(2,1,2)
u=[-1:0.001:1];
p=abs(u)./(u.^2+1);
p0=max(abs(u)./(u.^2+1));
plot (u,p);
title('p0=max|p'(u)|')
xlabel( 'u(t)')
ylabel( 'p[t,u(t)]')
p0

%%-----
%%% рассчитаем коэффициент сжатия gamma

phi0_ot_b=1./(2.*betta())
d=1/l(1)^2+1/6;
gamma=M1*d*p0.*phi0_ot_b();% рассчитаем гамму
Gamma=gamma()

%%% Приближенное решение нелинейного интегрального
уравнения teta_ot_t

figure

for i=1:n;

```

```

G0_ot_teta0(i)=d.*log((2./beta(i)).*(1+xi0)*d);
end;
G0_ot_teta0=[G0_ot_teta0]'

for j=1:k;
    for i=1:n;
        ggamma(j,i)=gamma(i).^j./(1-gamma(i));
    end;
end;
ggamma

for j=1:k;
    for i=1:n;
        teta_ot_t(j,i)=ggamma(j,i).*(G0_ot_teta0(i));
    end;
end;
teta_ot_t

subplot(2,2,1)
[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,teta_ot_t) %Рисуем
title('приближенное решение интегрального уравнения')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'z')

%% k-е приближение оптимального управления u_ot_t

for j=1:k;
    for i=1:n;
        u_ot_t(j,i)=(teta_ot_t(j,i).*phi0_ot_b(i));
    end;
end;
u_ot_t

subplot(2,2,2)

```

```

[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,u_ot_t) %Рисуем
title('k-е приближение оптимального управления ')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'z')

%% k-е приближение оптимального процесса V_ot_t

for j=1:k;
    for i=1:n;
        V_ot_t(j,i)=(u_ot_t(j,i).*sqrt(M1*d*T)*p0);
    end;
end;
V_ot_t

subplot(2,2,3)
[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,V_ot_t) %Рисуем
title('k-е приближение оптимального процесса ')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'z')

%% Приближенное значение функционала I_ot_u

subplot(2,2,4)

f=(log(2))^2;
syms x y
%norma_pci_kv=(int((x-1)^2,0,1))
norma_pci_kv=1/3;
norma_V_kv=2*T*(norma_pci_kv+d*0.5*f); % норма
квadrата V(t,x)
norma_V=sqrt(norma_V_kv); % норма V(t,x)

```

```

norma_V

%norma_xi_kv=(int(xi0^2*(y-1)^2,0,1)); % норма квадрата
xi от x
norma_xi_kv=xi0^2*1/3;
norma_xi=sqrt(norma_xi_kv); %норма xi от x
norma_xi

norma_u_ot_t=1; %норма u(t)

for i=1:n;

C=2*(norma_V+norma_xi)*sqrt(d*T)*p0+beta(i)*norma_u_ot_t;
end;
C

for j=1:k;
for i=1:n;
I_ot_u(j,i)=(V_ot_t(j,i).*C);
end;
end;
I_ot_u

[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,I_ot_u) %Рисуем
title('Приближенное значение функционала [I[u(t)]-
I[u_k(t)]')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'z')
colormap hot; %Задаем палитру:

figure

subplot(2,2,1)

```

```

    plot(beta, teta_ot_t(2,:), 'r', beta, u_ot_t(2,:), 'g',
beta, V_ot_t(2,:), 'b', beta, I_ot_u(2,:), 'm')
    legend('\theta-\theta_k', '|u(t)-u_k(t)|', '|V(t)-V_k(t)|',
'I[u(t)]-I[u_k(t)]')
    title('Зависимость приближений от итерации (k=2)')
    xlabel( '\beta')
    ylabel( 'k=2 ')

    subplot(2,2,2)
    plot(beta, teta_ot_t(4,:), 'r', beta, u_ot_t(4,:), 'g',
beta, V_ot_t(4,:), 'b', beta, I_ot_u(4,:), 'm')
    legend('\theta-\theta_k', '|u(t)-u_k(t)|', '|V(t)-V_k(t)|',
'I[u(t)]-I[u_k(t)]')
    title('Зависимость приближений от итерации (k=4)')
    xlabel( '\beta')
    ylabel( 'k=4 ')

    subplot(2,2,3)
    plot(beta, teta_ot_t(5,:), 'r', beta, u_ot_t(5,:), 'g',
beta, V_ot_t(5,:), 'b', beta, I_ot_u(5,:), 'm')
    legend('\theta-\theta_k', '|u(t)-u_k(t)|', '|V(t)-V_k(t)|',
'I[u(t)]-I[u_k(t)]')
    title('Зависимость приближений от итерации (k=5)')
    xlabel( '\beta')
    ylabel( 'k=5 ')

    subplot(2,2,4)
    plot(beta, teta_ot_t(8,:), 'r', beta, u_ot_t(8,:), 'g', beta,
V_ot_t(8,:), 'b', beta, I_ot_u(8,:), 'm')
    legend('\theta-\theta_k', '|u(t)-u_k(t)|', '|V(t)-V_k(t)|',
'I[u(t)]-I[u_k(t)]')
    title('Зависимость приближений от итерации (k=8)')
    xlabel( '\beta')
    ylabel( 'k=8 ')

```

Приложение В

Листинг кода Matlab для расчета примера 2.

```
clc
clear

%% рассчитаем числа lambda
figure
hold on
ezplot('tan(x)-y',[0,15],[-0,16]);
ezplot('(21.15)/x-y',[0,15],[-0,16]);
grid on
title(' \lambda tg(\lambda)=\alpha, \alpha=21.15 ')
legend('tg(\lambda)', '\alpha/\lambda')
[w,f]=fsolve(@f1,[1.5,14]);
l(1)=w(1);y(1)=w(2);
[w,f]=fsolve(@f1,[4,1]);
l(2)=w(1);y(2)=w(2);
[w,f]=fsolve(@f1,[6,0]);
l(3)=w(1);y(3)=w(2);
[w,f]=fsolve(@f1,[9,0]);
l(4)=w(1);y(4)=w(2);
[w,f]=fsolve(@f1,[12,0]);
l(5)=w(1);y(5)=w(2);
lambda=l()

%% зададим варьируемые коэффициенты
beta=[0.3:0.1:0.8];

xi0=3
M1=1; % согласно аналитической оценке
n=6;
k=10;
T=1 % величина временного интервала

%% построим функцию u1(t)
```

```

figure
subplot(2,2,1)
u1=[2:0.001:5];
p_ot_u1=0.5*sqrt(u1.^2-1);
plot (u1,p_ot_u1)
title('Функция управления  $p(u_1)=\sqrt{u_1^2-1}$ ')
xlabel( 'u_{1}(t)')
ylabel( 'p[t,u_{1}(t)]')

%%-----
%% построим функцию u2(t)

subplot(2,2,2)
u2=[-1:0.001:1];
p_ot_u2=log(sqrt(u2.^2+1));
plot (u2,p_ot_u2)
title('Функция управления  $p(u_2)=0.5\ln(u_2^2+1)$ ')
xlabel( 'u_{2}(t)')
ylabel( 'p[t,u_{2}(t)]')
%% вычислим  $p_{10}=\max|p'(u)|$ 
subplot(2,2,3)
u1=[2:0.001:5];
p1=abs(0.5.*u1)./sqrt(u1.^2-1);
p01=max(abs(0.5.*u1)./sqrt(u1.^2-1));
plot (u1,p1);
title('p0_{1}=\max|p'(u_1)|')
xlabel( 'u_{1}(t)')
ylabel( 'p[t,u_{1}(t)]')
p01

%%-----
%% вычислим  $p_{20}=\max|p'(u2)|$ 
subplot(2,2,4)
u2=[-1:0.001:1];
p2=abs(u2)./(u2.^2+1);
p02=max(abs(u2)./(u2.^2+1));
plot (u2,p2);

```

```

title('p0_{2}=max|p|(u_{2})|')
xlabel('u_{2}(t)')
ylabel('p[t,u_{2}(t)]')
p02
%% вычислим p0
p0=max(p01,p02)

%% рассчитаем коэффициент сжатия gamma

phi0_ot_b1=sqrt(6)./(beta().*2.*sqrt(7));
phi0_ot_b2=1./(2.*beta());
phi0_ot_b=max(phi0_ot_b1,phi0_ot_b2)

d=1/(l(1)^2)+1/6;
gamma=M1*d*p0.*phi0_ot_b;% рассчитаем гамму
Gamma=gamma()

%% Приближенное решение нелинейного интегрального
уравнения teta_ot_t
figure
%для p_ot_u
for i=1:n;
norma_p1=(T./(4.*beta().^2))*(1+xi0)^2*d^2;
norma_p2=1/4*(log(2*(1+xi0)*d)./beta().)^2;
G0_ot_teta0=(M1*d)*sqrt(norma_p1+norma_p2);
end;
G0_ot_teta0=[G0_ot_teta0]'

for j=1:k;
    for i=1:n;
        ggamma(j,i)=gamma(i).^j./(1-gamma(i));
    end;
end;
ggamma

for j=1:k;

```

```

    for i=1:n;
        teta_ot_t(j,i)=ggamma(j,i).*(G0_ot_teta0(i));
    end;
end;
teta_ot_t

%subplot(4,1,1)
[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,teta_ot_t) %Рисуем
title('приближенное решение интегрального уравнения')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'норма\theta')

%% k-е приближение оптимального управления u_ot_t

figure
for j=1:k;
    for i=1:n;
        u_ot_t(j,i)=(teta_ot_t(j,i).*phi0_ot_b(i));
    end;
end;
u_ot_t

%subplot(4,1,2)
[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,u_ot_t) %Рисуем
title('k-е приближение оптимального управления ')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'норма u(t)')

%% k-е приближение оптимального процесса V_ot_t

figure

```

```

for j=1:k;
    for i=1:n;
        V_ot_t(j,i)=(u_ot_t(j,i).*sqrt(M1*d*T)*p0);
    end;
end;
V_ot_t

%subplot(4,1,3)
[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку
surf(i,j,V_ot_t) %Рисуем
title('k-е приближение оптимального процесса ')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'норма V(t)')

%% Приближенное значение функционала I_ot_u

figure
%subplot(4,1,4)

norma_pci_kv=1/3;
norma_V_kv=2*T*(norma_pci_kv+d*4*M1)*(6*T+0.35^2*T); %
норма квадрата V(t,x)

norma_V=sqrt(norma_V_kv); %норма V(t,x)
norma_V

norma_xi_kv=xi0^2*1/3;
norma_xi=sqrt(norma_xi_kv); %норма xi от x
norma_xi

norma_u_ot_t=sqrt(26*T); %норма u(t)

for i=1:n;

C=(2*norma_V+2*norma_xi)*sqrt(2*d*T)*p0+beta(i)*2*norma_u_o
t_t;

```

```
end;  
C
```

```
for j=1:k;  
    for i=1:n;  
        I_ot_u(j,i)=(V_ot_t(j,i).*C);  
    end;  
end;  
I_ot_u
```

```
[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку
```

```
surf(i,j,I_ot_u) %Рисуем  
title('Приближенное значение функционала [I[u(t)]-I[u_k(t)]')  
xlabel( '\beta')  
ylabel( 'k')  
zlabel( 'модуль I(u(t))')
```

Приложение С

Листинг кода Matlab для расчета примера 3.

```
clc  
clear  
  
%% рассчитаем числа lambda  
figure  
hold on  
ezplot('tan(x)-y',[0,15],[-0,16]);  
ezplot('(1.5)/x-y',[0,15],[-0,16]);  
grid on  
title( '\lambda tg(\lambda)=\alpha, \alpha=1.5 ')  
legend('tg(\lambda)', '\alpha/\lambda')  
% axis equal  
[w,f]=fsolve(@f1,[1.5,14]);  
l(1)=w(1);y(1)=w(2);
```

```

[w,f]=fsolve(@f1,[4,1]);
l(2)=w(1);y(2)=w(2);
[w,f]=fsolve(@f1,[6,0]);
l(3)=w(1);y(3)=w(2);
[w,f]=fsolve(@f1,[9,0]);
l(4)=w(1);y(4)=w(2);
[w,f]=fsolve(@f1,[12,0]);
l(5)=w(1);y(5)=w(2);
lambda=l()

%plot(l,y,'ro');
%% зададим варьируемые коэффициенты
beta=[0.70:0.05:0.95];
xi0=3
%xi0=[2:0.5:4.5];
M1=1; % согласно аналитической оценке
M0=1;
n=6;
k=20;
T=1 %величина временного интервала

%% построим функцию u(t)
figure
subplot(2,1,1)
u=[-1:0.001:1];
p_ot_u=log(sqrt(u.^2+1));

plot (u,p_ot_u)
title('Функция управления  $p(u)=0.5\ln(u^2(t)+1)$ ')
xlabel('u(t)')
ylabel('p[t,u(t)]')
%%-----
%% вычислим  $p_0=\max|p'(u)|$ 
subplot(2,1,2)
u=[-1:0.001:1];
p=abs(u)./(u.^2+1);

```

```

p0=max(abs(u)./(u.^2+1));
plot (u,p);
title('p0=max|p"(u)|')
xlabel( 'u(t)')
ylabel( 'p[t,u(t)]')
p0
%%-----
%%  рассчитаем коэффициент сжатия gamma

phi0_ot_b=1./(2.*beta())
K0=2;
a=1+(M0*M1*K0*Г)/(2*1(1)^2);
d=1/l(1)^2+1/6;
d1=1/3+p0;
d2=K0^2/l(1)^4;
d3=1/2;
gamma=2*a*d*p0.*phi0_ot_b();% рассчитаем гамму
Gamma=gamma()

%% Приближенное решение нелинейного интегрального
уравнения teta_ot_t

figure

for i=1:n;
G0_ot_teta0(i)=2*a*d.*log((2./beta(i)).*(2*xi0)*a*d);
end;
G0_ot_teta0=[G0_ot_teta0]'

for j=1:k;
  for i=1:n;
    ggamma(j,i)=gamma(i).^j./(1-gamma(i));
  end;
end;
ggamma
  for j=1:k;
    for i=1:n;

```

```

    teta_ot_t(j,i)=ggamma(j,i).*(G0_ot_teta0(i));
end;
end;
teta_ot_t

subplot(2,2,1)
[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,teta_ot_t) %Рисуем
title('приближенное решение интегрального уравнения')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'z')

%% k-е приближение оптимального управления u_ot_t

for j=1:k;
    for i=1:n;
        u_ot_t(j,i)=(teta_ot_t(j,i).*phi0_ot_b(i));
    end;
end;
u_ot_t

subplot(2,2,2)
[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,u_ot_t) %Рисуем
title('k-е приближение оптимального управления ')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'z')

%% k-е приближение оптимального процесса V_ot_t
figure
for j=1:k;
    for i=1:n;
        V_ot_t(j,i)=(u_ot_t(j,i).*sqrt(a*d*2*T)*p0);
    end;
end;

```

```

    end;
end;
    V_ot_t

subplot(2,2,1)
[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,V_ot_t) %Рисуем
title('k,m,r-е приближение оптимального процесса ')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'z')

%% k,m-е приближение оптимального процесса V_ot_tm

for j=1:k;
    for i=1:n;
        V_ot_tm(j,i)=sqrt(d3*d*d1)*d2;
    end;
end;
    V_ot_tm

subplot(2,2,2)
[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,V_ot_tm) %Рисуем
title('k,m-е приближение оптимального процесса ')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'z')

%% k,m,r-е приближение оптимального процесса V_ot_tmr

for j=1:k;
    for i=1:n;
        V_ot_tmr(j,i)=sqrt(d3*d*d1);
    end;

```

```

end;
    V_ot_tmr

subplot(2,2,3)
[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,V_ot_tmr) %Рисуем
title('k,m,r-е приближение оптимального процесса ')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'z')
%%% сходимость k,m,r-го приближения оптимального процесса
V_ot_tmr1

for j=1:k;
    for i=1:n;
        V_ot_tmr1(j,i)=V_ot_t(j,i)+V_ot_tm(j,i)+V_ot_tmr(j,i);
    end;
end;
    V_ot_tmr1

subplot(2,2,4)
[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,V_ot_tmr1) %Рисуем
title('k,m,r-е приближение оптимального процесса ')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'z')
%%% Приближенное значение функционала I_ot_u

figure

subplot(2,2,1)

f=(log(2))^2;
syms x y

```

```

%norma_pci_kv=(int((x-1)^2,0,1))
norma_pci_kv=1/3;
norma_V_kv=3*a*d*(norma_pci_kv+2*0.5*f); % норма квадрата
V(t,x)
norma_V=sqrt(norma_V_kv); % норма V(t,x)
norma_V

%norma_xi_kv=(int(xi0^2*(y-1)^2,0,1)); % норма квадрата xi от x
norma_xi_kv=xi0^2*1/3;
norma_xi=sqrt(norma_xi_kv); % норма xi от x
norma_xi

norma_u_ot_t=1; % норма u(t)

for i=1:n;
    C1=2*(norma_V+norma_xi);
    C2=2*beta(i)*norma_u_ot_t;
end;
C1
C2

for j=1:k;
    for i=1:n;
        I_ot_u(j,i)=(V_ot_t(j,i).*C1+u_ot_t(j,i).*C2);
    end;
end;
I_ot_u

[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,I_ot_u) %Рисуем
title('Приближенное значение функционала [I[u_0(t)]-
I_m_r[u_k(t)]')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')

```

```

xlabel('z')
colormap hot; %Задаем палитру:
%% Приближенное значение функционала I_ot_ukm
subplot(2,2,2)

for j=1:k;
    for i=1:n;
        I_ot_ukm(j,i)=(V_ot_tm(j,i).*C1);
    end;
end;
I_ot_ukm

[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,I_ot_ukm) %Рисуем
title('Приближенное значение функционала [I[u_k(t)]-I_m[u_k(t)']')
xlabel('beta')
ylabel('k')
xlabel('z')
colormap hot; %Задаем палитру:

%% Приближенное значение функционала I_ot_ukmr
subplot(2,2,3)

for j=1:k;
    for i=1:n;
        I_ot_ukmr(j,i)=(V_ot_tm(j,i).*C1);
    end;
end;
I_ot_ukmr

[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,I_ot_ukmr) %Рисуем
title('Приближенное значение функционала [I_m[u_k(t)]-I_m_r[u_k(t)']')

```

```

xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'z')
colormap hot; %Задаем палитру:
%% Приближенное значение функционала I_ot_ukmr1
subplot(2,2,4)

for j=1:k;
    for i=1:n;
        I_ot_ukmr1(j,i)=I_ot_u(j,i)+I_ot_ukm(j,i)+I_ot_ukmr(j,i);
    end;
end;
I_ot_ukmr1

[i,j]=meshgrid(1:n,1:k);% Задаём координатную сетку

surf(i,j,I_ot_ukmr1) %Рисуем
title('Приближенное значение функционала [I[u_0(t)]-
I_m_r[u_k(t)]]')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k')
zlabel( 'z')
colormap hot; %Задаем палитру:

figure

subplot(2,2,1)
plot(beta, teta_ot_t(2,:), 'r', beta, u_ot_t(2,:), 'g', beta, V_ot_t(2,:), 'b',
beta, I_ot_u(2,:), 'm')
legend('||\theta-\theta_k||', '||u(t)-u_k(t)||', '||V(t)-V_k(t)||', '||I[u(t)]-
I[u_k(t)]||')
title('Зависимость приближений от итерации (k=2)')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k=2 ')

subplot(2,2,2)

```

```

plot(beta, teta_ot_t(8,:), 'r', beta, u_ot_t(8,:), 'g', beta, V_ot_t(8,:), 'b',
beta, I_ot_u(8,:), 'm')
legend('||\theta-\theta_k||', '||u(t)-u_k(t)||', '||V(t)-V_k(t)||', '||I[u(t)]-I[u_k(t)]||')
title('Зависимость приближений от итерации (k=8)')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k=8 ')

```

```

subplot(2,2,3)
plot(beta, teta_ot_t(14,:), 'r', beta, u_ot_t(14,:), 'g', beta, V_ot_t(14,:), 'b', beta, I_ot_u(14,:), 'm')
legend('||\theta-\theta_k||', '||u(t)-u_k(t)||', '||V(t)-V_k(t)||', '||I[u(t)]-I[u_k(t)]||')
title('Зависимость приближений от итерации (k=14)')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k=14 ')

```

```

subplot(2,2,4)
plot(beta, teta_ot_t(18,:), 'r', beta, u_ot_t(18,:), 'g', beta, V_ot_t(18,:), 'b', beta, I_ot_u(18,:), 'm')
legend('||\theta-\theta_k||', '||u(t)-u_k(t)||', '||V(t)-V_k(t)||', '||I[u(t)]-I[u_k(t)]||')
title('Зависимость приближений от итерации (k=18)')
xlabel( '\beta')
ylabel( 'k=18 ')

```

Научное издание

*Акылбек Керимбекович Керимбеков,
Любовь Сергеевна Красниченко,
Эркеим Сейдакмат кызы*

**НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ**

Монография

Подписано в печать 25.11.2020
Формат 60x84 ¹/₁₆. Печать офсетная.
Объем 12,25 п.л. Тираж 200 экз. Заказ 148

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, Бишкек, ул. Анкара 2а