ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕСИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. первого Президента РФ Б.Н. Ельцина

ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс

Бишкек 2020

УДК 517
М 33

Рецензенты:
А.С. Саадабаев, д-р физ.-мат. наук, проф.
КНУ им. Ж. Баласагына,
А.Б. Байзаков, д-р физ.-мат. наук, проф. КРСУ

Составитель:
К.Р. Карабакиров

Рекомендовано к изданию кафедрой высшей
математики и Ученым советом ЕТФ КРСУ

М 33 МАТЕМАТИКА: учеб.-метод. комплекс / сост.: К.Р. Карабакиров. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2020. – 166 с.

В учебно-методическом комплексе представлена рабочая программа курса «Математика» для студентов направления «Менеджмент» экономического факультета. Указаны дидактические цели обучения. Предложено соответствующее дидактическое обеспечение: образцы типовых расчетов, контрольных работ, компьютерной контрольно-обучающей программы тестирования; решение предложенных образцов. Приведен перечень вопросов и задач, освоение которых обеспечит студенту необходимый уровень подготовки для прохождения рубежных и промежуточных аттестаций.

Рекомендован преподавателям и студентам экономического и естественно-технического факультетов.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель учебно-методического комплекса – помочь студентам организовать самостоятельную работу, обозначить круг изучаемых в данном курсе вопросов и задач, со ориентировать их на задания для текущего и рейтингового контроля.

Открытый характер заданий всех видов контроля, а также наличие в УМК решенных образцов типовых расчетов, контрольных работ создают предпосылки и условия для активной и плодотворной работы студентов в семестрах, а также при подготовке к экзаменам.

Средствами обучения по УМК являются основные и дополнительные учебники и учебные пособия, рекомендованные в списке литературы. Эти учебные пособия имеются в наличии в библиотеках КРСУ в бумажном виде, а также основная часть пособий размещена в электронном виде на сайте кафедры: http://matem.krsu.edu.kg//

Рабочая программа по дисциплине «Математика» составлена в соответствии с требованиями образовательных стандартов высшего образования (уровень бакалавриата) по направлению 38.03.02 «Менеджмент». Программа предназначена для студентов первого курса экономического факультета КРСУ, и рассчитана на 360 часов, из них аудиторных 144 часа (лекции – 72 часа, практические занятия – 72 часа).

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОУВПО КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Декан ЕТФ

____

«___»__________20___г

Рабочая программа дисциплины (модуля)

МАТЕМАТИКА

Закреплена за кафедрой «**Высшая математика»**
Учебный план Направление 38.03.02 Менеджмент. Профили «Управление малым бизнесом», «Управление маркетингом», «Производственный менеджмент».
Форма обучения Очная
Общая трудоемкость 10 ЗЕТ

Часов по учебному плану 360
в том числе:
аудиторные занятия 144
самостоятельная работа 144
экзамены 72

Виды контроля в семестрах экзамены 1,2

Программу составил:
К.ф.-м.н. *Карабакиров К.Р.* ________________

Рецензент:
Д.ф.-м.н., проф. *Байзаков А.Б.* ____________________

Рабочая программа дисциплины «Математика»
разработана в соответствии с ФГОС 3+:

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ГОСУДАРСТВЕНННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ
СТАНДАРТ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ 38.03.02 МЕНЕДЖМЕНТ

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры высшей математики

Протокол от «___» ____________20_____г. №____
Срок действия программы: ____________________
Зав. кафедрой проф. *Лелевкина Л.Г.* ____________

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целями освоения дисциплины «Математика» являются:

- научить студентов пользоваться основными понятиями и результатами высшей математики;
- дать необходимый математический аппарат для изучения других естественнонаучных и экономических дисциплин;
- обеспечить базовую математическую подготовку, позволяющую решать теоретические и практические экономические задачи;
- выработать у студентов умение формулировать и исследовать различные математические модели экономических задач;
- привить студентам соответствующую математическую культуру.

Задача преподавания курса как фундаментальной дисциплины состоит в том, чтобы студент развил логическое и абстрактное мышление, выработал навыки перевода экономических задач на математический язык и их исследования, а также научился пользоваться простейшими математическими методами решения прикладных задач.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП

Цикл (раздел) ООП: Б1.Б.04

2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

2.1.1 Для освоения данной дисциплины необходимы знания по предметам «Алгебра и начала анализа», «Геометрия» в объеме средней школы.

2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

2.2.1 Процессы принятия управленческих решений.

2.2.2 Анализ и оценка рыночной конъюнктуры.

2.2.3 Анализ и оценка удовлетворенности потребителей.
2.2.4 Анализ потребительского поведения и выбора.
2.2.5 Базовые стратегии конкуренции.
2.2.6 Статистика.
2.2.7 Информационные технологии в менеджменте.

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

ОПК-7: способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности.

Знать:

Уровень 1. Методологию и методические приемы адаптации математических знаний и возможности их использования при постановке и решении профессиональных задач экономики и менеджмента.

Уровень 2. Терминологию и методы поиска информационных источников и правила работы с библиографией.

Уровень 3. Применять на практике принципы и подходы к анализу экономической и управленческой информации для решения стандартных задач управленческой деятельности.

Уметь:

Уровень 1. Использовать основные математические методы для сбора, обработки и анализа данных социально-экономических и социально-управленческих явлений профессиональной деятельности.

Уровень 2. Находить необходимые источники информации и оформлять библиографию в соответствии с ГОСТ.

Уровень 3. Использовать программное обеспечение для реализации информационно-коммуникационных технологий в целях решения задач профессиональной деятельности.

Владеть:

Уровень 1. Практическими приемами системного применения информационно-математических методов в конкретных экономических и управленческих исследованиях.

Уровень 2. Методами поиска информационных источников и навыками работы с библиографией.

Уровень 3. Навыками выбора подходящих информационно-коммуникационных технологий и программного обеспечения их реализации методами и приемами статистического и экономического анализа управленческой информации для решения стандартных задач организационно-управленческой деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1. Знать:

- основные понятия и инструменты алгебры и геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики.

3.2. Уметь:

- решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений; использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей; обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные.

3.3. Владеть:

- математическими, статистическими и количественными методами решения типовых организационно-управленческих задач.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Материал курса «Математика» рассчитан на 288 часов, из них аудиторных – 144 часа (лекции – 72 часа, практические занятия – 72 часа), самостоятельная работа – 144 часа. Курс разбит на десять разделов:

1 семестр

1. Матричная алгебра и системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия.
3. Пределы последовательностей и функций.
4. Производные функций.
5. Неопределенные и определенные интегралы.

2 семестр

6. Элементы комбинаторики. Случайные события.
7. Дискретные случайные величины.
8. Непрерывные случайные величины.
9. Распределения. Выборки.
10. Гипотезы. Корреляция.

Распределение часов по видам занятий и часам с указанием рекомендуемой литературы, приведено в таблице

Наименование разделов и тем /вид занятия	Часы	Литература
1 семестр		
Раздел 1. Матричная алгебра и СЛАУ	**32**	
Матрицы. Действия над ними. Определители /Лек/	4	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.1, Л3.4
Матрицы. Действия над ними. Определители /Пр/	4	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.1, Л3.4
Решение домашних заданий (ДЗ), типовых расчетов (ТР) /Ср/	6	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.1, Л3.4

Продолжение таблицы

Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера /Лек/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.1, Л3.4
Системы линейных алгебраических уравнений. Правило Крамера /Пр/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.1, Л3.4
Решение ДЗ, ТР /Ср/	4	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.1, Л3.4
Метод Гаусса. Исследование систем линейных алгебраических уравнений /Лек/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.1, Л3.4
Метод Гаусса. Исследование систем линейных алгебраических уравнений /Пр/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.1, Л3.4
Решение ДЗ, ТР. Подготовка к защите ТР /Ср/	6	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.1, Л3.4
Раздел 2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия	**40**	
Векторы. Действия над ними /Лек/	4	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.1, Л3.2
Векторы. Действия над ними /Пр/	4	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.1, Л3.2
Решение ДЗ, ТР /Ср/	6	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.1, Л3.2
Прямая на плоскости /Лек/	4	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.3
Прямая на плоскости /Пр/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.3
Решение ДЗ, ТР /Ср/	6	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.3
Кривые 2-го порядка на плоскости /Лек/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.3
Кривые 2-го порядка на плоскости /Пр/	4	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.3
Решение ДЗ, ТР. Подготовка к защите ТР /Ср/	8	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.3

Продолжение таблицы

Раздел 3. Пределы последовательностей и функций	**24**	
Графики основных элементарных функций. Преобразования графиков /Лек/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.6
Пределы. Свойства. Неопределенности /Лек/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.3
Пределы. Свойства. Неопределенности /Пр/	4	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.3
Решение ДЗ, ТР /Ср/	6	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.3
Замечательные пределы /Лек/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.3
Замечательные пределы /Пр/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.3
Решение ДЗ, ТР. Подготовка к защите ТР /Ср/	6	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.3
Раздел 4. Производные функций	**16**	
Производная функции и ее применение /Лек/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.7
Производная функции и ее применение /Пр/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.7
Решение ДЗ, ТР. /Ср/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.7
Исследование функции с помощью производной /Лек/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.7
Исследование функции с помощью производной /Пр/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.7
Решение ДЗ, ТР. Подготовка к защите ТР /Ср/	6	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.7
Раздел 5. Неопределенные и определенные интегралы	**32**	
Неопределенный интеграл. Свойства /Лек/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.8

Продолжение таблицы

Неопределенный интеграл. Свойства /Пр/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.8
Решение ДЗ, ТР /Ср/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.8
Методы интегрирования неопределенных интегралов /Лек/	4	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.8
Методы интегрирования неопределенных интегралов /Пр/	4	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.8
Решение ДЗ, ТР /Ср/	6	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.8
Определенный интеграл и его применение /Лек/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.9
Определенный интеграл и его применение /Пр/	2	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.9
Решение ДЗ, ТР. Подготовка к защите ТР /Ср/	8	Л1.1, Л1.2, Л2.1, Л2.2, Л3.9
Итого за 1 семестр	**144**	
2 семестр		
Раздел 6. Элементы комбинаторики. Случайные события	**40**	
Элементы комбинаторики /Лек/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Элементы комбинаторики /Пр/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Решение ДЗ, ТР /Ср/	4	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Случайные события. Действия над ними. Несовместность событий /Лек/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Случайные события. Действия над ними. Несовместность событий /Пр/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Решение ДЗ, ТР /Ср/	4	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11

Продолжение таблицы

Определения вероятности. Аксиоматическое построение теории вероятностей /Лек/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Условная вероятность. Полная вероятность. Независимость событий /Лек/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Условная вероятность. Полная вероятность. Независимость событий /Пр/	4	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Решение ДЗ, ТР /Ср/	6	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Последовательность независимых испытаний /Лек/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Последовательность независимых испытаний /Пр/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Решение ДЗ, ТР. Подготовка к защите ТР /Ср/	6	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Раздел 7. Дискретные случайные величины	**14**	
Дискретные случайные величины. Числовые характеристики. Свойства /Лек/	4	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Дискретные случайные величины. Основные распределения. Свойства /Пр/	4	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Решение ДЗ, ТР. Подготовка к защите ТР /Ср/	6	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Раздел 8. Непрерывные случайные величины	**30**	
Непрерывные случайные величины. Числовые характеристики. Свойства /Лек/	4	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Непрерывные случайные величины. Числовые характеристики. Свойства /Пр/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Решение ДЗ, ТР /Ср/	4	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Непрерывные случайные величины. Основные распределения. Свойства /Лек/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Непрерывные случайные величины. Основные распределения. Свойства /Пр/	4	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11

Продолжение таблицы

Решение ДЗ, ТР /Ср/	**4**	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Закон больших чисел /Лек/	**2**	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Закон больших чисел /Пр/	**2**	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Решение ДЗ, ТР. Подготовка к защите ТР /Ср/	**6**	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.10, Л3.11
Раздел 9. Распределения. Выборки	**30**	
Выборочный метод. Статистическое распределение выборки /Лек/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Выборочный метод. Статистическое распределение выборки /Пр/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Статистические оценки параметров распределений /Лек/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Статистические оценки параметров распределений /Пр/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Решение ДЗ, ТР /Ср/	4	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Условные варианты. Метод произведений /Лек/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Условные варианты. Метод произведений /Пр/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Решение ДЗ, ТР /Ср/	4	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Эмпирические и теоретические частоты /Лек/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Эмпирические и теоретические частоты /Пр/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Решение ДЗ, ТР. Подготовка к защите ТР /Ср/	6	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13

Окончание таблицы

Раздел 10. Гипотезы. Корреляция	**30**	
Статистическая проверка статистических гипотез. Критерий Пирсона /Лек/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Статистическая проверка статистических гипотез. Критерий Пирсона /Пр/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Решение ДЗ, ТР /Ср/	6	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Корреляционная зависимость. Выборочный коэффициент корреляции /Лек/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Корреляционная зависимость. Выборочный коэффициент корреляции /Пр	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Решение ДЗ, ТР /Ср/	6	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Построение прямой и кривых линий регрессий /Лек/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Построение прямой и кривых линий регрессий /Пр/	2	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Решение ДЗ, ТР. Подготовка к защите ТР /Ср/	6	Л1.3, Л1.4, Л2.3, Л2.4, Л3.12, Л3.13
Итого за 2 семестр	**144**	
Итого	**288**	

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Математика» фонд оценочных средств представляет комплект контрольно-измерительных материалов, предназначенных для контроля и оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций, определения соответствия или несоответствия уровня достижений обучающегося планируемым результатам.

В комплект оценочных средств входят: типовые расчеты, задания для контрольной работы, задания для контрольно-обучающей программы тестирования (КОПТ), задания для промежуточной аттестации.

5.1. Контрольные вопросы и задания

Контрольные вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ:

1 семестр

1. Матрицы: определение, типы, операции.
2. Определители 2-го, 3-го и n-го порядков, способ вычисления определителей, их свойства.
3. Минор и алгебраическое дополнение элемента квадратной матрицы. Теорема Лапласа о вычислении определителя n-го порядка. Способы вычисления определителей порядка выше, чем 3.
4. Обратная матрица и способы ее вычисления. Ранг матрицы и способы его вычисления.
5. Общие сведения о системах линейных алгебраических уравнений: определение системы и ее решения; совместность, несовместность, определенность и неопределенность.
6. Решение систем из n уравнений с n неизвестными методом обратной матрицы.
7. Метод Крамера решения СЛАУ.
8. Метод Гаусса решения СЛАУ.
9. Теорема Кронекера–Капелли.
10. Понятие n-мерного вектора. Типы векторов. Операции над векторами (линейные).
11. n-мерное векторное пространство.
12. Понятие о линейной комбинации и линейной зависимости системы векторов. Критерий линейной зависимости системы.
13. Размерность и базис векторного пространства.
14. Евклидово пространство. Скалярное произведение векторов и его свойства.
15. Понятие об уравнение линии в пространстве R2.

16. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

17. Каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой в отрезках. Расстояние между двумя точками в R2.

18. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

19. Эллипс, парабола и их свойства.

20. Гипербола и ее свойства.

21. Распознавание линий второго порядка путем приведения ее уравнения к каноническому виду.

22. Общее уравнение плоскости в R3. Канонические уравнения прямой в R3.

23. Графики функций и их преобразования.

24. Различные виды функций: основные элементарные, сложные, взаимообратные. Задание функции в параметрическом виде, в полярных координатах.

25. Числовые последовательности: свойства, предел.

26. Геометрический смысл предела.

27. Предел функции и его свойства.

28. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

29. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.

30. Замечательные пределы.

31. Производные функций. Геометрический, экономический и физический смысл производной.

32. Правила дифференцирования. Производная сложной функции.

33. Производные основных элементарных функций.

34. Дифференциал функции и его свойства.

35. Правило Лопиталя.

36. Асимптоты графика функции.

37. Выпуклость и экстремумы функции.

38. Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства.

39. Таблица неопределенных интегралов.

40. Непосредственное интегрирование неопределенных интегралов.

41. Интегрирование подведением под знак дифференциала.

42. Интегрирование выделением целой части из неправильной рациональной дроби.

43. Интегрирование выделением полного квадрата в знаменателе рациональной дроби.

44. Интегрирование по частям.

45. Определение определенного интеграла.

46. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница.

47. Замена переменой и интегрирование по частям в определенном интеграле.

48. Приложения определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции.

49. Несобственные интегралы. Несобственные интегралы I и II рода и их свойства.

2 семестр

1. Перестановки n элементов с повторениями и без повторений. Размещения из n элементов по k элементов. Примеры.

2. Сочетания из n элементов по k элементов и их свойства. Примеры.

3. Основные правила комбинаторики. Примеры.

4. События. Виды событий.

5. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности.

6. Статистическое и геометрическое определение вероятности.

7. Действия над событиями. Теоремы сложения вероятностей.

8. Условная вероятность. Независимые события. Теоремы умножения вероятностей.

9. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

10. Повторные независимые испытания. Формулы Бернулли и Пуассона.

11. Локальная теорема Муавра–Лапласа.

12. Интегральная теорема Муавра–Лапласа и следствие из нее.

13. Случайные величины. Операции над СВ. Закон распределения ДСВ.

14. Числовые характеристики ДСВ: мат. ожидание, дисперсия, ср. кв. отклонение и их свойства.

15. Функция распределения СВ и ее свойства.

16. Непрерывные СВ. Плотность вероятности и ее свойства.

17. Числовые характеристики НСВ.

18. Мода и медиана. Начальные и центральные теоретические моменты СВ. Асимметрия и эксцесс.

19. Биномиальное распределение ДСВ.

20. Геометрическое распределение ДСВ.

21. Гипергеометрическое распределение ДСВ.

22. Распределение Пуассона ДСВ.

23. Равномерное распределение НСВ.

24. Показательное распределение НСВ.

25. Нормальное распределение НСВ.

26. Закон больших чисел. Неравенство Маркова.

27. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева.

28. Закон больших чисел. Теорема Чебышева.

29. Закон больших чисел. Теорема Бернулли.

30. Центральная предельная теорема.

31. Выборка и ее распределение: выборочная и генеральная совокупности, типы выборок.

32. Стат. распределение выборки, полигон и гистограмма.

33. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.

34. Статистические оценки параметров распределения: смещенность, несмещенность, эффективность оценки.

35. Выборочная средняя и выборочная дисперсия.

36. Мода и медиана, вариационный размах и коэффициент вариации.

37. Начальный и центральный эмпирические моменты.

38. Метод моментов для точечной оценки параметров распределения.

39. Метод максимального правдоподобия для точечной оценки параметров распределения.

40. Интервальные оценки. Доверительный интервал.

41. Доверительный интервал для оценки мат. ожидания нормального распределения.

42. Доверительный интервал для оценки ср. кв. отклонения нормального распределения.

43. Доверительные интервалы для оценки мат. ожидания нормального распределения при неизвестном ср. кв. отклонении.

44. Проверка статистических гипотез. Ошибки первого и второго рода.

45. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона.

46. Корреляционная зависимость СВ.

47. Выборочный коэффициент корреляции.

48. Построение прямой линии регрессии.

49. Построение параболической линии регрессии.

Вопросы для проверки уровня обученности УМЕТЬ:

1 семестр

1. Найти $P=(2A-B)C$, где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Выполнить действие: $-3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

3. Выполнить действие: $5\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}-(-2)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

4. Найти $P = A^T - 2B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Выполнить действие: $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Найти произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. Найти произведения *AB* и *BA* матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Найти произведения *AB* и *BA* матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

10. Найти произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Найти произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

12. Вычислить определитель по правилу треугольников:
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

13. Вычислить определитель по правилу треугольников:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

14. Вычислить определитель по правилу треугольников:
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

15. Вычислить определитель разложением по второму столбцу:
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

16. Вычислить определитель разложением по третьему столбцу: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$

17. Вычислить определитель разложением по второй строке:
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

18. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & x & 3 \end{vmatrix} = 5.$

19. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & x & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5.$

20. Вычислить алгебраическое дополнение A_{14} матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Вычислить алгебраическое дополнение A_{32} матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решить системы уравнений методом Крамера, Гаусса и матричным методом:

22. $\begin{cases} 2x - y + z = 3; \\ -x + y + 2z = 1; \\ 4x - 2y + z = 5. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} x - y + z = -1; \\ -x + y + 2z = 1; \\ 4x - 2y + z = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x - y + z = 5; \\ x + 2y + 2z = 4; \\ -x + z = -2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} -y + z = -2; \\ -x + y + 2z = 3; \\ 4x - 2y + z = 3. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x - y + z = -1; \\ 2x - 2y + z = -2; \\ 4x - 2y + z = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2; \\ 6x - 4y - z = 1; \\ -y + 2z = 1. \end{cases}$

Решить однородные системы уравнений:

28. $\begin{cases} -y+z=0; \\ -x+y+2z=0; \\ 4x-2y+z=0. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x-y+z=0; \\ 2x-2y+z=0; \\ 4x-2y+z=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x-2y-2z=0; \\ 6x-4y-z=0; \\ 9x-6y+z=0. \end{cases}$

31. Даны точки $A(1;\ 5;\ -1)$ и $B(3;\ -2;\ -2)$. Найти вектор $\overline{AB}$ и его длину.

32. Найти угол между векторами $\overline{a}=\{-2;6;3\}$ и $\overline{b}=\{1;2;-2\}$.

33. Найти скалярное произведение векторов: $\overline{a}=-2\overline{i}+6\overline{j}+3\overline{k}$ и $\overline{b}=5\overline{i}-7\overline{j}+9\overline{k}$.

34. Найти скалярное произведение векторов: $\overline{a}=\{-2;6;3\}$ и $\overline{b}=\{1;2;-2\}$.

35. При каких значениях α и β векторы $\overline{a}=-2\overline{i}+\alpha\overline{j}+3\overline{k}$ и $\overline{b}=5\overline{i}-3\overline{j}+\beta\overline{k}$ коллинеарны?

36. Найти вектор $\overline{a}\cdot\left(2\overline{b}-3\overline{c}\right)$, если $\overline{a}=\{-2;6;3\}$ и $\overline{b}=\{1;2;-2\}$.

37. При каком значении α векторы $\overline{a}=(-2\alpha+1)\overline{i}+\alpha\overline{j}+(3-\alpha)\overline{k}$ и $\overline{b}=5\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$ ортогональны?

38. Найти абсциссу вектора $\overline{a}$, если известно, что векторы $\overline{a}=\{x;-2;3\}$, $\overline{b}=\{1;2;-2\}$ и $\overline{c}=\{3;-1;2\}$ компланарны.

39. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-3;\ -1)$ и $B(2;\ -2)$.

40. Составить уравнение прямой, пересекающей ось ординат в точке $(0,\ -2)$ и проходящей под углом 45° к оси абсцисс.

41. Составить общее уравнение прямой $\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1$ и указать координаты ее нормального вектора.

42. Составить каноническое уравнение прямой $\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1$ и указать координаты ее направляющего вектора.

43. Дан треугольник ABC: $A(-3; -1)$, $B(2; -2)$, $C(1; 5)$. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины C.

44. Две стороны квадрата лежат на прямых: $3x-2y+5=0$ и $3x-2y-6=0$. Вычислить его площадь.

45. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(-3;2;4)$.

Вычислить пределы:

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$. 47. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4+x+11}{2x^4+5x^2+1}$.

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{4x^2+5x+1}$. 49. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+5}{3n^3+4n+6}$.

50. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x+1}{5x^2-10x+6}$. 51. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$.

52. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$. 53. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{2+3x+x^2}$.

54. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{9-x^2}{x^2+x-6}$. 55. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{(x-1)^2}$.

56. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{x+7}}{6-3x}$. 57. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{4x-12}$.

58. $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{x+8}$. 59. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$.

Найти производные функций:

60. $y=\left(3^x-\sqrt[3]{x}\right)\left(3arctgx-2\log_3 x\right)+\sqrt{2}.$

61. $y=\dfrac{e^x-2}{\arcsin x+2\ln x}+\sin 1.$

62. $y=\dfrac{\log_2 x+tg2}{\arccos x-2x^2}-\ln 10.$ 63. $y=\left(2\cos x-\dfrac{3}{x}\right)\left(arcctgx+4^3\right).$

64. $y=\dfrac{2^x-x^2+e^2}{2\log_2 x-3}.$ 65. $y=\left(3\cos x-4\ln x\right)\left(\dfrac{2}{x^2}+e^3\right).$

Найти производные сложных функций:

66. $y=sin\left(x^3+2lnx\right)+\sqrt{2}.$ 67. $y=\left(x+4sinx\right)^3.$

68. $y=arctg\left(sin3x+4\right).$ 69. $y=5^{arcsin x-3\sqrt{x}}+2.$

70. $y=ln\left(3x^2+2tg\,x\right)+1.$ 71. $y=log_5\left(sin2x+4\right)+\sqrt{3}.$

72. $y=cos\left(3x-\dfrac{5}{x^2}\right).$ 73. $y=3^{\sqrt[4]{x}+2x}.$

Найти неопределенный интеграл:

74. $\int\dfrac{x7^x-8+4x\cos x}{x}dx.$ 75. $\int\dfrac{x^2-1}{x^2+1}dx.$

76. $\int\dfrac{(6x\ -3)^2}{x}dx.$ 77. $\int\dfrac{x^2 2^x+x-\sqrt[4]{x^3}}{x^2}dx.$

78. $\int\dfrac{x^4-5x^2e^x+9x}{x^2}dx.$ 79. $\int\dfrac{(2x+3)^2}{x^5}dx.$

80. $\int\dfrac{x^2+1}{x-1}dx.$ 81. $\int\dfrac{2x+1}{x-1}dx.$

Вычислить определенные интегралы:

82. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin^6 xdx.$ 83. $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$

84. $\int\limits_{0}^{1/2}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ 85. $\int\limits_{0}^{1}6\left(x^2+x^3e^{x^4}\right)dx.$

86. $\int\limits_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$ 87. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^6+1} dx.$

88. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \cos^3 x dx.$ 89. $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-3x}} dx.$

90. $\int\limits_{0}^{\pi/2} (x+3)\sin x dx.$ 91. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{1+7x} dx.$

2 семестр

1. Участники жеребьевки тянут жетоны из ящика. Номера жетонов от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифру 6.

2. Бросают две шестигранные игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков – нечетное число.

3. В лотерее разыгрываются 500 билетов. Крупные выигрыши падают на билеты, номера которых содержат три одинаковых цифры. Некто купил один билет. Найти вероятность того, что он выиграет крупный выигрыш.

4. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков равна 8, а разность – 4?

5. Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу извлекают одну. Найти вероятность того, что будет извлечена фигура любой масти (под фигурой понимают даму, валета, короля).

6. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков равно 8.

7. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимается наудачу одна пуговица. Какова вероятность того, что пуговица будет красная?

8. Найти вероятность того, что подброшенная кость упадет, показав на верхней грани четное или кратное трем число очков.

9. Вероятность попадания стрелком в мишень, равна 0,9. Какова вероятность того, что он попадет только при первом выстреле из трех.

10. В урне находятся 6 шаров, из которых 3 белых. Наудачу вынуты один за другим два шара. Вычислить вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

11. Вероятность правильного оформления счета на предприятии составляет 0,95. Во время аудиторской проверки были взяты два счета. Какова вероятность того, что только один из них оформлен правильно?

12. Предприятие обеспечивает регулярный выпуск продукции при безотказной поставке комплектующих от двух смежников. Вероятность отказа в поставке продукции от первого из смежников равна 0,05; от второго – 0,08. Найти вероятность сбоя в работе предприятия.

13. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

14. В урне находятся 15 белых и 6 черных шаров. Из нее вынимают наугад один шар, снова возвращают его в урну и шары перемешивают. Затем вынимают второй шар. Найдите вероятность, что оба вынутых шара белые.

15. Разрыв электрической цепи может произойти только вследствие выхода из строя элемента K_1 или одновременного выхода двух элементов K_2 и K_3, которые выходят из строя с вероятностями 0,3; 0,2; 0,2. Найти вероятность разрыва цепи.

16. На отдельных карточках написаны буквы «и», «л», «о», «с», «ч». После перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Вычислите вероятность того, что получится слово «число».

17. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6; 2 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок производит выстрел. Какова вероятность, что он попадет в мишень?

18. В первом ящике 20 деталей из них 16 стандартных, во втором – 30 деталей, из них 24 стандартные, в третьем – 10, из них 6 стандартные. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика будет стандартная.

19. В тире 5 ружей, вероятности попадания из которых соответственно равны: 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

20. Три оператора радиолокационной установки производят соответственно 25 %, 35 %, 40 % всех измерений, допуская при этом 5 %, 4 % и 2 % ошибок. Случайно произведенное измерение оказалось ошибочным. Какова вероятность того, что измерение производил первый оператор?

21. В каждом из восьми независимых испытаний событие A происходит с постоянной вероятностью 0,38. Найдите наивероятнейшее число наступлений события A в каждом испытании.

22. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 0,8. Найдите вероятность трех попаданий при четырех выстрелах.

23. Если 30 % студентов имеют слабое зрение, то какова вероятность того, что 5 из 10 студентов имеют слабое зрение?

24. Вероятность того, что Вы выиграете в шахматы, равна 0,33. Какова вероятность, что Вы выиграете 4 партии из 6.

25. Какова вероятность выиграть у равносильного противника в бильярд не менее 4 партий из 5?

26. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в цель, равна 0,7. Найти наивероятнейшее число попаданий, если стрелок 7 раз стреляет в мишень.

27. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что при этом «герб» выпадет 3 раза?

28. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдет три?

29. На складе хранится 500 аккумуляторов. Известно, что после года хранения 20 штук выходят из строя. Требуется найти вероятность того, что наудачу взятый после года хранения аккумулятор окажется годным.

30. Завод отправил на базу 5000 изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут ровно 3 негодных изделия.

31. Контрольную работу по теории вероятностей успешно выполняют в среднем 70 % студентов. Какова вероятность того, что из 200 студентов работу успешно выполнят 150 студентов.

32. Контрольную работу по теории вероятностей успешно выполняют в среднем 70 % студентов. Какова вероятность того,

что из 200 студентов работу успешно выполнят не менее 100 студентов.

33. На пути движения автомобиля пять светофоров, каждый из которых либо разрешает, либо запрещает проезд с вероятностью 0,5. Составить, закон распределения случайной величины X – числа светофоров, пройденных автомобилем без остановки.

34. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 > x_2$. Известно, что $p_1 = P(X = x_1) = 0,3$, $M(X) = 3,7$ и $D(X) = 0,21$. Найти закон распределения этой величины.

35. Случайная величина X задана законом распределения:

X	2	3	x_3	11
P	0,1	p_2	0,3	0,2

Известно, что математическое ожидание X равно 5,7. Найти x_3 и p_2.

36. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 6X + 3Y$, если известны: $M(X) = 3$, $M(Y) = 5$, $D(X) = 4$, $D(Y) = 7$.

37. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X + 6Y$, если известны: $M(X) = 4$, $M(Y) = 2$, $D(X) = 3$, $D(Y) = 2$.

38. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 4X + 2Y$, если известны: $M(X) = 2$, $M(Y) = 3$, $D(X) = 4$, $D(Y) = 7$.

39. В итоге четырех измерений некоторой величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 8, 9, 11, 12. Найти выборочную среднюю результатов и дисперсию ошибок прибора.

40. Найти: а) значение p_3, б) $M(X)$ и $D(X)$, если дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	-1	0	2
P	0,4	0,1	P_3

41. Найти: а) значение p_2, б) $M(X)$ и $D(X)$, если дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

X	1	2	5
P	0,3	P_2	0,5

42. Случайная величина задана законом распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ a(x^2-x), & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Найти параметр *a*.

43. Случайная величина задана законом распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \dfrac{C}{x^7}, & x\ge 1.\end{cases}$$

Найти параметр *C*. Вычислить $M(X)$.

44. Случайная величина задана законом распределения:

$$f(x)=\begin{cases}a\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти параметр *a*. Вычислить $M(X)$.

45. Случайная величина задана законом распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ a(3x-x^2), & 0<x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

Найти параметр *a*. Вычислить вероятность события $1<X<2$

.

46. Случайная величина задана законом распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{x-1}{2}, & 1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Вычислить $M(X)$ и $D(X)$. Вычислить вероятность события $1<X<2$.

47. Случайная величина задана законом распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -3\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}, & -3<x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

Найти вероятность события $X>1$.

48. Сообщение содержит 1000 символов. Вероятность искажения одного символа равна 0,004. Найти среднее число искаженных символов.

49. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения ровно 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.

50. 20 % изделий, выпускаемых данным предприятием, нуждаются в дополнительной регулировке. Наудачу отобрано 150 изделий. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины X – числа изделий в выборке, нуждающихся в регулировке.

51. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с $M(X)$ =175 см и $\sigma(X)$ = 6 см. Найти вероятность того, что рост наудачу выбранного мужчины будет от 170 до 180 см.

52. При весе некоторого изделия в 10 кг найдено, что отклонение по абсолютной величине превосходящее 50 г встречается в среднем 34 раза из тысячи изделий. Считая, что вес изделий распределен нормально, найти его $\sigma(X)$.

53. Среднее значение скорости ветра у поверхности земли в некоторой местности равно 16 км/час. Оценить вероятность то-

го, что при однократном наблюдении скорость ветра не превысит 80 км/час.

54. Известно, что в среднем 5 % студентов носят очки. Оценить вероятность того что из 200 студентов, сидящих в аудитории, окажется не менее 19 % носящих очки.

55. Электростанция обслуживает сеть с 18 000 ламп, вероятность включения каждой из которых в зимний вечер равна 0,9. Какова вероятность того, что число ламп, включенных в сеть, отличается от своего математического ожидания по абсолютной величине не более чем на 200?

56. За пять месяцев работы малое предприятие «Воробышек» получало ежемесячную прибыль (в у.е.): 2, 4, 7, 4, 5. Найдите выборочную среднюю, моду и медиану.

57. За пять месяцев работы малое предприятие «Интеграл» получало ежемесячную прибыль (в у.е.): 2, 3, 3, 4, 5. Найдите выборочную среднюю и исправленную дисперсию, моду и медиану.

58. Фермерское хозяйство засеяло пшеницу на 9 полях, и с каждого гектара 1-го поля получило по 21 центнеру пшеницы. Зная, что урожайность на других полях составила 24; 18; 28; 18; 24,4; 21; 21; 19, определите среднее арифметическое, медиану и моду этих чисел.

59. Следующие данные показывают годовой прирост на 15 различных акций: 12.2, 13, 14.8, 11, 16.7, 9, 8.3, –1.2, 3.9, 15.5, 16.2, 18, 11.6, 10, 9.5. Найдите выборочную среднюю и медиану.

60. Найти выборочную среднюю, дисперсию, моду и медиану случайной величины X на основании данного распределения выборки:

x_i	1	5	6	8
n_i	6	4	7	3

61. Изучалась качество продукции. Были получены данные:

Оценка качество продукции, балл	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10
Число случаев	3	8	36	89	45

Определить средний балл качества продукции. Вычислить моду и медиану.

62. В таблице приведены данные:

x_i	$2-4$	$4-6$	$6-8$	$8-10$	$10-12$
n_i	15	25	30	20	10

Определить исправленную выборочную дисперсию.

63. Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, моду и медиану по заданному распределению выборки:

варианта	65	70	75	80	85	90	95
частота	3	5	15	25	20	7	5

64. По данным выборки объема $n=16$ из генеральной совокупности найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение с надежностью 0,95.

65. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если: $\sigma=4$, $\overline{x_B}=10,2$, $n=16$.

66. По выборке из 25 упаковок товара средний вес составил 101 г с исправленным средним квадратическим отклонением 3 г. Построить доверительный интервал для среднего с вероятностью 95 %.

67. Имеются выборочные данные о стаже работы (X, лет) и выработке одного рабочего за смену (Y, шт.):

X	1	3	4	5	6	7
Y	14	15	18	20	22	25

Построить уравнение линейной регрессии.

68. В магазине постельных принадлежностей были проведены в течение пяти дней подсчеты числа покупок простыней X и подушек Y:

X	10	20	25	28	30
Y	5	8	7	12	14

Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X.

69. Рассчитать коэффициент корреляции между количеством пропущенных студентом пар X и его успеваемостью Y, оцениваемой по 100 бальной шкале, пользуясь данными таблицы:

X	6	2	15	9	12	5	8
Y	82	86	43	74	58	90	78

70. Имеются выборочные данные об общем весе некоторого растения (X, г) и весе его семян (Y, г). Данные приведены в таблице:

X	40	50	60	70	80	90	100
Y	20	25	28	30	35	40	45

Предполагая, что зависимость линейная, рассчитать выборочный коэффициент корреляции и сделать вывод о степени и направлении тесноты связи.

Вопросы для проверки уровня обученности ВЛАДЕТЬ:

1 семестр

Установить совместность и найти общее решение систем линейных уравнений:

1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+x_4=1, \\ 2x_1+x_2+2x_3-3x_4=2, \\ 5x_1+3x_2+x_3-2x_4=3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4, \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_2-x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+2x_2+3x_4=3. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4, \\ 6x_1-2x_2+2x_3+4x_4=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3, \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 9x_1+12x_2+3x_3+10x_4=13. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} -9x_1+6x_2+7x_3+10x_4=3, \\ -6x_1+4x_2+2x_3+3x_4=2, \\ -3x_1+2x_2-11x_3-15x_4=1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -6x_1+9x_2+3x_3+2x_4=4, \\ -2x_1+3x_2+5x_3+4x_4=2, \\ -4x_1+6x_2+4x_3+3x_4=3. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+5x_4=-1, \\ 3x_1-3x_2+6x_3+15x_4=-3, \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8. \end{cases}$

9. Вычислить работу силы $\overline{F} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения $A(-2;1;-3)$ в положение $B(3;-2;1)$.

10. Найти длину вектора $\overline{a} = 2\overline{x} - 3\overline{y}$, если $|\overline{x}| = 2$, $|\overline{y}| = 2$, $\angle(\overline{x}, \overline{y}) = 60^o$.

11. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k}$ и $\overline{b} = 5\overline{j} - 7\overline{k}$.

12. Даны вершины треугольника $A(2;\ 0)$, $B(-4;\ 3)$, $C(1;\ 5)$. Найти внутренний угол треугольника при вершине A.

13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;4)$ параллельно прямой $2x + 3y - 7 = 0$.

14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x + 2y + 4 = 0$ и $3x - y - 9 = 0$, перпендикулярно прямой $x + y - 7 = 0$.

15. Стальной трос подвешен за два конца; точки крепления расположены на одинаковой высоте; расстояние между ними равно 20 м. Величина его прогиба на расстоянии 2 м от точки крепления, считая по горизонтали, равна 14,4 см. Определить величину прогиба этого троса в середине между точками крепления, приближенно считая, что трос имеет форму дуги параболы.

16. Установить, какая линия определяется уравнением: $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

17. Установить какую линию определяет уравнение: $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ и построить данную кривую.

18. Установить какую линию определяет уравнение $y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x + 5}$ и построить данную кривую.

19. Установить какую линию определяет уравнение $y = -\sqrt{y^2 - 4y}$ и построить данную кривую.

20. Установить, какая линия определяется уравнением: $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$.

21. Установить, какая линия определяется уравнением: $4x^2 - 3y^2 - 24x + 6y - 3 = 0$ и построить ее.

22. Определить тип кривой $5x^2 + 4y^2 + 20x - 16y - 44 = 0$ и построить ее.

23. Определить тип кривой $5x^2 - 4y^2 + 20x - 16y - 44 = 0$ и построить ее.

24. Установить какую линию определяет уравнение: $y = 1 - \sqrt{4x + 8}$ и построить данную кривую.

25. Установить какую линию определяет уравнение: $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$ и построить данную кривую.

26. Установить, какая линия определяется уравнением $9x^2 + 4y^2 + 54x - 8y + 49 = 0$ и построить ее.

27. Установить, какая линия определяется уравнением $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 9 = 0$ и построить ее.

28. Установить, какую линию определяет уравнение: $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$ и построить данную кривую.

29. Установить какую линию определяет уравнение: $y = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$ и построить данную кривую.

Вычислить пределы:

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-4}$. 31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right)^{x-3}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{tg^3 x}$. 33. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^{4x}-1}$.

34. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$. 35. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 12x}{ln(1+6x)}$.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{e^{10x}-1}$. 37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+x^2)}{\sin^2 10x}$.

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+x)}{arcsin\,6x}$. 39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{arctg\,6x}$.

Найти производные функций:

40. $y=\left(arctgx\right)^{\log_3 x}$. 41. $y=\left(x^3+4\right)^{tgx}$.

42. $y=\left(\ln 5x\right)^{x^2}$. 43. $\left(3\sin x-4\cos x\right)^{\frac{2}{x^2}}$.

44. $y=\left(\cos x\right)^{3x-\frac{5}{\sqrt{x}}}$. 45. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

46. $y=\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$. 47. $y=\left(\sqrt{x}\right)^{2x}$.

Найти производную y'_x функции:

48. $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2-\cos t. \end{cases}$ 49. $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t-1. \end{cases}$

50. $\begin{cases} x=4t^2+5, \\ y=3t^4+11. \end{cases}$ 51. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

Найти производную y' от неявно заданной функции *y:*

52. $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$. 53. $x^3+ln\,y-x^2e^y=0$.

54. $x^2+yx+e^y=0$. 55. $x^3y+x^2y^2+xy^3=0$.

Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции:

56. $y=x^3-9x^2+15x-3$. 57. $y=2x^2-8x+2$.

58. $y=4x^3+4x^2+x-16$. 59. $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x$.

Найти неопределенные интегралы:

60. $\int x^2\cdot\sqrt[3]{2+3x^3}\,dx$. 61. $\int\dfrac{x}{\cos^2 x^2}\,dx$.

62. $\int\dfrac{e^x}{e^x-3}\,dx$. 63. $\int\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$.

64. $\int \frac{arcsin\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ 65. $\int e^{x^6+7}\cdot x^5 dx.$

66. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{5x-3}}.$ 67. $\int x^2 sin3x\,dx.$

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

68. $\begin{cases} y^2=3x, \\ x^2=3y. \end{cases}$ 69. $\begin{cases} y=x^2-4, \\ y=x+8. \end{cases}$

70. $\begin{cases} xy=2, \\ x+2y-5=0. \end{cases}$ 71. $\begin{cases} y=x^2, \\ 4y=x^2, \\ x=\pm 2. \end{cases}$

72. $\begin{cases} y=x^2, \\ y=4-x^2. \end{cases}$ 73. $\begin{cases} y=x^2-4x+3, \\ y=-x^2+19. \end{cases}$

2 Семестр

1. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность не менее 3 попаданий при четырех выстрелах.

2. По данным переписи населения (1891 г.) Англии и Уэльса установлено: темноглазые отцы и темноглазые сыновья (AB) составили 5 % обследованных лиц, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья (AB) – 7,9 %, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья (AB) – 8,9 %, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья (AB) – 78,2 %. Найти связь между цветом глаз отца и сына.

3. Испытание состоит в подбрасывании трех кубиков. Сколько раз нужно провести испытание, чтобы с вероятностью не менее 0,95 хотя бы один раз появилось «три единицы»?

4. Какова должна быть вероятность изготовления изделия, удовлетворяющего стандарту, чтобы с вероятностью, равной 0,9 можно было утверждать, что среди 20 изготовленных изделий хотя бы одно не удовлетворяет стандарту.

5. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Было произведено 600 выстрелов. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9948 будет заключено число попаданий в цель.

6. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Найти число выстрелов, которые надо произвести по мишени, чтобы с вероятностью 0,9948 ожидать, что отклонение относительной частоты от вероятности попадания при одном выстреле по модулю будет меньше величины 0,05.

7. Сколько следует проверить деталей, чтобы с вероятностью не меньшей 0,95, можно было утверждать, что частость годных деталей отклоняется от вероятности годной детали, равной 0,9 по модулю не более, чем на 0,01.

8. В ящике лежат 5 изделий, одно из них бракованное. Из ящика извлекают изделия одно за другим до тех пор, пока не будет вынуто бракованное. Составить закон распределения случайной величины X – числа вынутых изделий. Вычислить $M(X)$ и $D(X)$.

9. Среди 20 приборов имеется 6 неточных. Наудачу берется 4 прибора. Требуется вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X – числа точных приборов среди отобранных.

10. На базе хранятся 10 холодильников, среди которых 2 бракованных. Из этого числа холодильников в магазин привезли 5 холодильников. Требуется составить закон распределения случайной величины X – числа годных холодильников среди привезённых в магазин; вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

11. Случайная величина задана законом распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x^2-x), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Вычислить вероятность того, что в двух опытах величина примет значение из интервала (1, 5; 2).

12. Случайная величина задана законом распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}, & -3<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность события $X>1$.

13. Случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a+b\arcsin x, & -1<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Найти параметры a и b. Вычислить $M(X)$.

14. Средняя продолжительность телефонного разговора равна 3 мин. Считая, что время разговора является случайной величиной, распределенной по показательному закону, найти вероятность того, что произвольный телефонный разговор будет продолжаться не более 9 минут.

15. Известно, что время работы электрической лампы подчиняется нормальному закону распределения. Средняя продолжительность горения оказалась равной 1000 ч, среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы 40 ч. Найти $M(X^2)$.

16. Деталь изготавливается на станке с систематической ошибкой 3, среднеквадратической ошибкой 4 и считается годной, если ее отклонение от номинала менее 12. Найти вероятность того, что три наудачу взятые детали из пяти будут годными.

17. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с $M(X)=175$ см и $\sigma(X)=6$ см. Найти вероятность того, что хотя бы один из трех мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см.

18. Случайная величина X распределена нормально, ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}.$$

Найти дисперсию случайной величины $Y = 3X-1$, зная, что $Y - N(a, \sigma)$.

19. Случайная величина X распределена нормально, ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}.$$

Найти математическое ожидание случайной величины $Y = 3X - 1$, зная, что $Y - N(a, \sigma)$.

20. На автомате изготовляются заклепки. Диаметр их головок представляет случайную величину, распределенную по нормальному закону с параметрами $a = 2$ мм и $\sigma^2 = 0{,}01$ мм^2. Какие размеры диаметра головок можно гарантировать с вероятностью 0,95?

21. Среднее суточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 20 000 квт-час, а среднее квадратическое отклонение – 200 квт-час. Какого потребления электроэнергии в данном населенном пункте можно ожидать в ближайшие сутки с вероятностью не меньшей 0,96?

22. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

x_i	–2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

23. Среднее время сборки изделия составляло 90 минут. Инженер изобрел новый метод сборки этого изделия, и продолжительность сборки 10 изделий новым способом составила: 79; 74; 112; 95; 83; 96; 77; 84; 70; 90 (мин). Построить доверительный интервал для нового среднего времени сборки с надежностью 95 %.

24. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины (длины протяжки) прибором, не имеющим систематических ошибок: 369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383. Определить несмещенную оценку дисперсии ошибок измерения.

25. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106. Определить несмещенную оценку дисперсии ошибок измерений.

26. Случайная величина X (число поврежденных изделий в одном контейнере) распределена по закону Пуассона с неиз-

вестным параметром λ. Приведено эмпирическое распределение числа поврежденных изделий в 500 контейнерах:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1

Найти точечную оценку неизвестного параметра.

27. Случайная величина X (время безотказной работы элемента) распределена по показательному закону. Приведено эмпирическое распределение среднего времени работы 1000 элементов:

x_i	5	15	25	35	45	55	65
n_i	365	245	150	100	70	45	25

Найти точечную оценку неизвестного параметра.

28. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$. Произведена выборка:

x_i	3	5	6	8	10
n_i	2	3	5	10	10

Найти статистическую оценку параметра λ методом моментов.

29. Используя критерий χ^2 на уровне значимости 0,01, проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки:

Эмпирическая частота n_i	8	16	40	72	36	18	10
Теоретическая частота n_i'	6	18	36	76	39	18	7

30. При уровне значимости 0,05 проверьте гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

Эмпирическая частота n_i	6	12	16	40	13	8	5
Теоретическая частота n_i'	4	11	15	43	15	6	6

31. Установить, пользуясь критерием Пирсона, при $\alpha = 0,05$ случайно или значимо расхождение между эмпирическими и тео-

ретическими частотами, которые вычислены из предположения, что совокупность распределена нормально:

x_i	5	7	15	14	21	16	9	7	6
n_i	6	6	14	15	22	15	8	8	6

32. Найти выборочное уравнение линейной регрессии *Y* на *X*. Оценить тесноту связи и проверить значимость коэффициента корреляции:

Y \ X	20	25	30	35	40	45
10		4	8			4
20	2		4		2	
30			10	8		
40		4		10	4	

33. Найти выборочное уравнение линейной регрессии *Y* на *X* на основании корреляционной таблицы:

Y \ X	10	15	20	25	30	35
15	6	4				
25		6	8		2	
35				21	2	5
45		4		4	12	6
55					1	5

34. В таблице представлены данные о средних размерах пенсий в Кыргызстане за 2011–2015 гг.

Год	2011	2012	2013	2014	2015
Выплаты, сом	3853	4274	4508	4710	4896

Необходимо сделать прогноз о среднем размере пенсии на 2018 г.

35. Предскажите время реакции полуторамесячного ребенка по следующим данным:

Возраст (мес.)	1	2	3	4
Время реакции (с)	1,5	0,8	0,5	0,4

5.2. Образцы заданий оценочных средств

Семестр 1

5.2.1. Образец типового расчета № 1

Задание 1. Даны две матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) AB; б) A^{-1}; в) AA^{-1}

Задание 2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае ее совместности решить ее а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=7, \\ 2x+3y+z=1, \\ 3x+2y+z=6. \end{cases}$$

Задание 4. Найти любые два базисных решения системы:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+x_4=1, \\ 2x_1+x_2+2x_3-3x_4=2, \\ 5x_1+3x_2+x_3-2x_4=3. \end{cases}$$

5.2.2. Образец типового расчета № 2

Задание 1. Даны векторы: $\overline{a}=3\overline{i}+4\overline{j}+\overline{k}, \overline{b}=\overline{i}-2\overline{j}+7\overline{k}$, $\overline{c}=3\overline{i}-6\overline{j}+21\overline{k}$. Необходимо: а) проверить, будут ли коллинераны или ортогональны векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$; б) найти проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $2\bar{b} - 3\bar{c}$.

Задание 2. Найти длину вектора $\bar{b} = \bar{p} - 3\bar{q}$, если $|\bar{p}| = 4, |\bar{q}| = 1,\ \left(\angle \bar{p}\bar{q}\right) = \pi/4$.

Задание 3. Вершины пирамиды находятся в точках *A*(–7, –5, 6), $B(-2,5,-3)$, $C(3,-2,4)$, *D*(1, 2, 2). Вычислить: а) площадь грани *BCD*; б) объем пирамиды *ABCD*.

Задание 4. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: $A(3;4),\ B(2;-1),\ C(1,-7)$.

Требуется:

а) составить уравнение стороны *AB;*

б) найти длину стороны *AB*;

в) составить уравнение высоты, проведенной из вершины *B*;

г) вычислить расстояние от вершины *C* до стороны *AB;*

д) составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC*;

е) найти площадь треугольника *ABC*;

ж) вычислить угол *A* треугольника *ABC* (в радианах с точностью до двух знаков после запятой);

Сделать чертеж.

Задание 5. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

1) $x = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - y^2}$.

2) $y = 1 - 3\sqrt{x}$.

3) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 4 = 0$.

5.2.3. Образец типового расчета № 3

Задание 1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n^2 - 3n + 1}\right)$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x-\sqrt{x^2+8}\right)$. 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2+3x-5}$.

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3(2x)}{x^2\cdot arctg\,(3x)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{tg(x-5)}{\sqrt{x+4}-3}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+3x)}{e^{2x}-1}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+8}{5n^2+3n-9}$.

Задание 2. Исследовать функцию на непрерывность $y=e^{\frac{1}{x+3}}$

5.2.4. Образец типового расчета № 4

Задание 1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin(3x)}$. 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{ln(x^2-15)}{e^{x-4}-1}$.

Задание 2. Найти производные следующих функций:

1. $y=2x^5-\dfrac{4}{x^3}+3\sqrt{x}$. 2. $y=\dfrac{2arc\sin x+3^x}{4\ln x-2x^2}$.

3. $y=\ln\sin(2x+5)$. 4. $y=x^{\ln x}$.

5. $y=\left(e^x-3cosx\right)\left(5-4log_2 x\right)$.

Задание 3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции: $\begin{cases} x=\ln\left(1+2t\right), \\ y=t^2-2t. \end{cases}$

Задание 4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

Задание 5. Найти производную от неявной функции: $\ln(x+y)-arctg\,x=0$.

5.2.5. Образец типового расчета № 5

Задание 1. Вычислить следующие неопределенные интегралы:

1. $\int x\sqrt{5-x^2}dx.$ 2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}.$ 3. $\int \frac{x}{2x-1}dx.$

Задание 2. Вычислить следующие определенные интегралы:

1. $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ 2. $\int\limits_1^2 x^2 ln\,x\,dx.$ 3. $\int\limits_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}.$

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2x + 3,\ y = 3x - 1.$$

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases},\quad y = 3\quad (\,y \geq 3\,).$$

Семестр 2

5.2.6. Образец типового расчета № 6

1. Все буквы русского алфавита написаны на 33 карточках. Какова вероятность того, что наудачу взятая карточка окажется с гласной буквой?

2. Ребенок, не умеющий читать, играет с буквами разрезной азбуки: А, Г, Е, З, Л, Ь. Какова вероятность того, что, переставляя буквы наугад, он составит слово «ГАЗЕЛЬ»?

3. Две одинаковые монеты радиуса r размещены внутри круга R, в который наудачу бросается точка. Вычислить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если эти монеты не пересекаются.

4. В ящике 15 шаров. Из них 3 белые, пять – синие, семь – черные. Наудачу извлекают два шара без возвращения. Найти вероятность того, что шары одного цвета.

5. Издательство отправило газеты в два почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в каждое почтовое отделение равна 0,9. Найти вероятность того, что а) оба отделения получат газеты вовремя; б) хотя бы одно получит вовремя.

6. Разрыв электрической цепи может произойти только в результате выхода из строя элемента k_1 или одновременного выхода двух элементов k_2 и k_3, которые выходят из строя независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0,3, 0,2, 0,2. Найти вероятность разрыва цепи.

7. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки, число которых составляет соответственно 0,1; 0,3; 0,6 от общего числа осколков. При попадании в танк крупный осколок пробивает его броню с вероятностью 0,9, средний – с вероятностью 0,3 и мелкий с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что попавший в броню осколок пробьет его.

8. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту, равна 0,96. Предлагается упрощенная схема проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, не удовлетворяющих стандарту, с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что изделие, признанное стандартным при проверке, действительно удовлетворяет стандарту.

5.2.7. Образец типового расчета № 7

1. Всхожесть семян цветов оценивается вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что из 1000 посеянных семян взойдет 600?

2. Известно, что в среднем 86 % деталей, изготовляемых в цехе, являются стандартными. Случайно отобрали 1000 деталей. Найти вероятность того, что относительная частота нестандартных деталей отклонится от вероятности такой детали по модулю не более чем на 0,04.

3. В ящике лежат 10 изделий, одно из них бракованное. Из ящика вынимают изделия одно за другим до тех пор, пока не будет вынуто наугад бракованное.

а) составить закон распределения случайной величины X – числа вынутых изделий;

б) найти $F(x)$ и построить ее графически;

в) вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;

г) построить график распределения.

5.2.8. Образец типового расчета № 8

1. При каком значении параметра C функция $f(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ C/x^4, & x\ge 1 \end{cases}$ будет плотностью вероятности случайной величины X? Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

2. Случайная величина X задана законом распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \frac{2}{3}, \\ 3x^2-2x, & \frac{2}{3}<x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}.$$

а) найти функцию $f(x)$;

б) найти вероятность того, что в двух опытах величина примет значение из интервала (0; 7; 0,8);

в) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

3. На автомате изготовляются заклепки. Диаметр их головок представляет случайную величину, распределенную по нормальному закону с параметрами a = 2 мм и σ^2 = 0,01 мм^2.

а) какие размеры диаметра головок можно гарантировать с вероятностью 0,95?

б) записать функцию $f(x)$.

4. Средний срок службы мотора 4 года. Оценить вероятность того, что взятый случайно мотор прослужит более 15 лет.

5.2.9. Образец типового расчета № 9

Задание 1. Дано распределение абонентов по потребляемой мощности электроэнергии (кВт-ч)

Интервалы мощности	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
Число абонентов	3	13	70	190	290	230	130	62

а) построить гистограмму и полигон относительных частот;

б) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить ее график;

в) рассчитать моду и медиану;

г) вычислить выборочные среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициент вариации, коэффициенты асимметрии и эксцесса;

д) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины X – потребляемой мощности электроэнергии;

е) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения;

ж) предполагая, что случайная величина X распределена по нормальному закону, записать функцию распределения и функцию плотности X. Найти интервальные оценки параметров распределения X, приняв за доверительную вероятность 0,95.

5.2.10. Образец типового расчета № 10

Задание 1. Дано распределение абонентов по потребляемой мощности электроэнергии (кВт-ч)

Интервалы мощности	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
Число абонентов	3	13	70	190	290	230	130	62

Проверить, используя критерий χ^2 – гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения, приняв за уровень значимости 0,05.

Задание 2. Туристическая компания предлагает места в гостиницах. Менеджера компании интересует, насколько возрастает привлекательность гостиницы в зависимости от ее расстояния до пляжа. С этой целью по 12 гостиницам города была выяснена среднегодовая наполняемость номеров и расстояния в километрах от пляжа:

Расстояние, км	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8
Наполняемость, %	92	95	96	90	89	86	90	83	85	80	78	76

Необходимо: а) построить график исходных данных; б) полагая, что между Y и X имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии; в) определить направление и тесноту связи; г) проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0{,}05$; д) сделать прогноз о наполняемости номеров гостиницы, если она будет расположена на расстоянии 1,1 км от пляжа.

Семестр 1

5.2.11. Образец контрольной работы № 1

Задание 1. Вычислить $(AB)C+2A(BC)$,

$$\text{где } A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 7x-5y-2z=1, \\ x+2y-z=-6, \\ 5x-10y+z=16. \end{cases}$$

Задание 3. Исследовать систему уравнений: $\begin{cases} 7x-5y-2z=1, \\ x+2y-z=-6, \\ 6x-7y-z=7. \end{cases}$

Задание 4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

5.2.12. Образец контрольной работы № 2

Задание 1. В треугольнике ABC дано: $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$, точка K – середина стороны BC. Выразить вектор $\overline{AK}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Задание 2. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Найти его четвертую вершину D.

Задание 3. Найти координаты вектора $\overline{a} \times \left(2\overline{a} + \overline{b}\right)$, если $\overline{a} = \left(3;-1;-2\right)$, $\overline{b} = \left(1;2;-1\right)$.

Задание 4. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

5.2.13. Образец контрольной работы № 3

Задание 1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 2n^2 + 6n + 12}{9n^2 + 5n^3 - 8n + 4}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2 + n + 5}{2n^2 + n + 4} \right)^{3n^2+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x+5}{\ln\left(x+3\right)}$. 4. $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^2 - 6x - 27}$.

5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+16} - 4}{x^2 + 2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{tg^3\left(2x\right)}{arctg^3\left(3x\right)}$.

7. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{5^{x^2-4} - 1}{2x^2 + 3x - 2}$. 8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{ln\left(1 + x^2\right)}{e^{4x^2} - 1}$.

5.2.14. Образец контрольной работы № 4

Задание 1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}} \dfrac{ln\left(6-x^2\right)}{e^{x^2-5}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln 2x$.

Задание 2. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^{\frac{3}{5}}-\dfrac{4}{\sqrt{x^9}}+2\sqrt[7]{x}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x^2-10}$;

в) $y=arctg\sqrt{x^2+1}$; г) $\left(\cos(3x-4)+8^x\right)\left(\sin(6+7x)-x^9\right)$;

д) $y=x^{x^2}$.

Задание 3. Найти интервалы монотонности, экстремумы функции:

$$y=\frac{1}{x^2+3}.$$

5.2.15. Образец контрольной работы № 5

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int sin^3x\,cos\,x\,dx$; б) $\int x\sqrt{x+4}dx$;

в) $\int \dfrac{dx}{3+2\,sin\,x+cos\,x}$; г) $\int\left(3x+2\right)sin\,2x\,dx$;

д) $\int \dfrac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$; е) $\int \dfrac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx.$

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=(x-3)^2,\ y=\frac{4}{x}.$$

Семестр 2

5.2.16. Образец контрольной работы № 6

Задание 1. Буквы азбуки Морзе представляют собой набор “точек” и “тире”. Сколько букв может быть в азбуке Морзе, если буква не должна содержать более четырех знаков?

Задание 2. Найти число таких перестановок семи учеников, сидящих на скамейке, чтобы три определенных ученика находились рядом.

Задание 3. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1, и 4 детали завода № 2. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом № 1.

Задание 4. В первом ящике 6 шаров: 1 белый, 2 красных и 3 синих. Во втором ящике 12 шаров: 2 белых, 6 красных, 4 синих. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров нет синих?

Задание 5. В каждом из двух ящиков: 2 бракованные детали и 10 небракованных. Из первой урны одну деталь переложили во вторую. Затем из второй урны извлекли деталь. Найти вероятность того, что она небракованная.

5.2.17. Образец контрольной работы № 7

Задание 1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 5X - 2Y$, если известны: $M(X) = 3$, $M(Y) = 6$, $D(X) = 3$, $D(Y) = 4$.

Задание 2. В ящике 3 карточки с номерами от 1 до 3. Извлекли 2 карточки. X – произведение номеров извлеченных карточек. Найти: $F(x), M(X), D(X), D(3X)$.

Задание 3. Производится ряд выстрелов по мишени с вероятностью попадания 0,7 при каждом выстреле; стрельба ведется до первого попадания в мишень, но не свыше 3 выстрелов. Составить закон распределения числа произведенных выстрелов.

Задание 4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	$0,2$	p_2	$0,2$

Найти $p_2, M(X), D(X)$.

5.2.18. Образец контрольной работы № 8

Задание 1. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, а именно:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-4x}, & \text{при } x\geq 0;\\ 0, & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Найти: а) значение параметра λ; б) $M(X), D(X)$.

Задание 2. Случайная величина задана законом распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 2,\\ \dfrac{x^2-4}{a}, & 2<x\leq 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}.$$

Требуется: 1) найти параметр a; 2) найти функцию $f(x)$; 3) вычислить вероятность того, что величина примет значение из интервала (2,5; 3, 4) найти математическое ожидание и дисперсию.

5.2.19. Образец контрольной работы № 9

Задание 1. Выборочное исследование длительности горения ламп дало следующие результаты:

Интервалы	0-400	400-800	800-1200	1200-1600	1600-2000	2000-2400	2400-2800
Частота	121	95	76	56	45	35	21

Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, коэффициент вариации, моду и медиану.

Задание 2. В итоге 5 измерений получены следующие положительные отклонения от номинального размера у партии деталей (в мм): 17, 8, 23, 9, 23. Найти несмещенные точечные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии. Вычислить моду и медиану.

Задание 3. Телефонная компания желает оценить среднее время междугородных переговоров в течение выходных, когда действует льготный тариф. Случайная выборка из 50 звонков дала среднюю $\overline{x}=14,5$ мин со средним квадратическим отклонением $s=5,6$ мин. Постройте 95 % доверительный интервал для средней продолжительности переговоров в выходные дни.

5.2.20. Образец контрольной работы № 10

Задание 1. Используя критерий χ^2, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности *X* с эмпирическим распределением выборки:

Эмпирическая частота n_i	58	96	239	328	147	132
Теоретическая частота n_i'	43	120	245	290	200	102

Задание 2. Найти выборочное уравнение линейной регрессии *Y* на *X* и выборочный коэффициент корреляции. Сделать вывод о силе связи.

x	1	2	3	4	5
y	$3,2$	$4,2$	$2,7$	$0,7$	$1,2$

5.2.21. Образец теста: «Векторная алгебра»

Задание № 1			
Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, образующие левую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $\left\|\overline{a}\right\| = 2, \left\|\overline{b}\right\| = 5, \left\|\overline{c}\right\| = 4$, вычислить $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	0	2)	Нет верного ответа
3)	40	4)	–40
Задание № 2			
Вычислить модуль вектора $\overline{a} = \{3; -4; 12\}$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	10	2)	11
3)	12	4)	13
Задание № 3			
Найти проекцию вектора $\overline{a} = -3\overline{i} + 8\overline{j}$ на ось *Oy*.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	0	2)	–3
3)	8	4)	5
Задание № 4			
Вычислить скалярное произведение векторов $\overline{a} = -2\overline{i} + \overline{j} - 8\overline{k}$, $\overline{b} = -4\overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}$			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	-8	2)	18
3)	30	4)	384
Задание № 5			
Найти $\overline{a} \times \overline{b}$, если $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = \overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}$			

Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	$5\bar{i}-10\bar{j}+5\bar{k}$	2)	$5\bar{i}+10\bar{j}+5\bar{k}$
3)	5	4)	$2\bar{i}-9\bar{j}+5\bar{k}$
Задание № 6			
При каком значении m векторы $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{b}=m\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k}$ взаимно перпендикулярны?			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	0	2)	–7
3)	2	4)	–6
Задание № 7			
Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2;3;1)$, $A(4;1;-2)$, $A(6;3;7)$, $A(-4;-3;7)$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	10	2)	11
3)	12	4)	13
Задание № 8			
Даны точки: $A(-4;-5;-3)$ и $C(5;7;-6)$. Найти координаты вектора $\overline{AC}$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	(–2; 12; 8)	2)	(9; 12; –3)
3)	(1; 2; –9)	4)	(–20; –35; 18)
Задание №9			
Даны векторы: $\bar{a}(0;1;0)$, $\bar{b}(2;0;1)$, $\bar{c}(3;1;-5)$. Вычислить $\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	1	2)	2
3)	3	4)	4

Задание №10			
Даны векторы: $\overline{b} = 3\overline{i} - \overline{j} + 5\overline{k}$, $\overline{c} = 4\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}$. Найти координаты вектора $2\overline{b} - \overline{c}$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	(2, –1; 6)	2)	(5, –1; 6)
3)	(2, –3; 6)	4)	(5, –3; 6)

5.2.22. Образец теста: «Пределы последовательностей и функций»

Задание № 1			
Найти предел $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	–4	2)	–2
3)	$\dfrac{1}{4}$	4)	$-\dfrac{1}{4}$
Задание № 2			
Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} (1+3tgx)^{ctgx}$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	∞	2)	1
3)	$e^{\frac{1}{3}}$	4)	e^3
Задание № 3			
Найти предел $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+2}\right)^2$.			

Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	$-\frac{1}{7}$	2)	$-\frac{1}{2}$
3)	$\frac{2}{5}$	4)	$\frac{4}{25}$
Задание № 4			
Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-a}-\sqrt{x}\right)$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	0	2)	–1
3)	a	4)	1
Задание № 5			
Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	$5\bar{i}-10\bar{j}+5\bar{k}$	2)	$5\bar{i}+10\bar{j}+5\bar{k}$
3)	5	4)	$2\bar{i}-9\bar{j}+5\bar{k}$
Задание № 6			
Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	$\frac{1}{2}$	2)	$\sqrt{2}$
3)	∞	4)	$\frac{4}{3}$

5.2.23. Образец теста: «Дифференцирование функций одной переменной»

Задание № 1			
Найти производную функции: $y = \dfrac{3x + \sin x}{\cos x - 10}$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	$y' = -\dfrac{3 + \cos x}{\sin x}$	2)	$y' = \dfrac{3 - \cos x}{\sin^3 x}$
3)	$y' = \dfrac{3x\sin x - 7\cos x - 29}{(\cos x - 10)^2}$	4)	$y' = \dfrac{\cos 2x - 3x\sin x - 7\cos x - 30}{(\cos x - 10)^2}$
Задание № 2			
Найти производную функции: $y = \ln^4(2x+1)$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	$y' = 8\ln^3(2x+1)$	2)	$y' = \dfrac{8\ln^3(2x+1)}{2x+1}$
3)	$y' = \dfrac{8}{(2x+1)^3}$	4)	$y' = 8\ln(2x+1)$
Задание № 3			
Найти производную функции: $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	$y' = \left(2xye^y - 3x^2\right) y \dfrac{1}{x^2 ye^y}$	2)	$y' = \left(2xye^y - 3x^2 y\right) y \dfrac{1}{1 - x^2 ye^y}$
3)	$y' = \left(2xye^y - 3x^2 y\right) \dfrac{1}{1 - x^2 ye^y}$	4)	$y' = \left(2xye^y - 3x^2\right) y \dfrac{1}{1 - xye^y}$

Задание № 4	
Найти производную функции: $y=\left(2tg3x+1\right)^{\sin 3x}$.	
Выберите один из 4 вариантов ответа:	
1)	$y=\left(2tg3x+1\right)^{\sin 3x}\cos 3x$
2)	$y'=\left(3\cos 3x\ln\left(2tg3x+1\right)+\dfrac{6\sin 3x\sec^2 3x}{2tg3x+1}\right)\cdot\left(2tg3x+1\right)^{\sin 3x}$
3)	$y'=\left(2tg3x+1\right)^{\sin 3x}\cdot\ln\left(2tg3x+1\right)$
4)	$y'=\left(2tg3x+1\right)^{\sin 3x-1}\cdot\cos 3x\cdot 3$

Задание № 5			
Найти производную функции: $y=2x^4-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+1$.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	$y'=8x^3-\sqrt[3]{x^2}$	2)	$y'=8x^3-\sqrt[3]{x^4}$
3)	$y'=8x^3+\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$	4)	$y'=8x^3-\sqrt[3]{x^2}+1$

Задание № 6
Найти производную функции: $y=\left(x+x^3\right)\cdot arctgx$.
Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)	$y' = \left(1+3x^2\right) arctgx + x$	2)	$y' = \dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$
3)	$y' = 3x^2 arctgx + x$	4)	$y' = \left(1+3x^2\right)\left(1+x^2\right)$

Задание № 7

$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$. Найти y''_x.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)	$y''_x = \dfrac{10t}{3t^2 - 1}$	2)	$y''_x = \dfrac{10t}{3t^2 + t}$
3)	$y''_x = \dfrac{10t}{3t^2 + 3}$	4)	$y''_x = \dfrac{10t}{3t^2 - 3}$

Задание № 8

Найти производную функции: $y = 7^{2x} + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x^2}}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)	$y' = 7^x \ln 7 \cdot 2 + \dfrac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}}$	2)	$y' = x \cdot 7^{x-1} + \dfrac{2}{5} x^{\frac{1}{5}}$
3)	$y' = 7^{2x} \ln 7 \cdot 2 - \dfrac{8}{5x\sqrt[5]{x^2}}$	4)	$y' = 7^x \ln 7 + x \cdot 7^{x-1} + \dfrac{4}{x\sqrt[3]{x^2}}$

5.2.24. Образец теста: «Случайные события»

Задание № 1			
Сколько существует трехзначных чисел, у которых все цифры четные?			
Запишите число:			
1)			
Задание № 2			
Студенты второго курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается по три предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день?			
Запишите число:			
1)			
Задание № 3			
Уставший пассажир набирает четырехзначный код камеры хранения на вокзале. Какова вероятность того, что пассажир откроет камеру, если он помнит лишь, что его код не содержит цифр 1, 2, 3?			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	0,3	2)	$\frac{1}{7^4}$
3)	$\frac{1}{A_7^3}$	4)	$\frac{4}{3!}$
Задание № 4			
На прямолинейном участке газопровода длиной 80 км произошел разрыв. Какова вероятность того, что разрыв удален от обоих концов участка на расстояние, большее 30 км?			
Запишите число:			
1)			

Задание № 5			
Автомобиль снабжен двумя противоугонными приспособлениями – механическим и электрическим. Механическое срабатывает с вероятностью 0,9, а электрическое – с вероятностью 0,8. Какова вероятность, что автомобиль не угонят?			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	0,98	2)	0,72
3)	1,6	4)	0,85

Задание № 6			
Вероятность того, что Ибрагим сдаст зачет по теории вероятностей, равна 0,3. Вероятность, что Бектур сдаст зачет по теории вероятностей, равна 0,6. Вероятность, что оба студента станут отличниками, равна			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	0,18	2)	0,018
3)	0,9	4)	0,09

Задание № 7	
Два снайпера делают по одному выстрелу по мишени. Известно, что из десяти выстрелов первый попадает шесть раз, второй – девять. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним из выстрелов.	
Запишите число:	
1)	

Задание № 8	
Вероятность того, что будет продано изобретение мастера, равна 0,8, что изобретение его ученика – 0,6. Какова вероятность того, что к концу дня будет продано хотя бы одно изобретение.	
Запишите число:	
1)	

Задание № 9			
Медвежонок Вини-Пух каждое утро ходит в гости к одному из своих друзей: поросенку Пятачку, ослику Иа или Кролику, которые угощают его медом с вероятностью 0,8, 0,6 и 0,4 соответственно. Какова вероятность того, что в ближайшую пятницу Вини-Пух попробует мед, если решение о том, к кому пойти в гости, медвежонок принимает случайным образом?			
Запишите число:			
1)			

Задание № 10			
Вероятность того, что расход электроэнергии в течение одних суток не превысит установленной нормы, равна $p = 0{,}75$. Найти вероятность того, что в ближайшие 4 суток расход электроэнергии в течение 2 суток не превысит нормы.			
Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	27/128	2)	128/27
3)	9/256	4)	27/256

5.2.25. Образец теста: «Распределения. Выборки»

Задание № 1			
Следующие выражения являются свойствами эмпирической функции распределения $F^*(x)$.			
Выберите номер неправильного ответа:			
1)	$0 \le F^*(x) \le 1$	2)	$F^*(x)$ – невозрастающая функция
3)	$F^*(x)$ – неубывающая функция	4)	$F^*(-\infty) = 0$

Задание № 2

x_i	-2	1	2
n_i	1	5	4

. Найти $\overline{x_в}$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	1,1	2)	1,2
3)	1,3	4)	1,4

Задание № 3

x_i	–2	1	2
n_i	1	5	4

. Найти $D_в$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	1,16	2)	1,21
3)	1,29	4)	1,96

Задание № 4

Рассчитать моду распределения:

$(x_i; x_{i+1})$	120 – 140	140 – 160	160 – 180	180 – 200	200 – 220	220 – 240
n_i	7	25	28	30	8	2

Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	181,67	2)	184,33
3)	194,67	4)	198,33

Задание № 5

Оценка называется … , если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется равенство: $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\Theta^* - \Theta\right| < \varepsilon\right) = 1$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:			
1)	смещенной	2)	несмещенной
3)	несостоятельной	4)	состоятельной

Задание № 6

Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания *a,* нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если: $\sigma = 3$, $\overline{x_B} = 108{,}9$, $n = 36$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)	(106,94; 110,86)	2)	(107,92; 109,88)
3)	(108,02; 109,78)	4)	(107,94; 109,86)

Задание № 7

Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания *a,* нормально распределенного признака *X* генеральной совокупности, если: $s=0{,}8$, $\overline{x_B}=108{,}9$, $n=16$.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)	(108,486; 109,314)	2)	(108,482; 109,318)
3)	(108,474; 109,326)	4)	(108,478; 109,322)

Задание № 8

По данным выборки объема $n=25$ из генеральной совокупности найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=0{,}6$ нормально распределенного количественного признака. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение с надежностью 0,95.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)	(0,404; 0,796)	2)	(0,402; 0,798)
3)	(0,406; 0,794)	4)	(0,408; 0,792)

Задание № 9

Найти доверительный интервал для оценки неизвестной вероятности *p* биномиального распределения с надежностью 0,95, если в 60 испытаниях событие появилось 24 раза

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)	(0,275; 0,525)	2)	(0,275; 0,526)
3)	(0,285; 0,525)	4)	(0,285; 0,526)

Задание № 10

Для выборки

x_i	0	3	5	6	8	9	11	12
n_i	1	4	6	4	7	4	3	1

составить распределение равноотстоящих вариант.

Выберите один из 4 вариантов ответа:

1)

x_i	1,5	4,5	7,5	10,5
n_i	5	10	11	4

2)

x_i	1,5	4,5	7,5	10,5
n_i	3	10	11	6

3)

x_i	1,5	4,5	7,5	10,5
n_i	5	8	11	6

4)

x_i	1,5	4,5	7,5	10,5
n_i	3	8	11	4

5.2.26. Образцы билетов к экзаменам

1 семестр

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс 1 Семестр 1 Направление Менеджмент
Дисциплина Математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Определение системы линейных алгебраических уравнений и ее решения; совместность, несовместность, определенность и неопределенность.
2. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.
3. Вычислить $(AB)C+A(BC)$, где

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 5 & -2\\ -3 & 3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 7x-5y-2z=1, \\ x+2y-z=-6, \\ 5x-10y+z=16. \end{cases}$$

5. Даны 3 вершины параллелограмма: $A(-3;\ -2)$, $B(-1;\ 3)$, $C(5;\ 1)$. Найти координаты вершины D.

6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(2; 1) под углом 45° к прямой: $\begin{cases} x=t+1, \\ y=-\dfrac{2}{3}t-2. \end{cases}$

7. Привести к каноническому виду и построить график:

$$x^2-4y^2-2x-16y-19=0 .$$

8. Вычислить пределы: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x-3x}{x+tg\,x^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{2x}$.

9. Найти производные функций:

$y=arctg^3 2x\cdot tg^3 2x,\quad y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

10. Найти интегралы: $\displaystyle\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt{5x}+\frac{1}{8x}\right)dx$, $\displaystyle\int_1^2\frac{x^2}{2x^3-1}dx$, $\displaystyle\int_1^5\frac{\sqrt{2x-1}}{1+\sqrt{2x-1}}dx$.

2 семестр

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс 1 Семестр 2 Направление Менеджмент
Дисциплина Математика

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. События. Типы событий. Алгебра событий. Диаграммы Эйлера–Венна.
2. Понятие о статистической гипотезе. Критерий проверки. Критическая область.
3. Сколькими способами можно разбить 9 футбольных команд на три группы по 3 команды в каждой?
4. В каждой из двух урн 2 белых, 3 черных и 5 красных шаров. Из обеих урн наудачу извлекаются по одному шару. Найти вероятность того, что они не одного цвета.
5. Плотность распределения случайной величины X: $f(x) = k \cdot x \cdot exp(-x^2)$. Найти 1) k, 2) $P(0<X<1)$.
6.

X	–5	–2	1	4
p	0,3	p_2	0,3	0,1

. Найти 1) p_2, 2) $P(|X|<2)$, 3) $F(x)$, 4) $D(X)$.

7. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Найти вероятность того, что в 4 испытаниях 2 раза X окажется в интервале (0,5; 1).
8. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	1	5	9	13
n_i	3	4	2	1

. Оценить с надежностью 0,99 математическое ожидание нормально распределенного признака по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

9. Составить уравнение прямой линии регрессии для выборки из задания 8.

5.2.27. Образец выполнения типового расчета № 1

Задание 1. Даны две матрицы: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

и $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) *AB;* б) A^{-1}; в) AA^{-1}.

Решение.

а) $AB=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot 2+1\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 3\cdot 4+1\cdot(-2)+(-1)\cdot 0 & 3\cdot 5+1\cdot(-4)+(-1)\cdot 2 \\ 2\cdot 2+4\cdot 1+1\cdot 3 & 2\cdot 4+4\cdot(-2)+1\cdot 0 & 2\cdot 5+4\cdot(-4)+1\cdot 2 \\ 1\cdot 2+0\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 1\cdot 4+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 5+0\cdot(-4)+(-1)\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 11 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

б) Определитель матрицы A равен:

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-12+1-(-4)-(-2)=-5\neq 0,$$

следовательно, матрица A невырожденная.

Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-4,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-(-1)=1,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-(-2-1)=3,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3-(-1)=-2,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-4,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-(0-1)=1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=1-(-4)=5,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(3-(-2))=-5,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12-2=10.$$

Получим обратную матрицу:

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4 & 1 & 5\\ 3 & -2 & -5\\ -4 & 1 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,8 & -0,2 & -1\\ -0,6 & 0,4 & 1\\ 0,8 & -0,2 & -2\end{pmatrix}.$$

в) $$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,8 & -0,2 & -1\\ -0,6 & 0,4 & 1\\ 0,8 & -0,2 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 1 & 5\\ 3 & -2 & -5\\ -4 & 1 & 10\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 1 & 5\\ 3 & -2 & -5\\ -4 & 1 & 10\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -12+3+4 & 3-2-1 & 15-5-10 \\ -8+12-4 & 2-8+1 & 10-20+10 \\ -4+0+4 & 1+0-1 & 5+0-10 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение. Разложим определитель, например, по третьей строке, так как в ней один из элементов равен нулю, получим:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=3A_{31}+3A_{32}+0A_{33}+2A_{34}=$$

$$=3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}+3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}+2(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=3(6+18-20-3)-3(6+6+10-18-20-1)-2(12+12-6-4)=$$

$$=3-3(-17)-2(14)=3+51-28=26.$$

Ответ: 26.

Задание 3. Решить систему уравнений: а) с помощью обратной матрицы; б) методом Крамера; в) методом Гаусса:

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=-6, \\ x_1-2x_2-x_3=5, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=13. \end{cases}$$

Решение.

а) Обозначим:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & 4 & -2\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-6\\ 5\\ 13\end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме данная система будет иметь вид: $AX=B$. Решение данного матричного уравнения находится по формуле: $X=A^{-1}B$.

Находим определитель матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}=-8-3-8+2=-17.$$

Так как $\det A\neq 0$, то существует обратная матрица, которая по алгоритму, изложенному в §3, имеет вид:

$$A^{-1}=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}8 & 2 & -1\\ -1 & 4 & -2\\ 10 & 11 & 3\end{pmatrix}.$$

Подставляя значения в формулу $X=A^{-1}B$, получим:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}8 & 2 & -1\\ -1 & 4 & -2\\ 10 & 11 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\ 5\\ 13\end{pmatrix}=-\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-48+10-13\\ 6+20-26\\ -60+55+39\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -2\end{pmatrix},$$

т. е. решение системы $(3;0;-2)$.

б) Определитель системы $\det A=-17\neq 0$, следовательно, существует единственное решение системы.

Вычислим вспомогательные определители $\Delta_{x_1},\Delta_{x_2},\Delta_{x_3}$, полученные из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}-6 & 1 & 0\\ 5 & -2 & -1\\ 13 & 4 & -2\end{vmatrix}=-51;\ \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 0\\ 1 & 5 & -1\\ 3 & 13 & -2\end{vmatrix}=0;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 13 \end{vmatrix} = 34.$$

По формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-51}{-17} = 3,\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-17} = 0,\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{34}{-17} = -2,$$

т. е. решение системы $(3;0;-2)$.

в) Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 13 \end{array}\right).$$

Элемент $a_{11} = -2 \neq 0$ принимаем за разрешающий. Преобразование проведем методом Гаусса, используя правило прямоугольников:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 13 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 4 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 34 & -68 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \div 34 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

На основе последней матрицы составим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_3 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -6, \\ 3x_2 + 2\cdot(-2) = -4, \\ x_3 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -2, \end{cases}$$

т. е. решение системы $(3;0;-2)$.

Ответ: $(3;0;-2)$.

Задание 4. Найти любые два базисных решения системы:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 = -1, \\ 5x_1 - 4x_3 - x_4 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Составив расширенную матрицу системы, проводим преобразования Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{7} & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -4 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 20 & -8 & -12 & 40 \\ 0 & 10 & -4 & -6 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \div 4 \Rightarrow \\ \div 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{5} & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right)$$

Ранг полученной системы равен двум, следовательно, число базисных переменных равно 2, число свободных переменных определим по формуле $k = n - r = 4 - 2 = 2$. Определим число возможных базисов по формуле $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, получим $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$. Базисными переменными могут быть следующие группы: $x_1, x_2;\ x_1, x_3;\ x_1, x_4;\ x_2, x_3;\ x_2, x_4;\ x_3, x_4$.

Выясним, образуют ли переменные x_1, x_2 базис. Так как базисный минор, т. е. определитель матрицы из коэффициентов при этих переменных $\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 35 \neq 0$, то x_1, x_2 образуют базис, свободные переменные x_3, x_4 приравняем нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 = -1, \\ \qquad 5x_2 = 10, \end{cases}$$

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, т. е. первое базисное решение будет $(1, 2, 0, 0)$.

Рассмотрим следующую группу переменных x_1, x_3. Так как базисный минор $\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, то x_1, x_3 образуют базис, тогда свободные переменные x_1, x_3. Приравнивая свободные переменные нулю, получим систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_3 = -1, \\ \quad\quad -2x_3 = 10, \end{cases}$$

откуда $x_1 = -3$, $x_3 = -5$, т. е. второе базисное решение будет $(-3, 0, -5, 0)$.

Ответ: $(1, 2, 0, 0)$, $(-3, 0, -5, 0)$.

5.2.28. Образец выполнения типового расчета № 2

Задание 1. Даны векторы:

$\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{j} + 4\bar{k}$, $\bar{c} = 5\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$. Необходимо:

а) проверить, будут ли коллинераны или ортогональны векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$;

б) найти проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $2\bar{b} + 3\bar{c}$.

Решение.

а) Проверим условие коллинеарности: $\bar{a} \parallel \bar{c} \Leftrightarrow \frac{a_x}{c_x} = \frac{a_y}{c_y} = \frac{a_z}{c_z}$.

Так как $\frac{2}{5} \neq \frac{-3}{2} \neq \frac{1}{-3}$, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ – неколлинеарны.

Так как условие перпендикулярности двух векторов $\bar{a} \cdot \bar{c} = 0$, то находим скалярное произведение этих векторов. Имеем:

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = 10 - 6 - 3 = 1.$$

Следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ – неортогональны.

б) Используем формулу: $np_{2\bar{b}+3\bar{c}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a}\cdot\left(2\bar{b}+3\bar{c}\right)}{\left|2\bar{b}+3\bar{c}\right|}$. Решение проведем по действиям: во-первых, находим координаты вектора $2\bar{b}+3\bar{c}$, получим:

$$2\bar{b}+3\bar{c} = 2(0;1;4)+3(5;2;-3) = (0;2;8)+(15;6;-9) = (15;8;-1).$$

Далее

$$\bar{a}\left(2\bar{b}+3\bar{c}\right) = (2;-3;1)\cdot(15;8;-1) = 30-24-1 = 5,$$

$$\left|2\bar{b}+3\bar{c}\right| = \sqrt{15^2+8^2+(-1)^2} = \sqrt{290}.$$

Следовательно, $np_{2\bar{b}+3\bar{c}}\bar{a} = \dfrac{5}{\sqrt{290}} = \dfrac{5\sqrt{290}}{290} = \dfrac{\sqrt{290}}{58}$.

Задание 2. Найти длину вектора $\bar{a} = \bar{p}+2\bar{q}$, если $|\bar{p}|=1, |\bar{q}|=2, (\angle\bar{p}\bar{q}) = \pi/6$.

Решение.

Найдём скалярный квадрат вектора $\bar{a}$:

$$\bar{a}^2 = \left(\bar{p}+2\bar{q}\right)\cdot\left(\bar{p}+2\bar{q}\right)$$

Раскроем скобки, пользуясь свойствами скалярного произведения:

$$\left(\bar{p}+2\bar{q}\right)\cdot\left(\bar{p}+2\bar{q}\right) = \bar{p}^2+2\bar{p}\cdot\bar{q}+2\bar{q}\cdot\bar{p}+4\bar{q}^2 = \bar{p}^2+4\bar{p}\cdot\bar{q}+4\bar{q}^2 =$$

$$= |\bar{p}|^2+4|\bar{p}|\cdot|\bar{q}|\cdot\cos\left(\bar{p}\hat{\ }\bar{q}\right)+4|\bar{q}|^2 = 1+4\cdot1\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{6}+4\cdot4 =$$

$$= 1+8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+16 = 17+4\sqrt{3}.$$

Находим длину вектора $\bar{a}$: $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{17+4\sqrt{3}}$.

Задание 3. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3;4;5)$, $B(1;2;1)$, $C\left(-2;-3;6\right)$, $D(3;-6;-3)$.

Вычислить: а) площадь грани ACD; б) объем пирамиды $ABCD$.

Решение.

а) Найдем координаты векторов:

$$\overline{AC} = (-2-3;-3-4;6-5) = (-5;-7;1),$$

$$\overline{AD} = (3-3;-6-4;-3-5) = (0;-10;-8).$$

Вычислим их векторное произведение:

$$\overline{AC} \times \overline{AD} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -5 & -7 & 1 \\ 0 & -10 & -8 \end{vmatrix} = 66\overline{i} - 40\overline{j} + 50\overline{k}.$$

Модуль векторного произведения равен:

$$\left|\overline{AC} \times \overline{AD}\right| = \sqrt{66^2 + (-40)^2 + 50^2} = \sqrt{8456} = 2\sqrt{2114},$$

Тогда,

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}\left|\overline{AC} \times \overline{AD}\right| = \sqrt{2114} \text{ (кв. ед.)}$$

б) Так как координаты векторов:

$$\overline{AB} = (1-3;2-4;1-5) = (-2;-2;-4),$$

$$\overline{AC} = (-2-3;-3-4;6-5) = (-5;-7;1),$$

$$\overline{AD} = (3-3;-6-4;-3-5) = (0;-10;-8), \text{ то}$$

$$V пир. = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -5 & -7 & 1 \\ 0 & -10 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 252 = 42 \text{ (куб. ед.)}$$

Задание 4. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(6;-6)$, $B(2;-3)$, $C(8,5)$.

Требуется:

а) составить уравнение стороны *AB;*

б) найти длину стороны *AB*;

в) составить уравнение высоты, проведенной из вершины *B*;

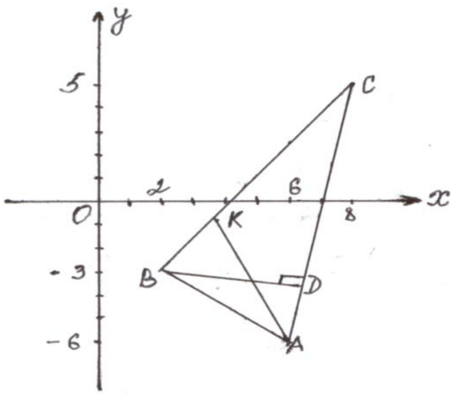
г) вычислить расстояние от вершины *C* до стороны *AB;*

д) составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC*;

е) найти площадь треугольника *ABC*;

ж) вычислить угол A треугольника ABC (в радианах с точностью до двух знаков после запятой).

Сделать чертеж.



Решение.

а) Для составления уравнения стороны AB используем формулу $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$, где $A(6;\,-6)$, $B(2;\,-3)$: $\dfrac{y-(-6)}{-3-(-6)}=\dfrac{x-6}{2-6}$ или $\dfrac{y+6}{3}=\dfrac{x-6}{-4}$ или $-4y-24=3x-18$ или $3x+4y+6=0$.

б) Для нахождения длины AB используем формулу: $d=\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$:

$$d=\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(2-6)^2+(-3-(-6))^2}=\sqrt{16+9}=5 \text{ (ед. дл.)}.$$

в) Для составления уравнения высоты BD используем условие перпендикулярности прямых BD и AC, т. е. формулу $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$: $k_{BD}k_{AC}=-1$ Найдем k_{AC} , используя формулу $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. $k_{AC}=\dfrac{5-(-6)}{8-6}=\dfrac{11}{2}$; $k_{BD}=-\dfrac{1}{11/2}=-\dfrac{2}{11}$. Составим уравнение высоты BD по формуле $y-y_0=k(x-x_0)$, зная, что

$k_{BD} = -\dfrac{2}{11}$ и что она проходит через точку B(2; –3). Получим: $y-(-3) = -\dfrac{2}{11}(x-2)$ или $11y+33=-2x+4$. Следовательно, уравнение прямой имеет вид: $2x+11y+29=0$.

г) Расстояние от вершины C(8;5) до стороны AB, уравнение которой было найдено в п. 1: $3x+4y+6=0$, найдем по формуле: $d = \dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Получим:

$$d = \frac{|3\cdot 8+4\cdot 5+6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{50}{5} = 10 \text{ (ед. дл.)}.$$

д) Для составления уравнения прямой, проходящей через точку $A(6;-6)$ параллельно прямой BC, используем условие параллельности двух прямых $k_1 = k_2$. Найдем угловой коэффициент прямой BC по формуле $k_{BC} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$:

$$k_{BC} = \frac{5-(-3)}{8-2} = \frac{4}{3}. \text{ Тогда } k = k_{BC} = \frac{4}{3}.$$

Уравнение искомой прямой найдем по формуле $y-y_0 = k(x-x_0)$: $y-(-6) = \dfrac{4}{3}(x-6)$ или $3y+18=4x-24$ или $4x-3y-42=0$.

е) Площадь треугольника ABC найдем по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{matrix} \right\|:$$

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 2-6 & -3-(-6) \\ 8-6 & 5-(-6) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} -4 & 3 \\ 2 & 11 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}|-44-6| = 25 \text{ (кв. ед).}$$

ж) Для вычисления угла A треугольника ABC используем формулу $tg\varphi = \dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$. Найдем сначала k_{AB}, зная уравнение AB:

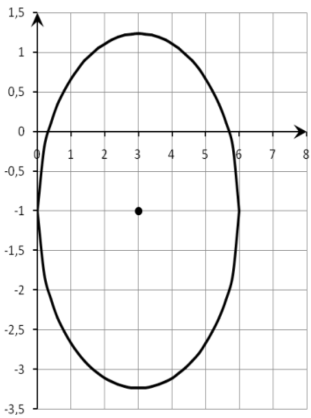
$3x+4y+6=0$. Преобразуем это уравнение к виду $y=kx+b$: $4y=-3x-6$ или $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$. Отсюда $k_{AB}=-\frac{3}{4}$. Угловой коэффициент прямой AC был найден в п. 3: $k_{AC}=\frac{11}{2}$. Заметим, что $k_1=k_{AC}$, $k_2=k_{AB}$. Следовательно, $tgA=\dfrac{-\frac{3}{4}-\frac{11}{2}}{1+(-\frac{3}{4})*\frac{11}{2}}=2$ или $A=arctg2\approx 1{,}11$ *рад.*

Задание 5. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Изобразить эти кривые на чертеже.

а) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$,

б) $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$,

в) $y=-\frac{3}{4}\sqrt{16+x^2}$.



Решение.

а) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$. Преобразуем данное уравнение кривой.

Так как

$$5x^2+9y^2-30x+18y+9=5(x^2-6x)+9(y^2+2y)+9=$$
$$=5(x^2-2\cdot 3x+3^2-3^2)++9(y^2+2\cdot 1y+1-1)+9=$$
$$=5(x-3)^2-45+9(y+1)^2-9+9=0,$$

то уравнение можно написать в виде:

$$5(x-3)^2+9(y+1)^2-45=0$$

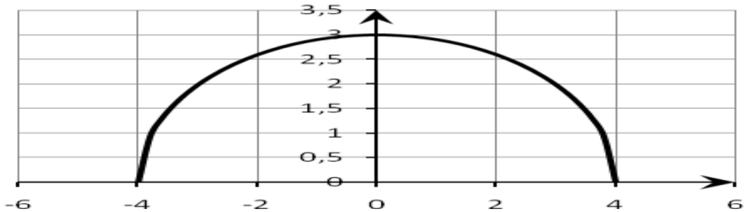
или

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1.$$

Получили каноническое уравнение эллипса, его центр симметрии находится в точке $(3;-1)$; полуоси: $a=3$, $b=\sqrt{5}$.

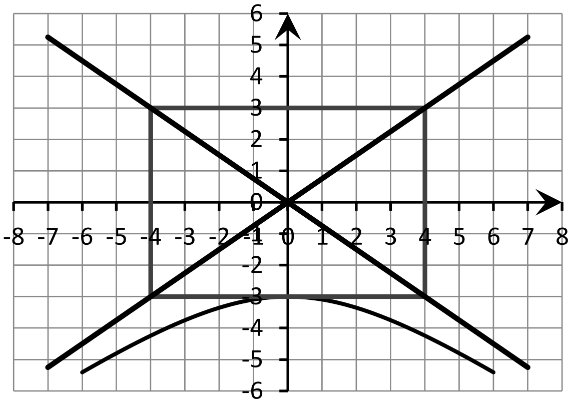
б) $y=\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$. Возведем обе стороны уравнения в квадрат. Получим:

$$y^2=\frac{9}{16}(16-x^2)$$



или $y^2=9-\dfrac{9}{16}x^2$, $\dfrac{9}{16}x^2+y^2=9$, $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ – каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат и полуосями, равными $a=4$, $b=3$. Так как по условию в уравнении перед радикалом стоит знак «+», то исходное уравнение определяет часть эллипса, расположенную выше оси *Ox*.

в) $y=-\frac{3}{4}\sqrt{16+x^2}$. Возведем обе стороны уравнения в квадрат. Получим: $y^2=\frac{9}{16}(16+x^2)$ или $y^2=9+\frac{9}{16}x^2$, $-\frac{9}{16}x^2+y^2=9$, $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ – каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат и полуосями, равными $a=4,\ b=3$. Так как по условию в уравнении перед радикалом стоит знак «–», то исходное уравнение определяет часть гиперболы, расположенной ниже оси *Ox*.



5.2.29. Образец выполнения типового расчета № 3

Задание 1. Вычислить пределы, не применяя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x+5}{\ln(x+3)}$.

4. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}$.

6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg^3(2x)}{arctg^3(3x)}$.

7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(1+x^2\right)}{e^{4x^2}-1}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}$.

Решение.

1)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)\left(\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}\right)}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(9n+2)-(4n-1)}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{\sqrt{9n+2}}{n}+\frac{\sqrt{4n-1}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{9n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{4n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{9}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}}=\frac{5+\frac{3}{\infty}}{\sqrt{\frac{9}{\infty}+\frac{2}{\infty}}+\sqrt{\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}}}=\frac{5}{0}=\infty.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}-1\right)^{3n^2+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{(2n^2+n+4)\cdot\frac{\left(3n^2+1\right)}{2n^2+n+4}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+n+4}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

3) $$\lim_{x\to -2}\frac{2x+5}{ln\left(x+3\right)}=\frac{2\cdot(-2)+5}{ln\left(-2+3\right)}=\frac{1}{ln1}=\frac{1}{0}=\infty.$$

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$=\left|\text{Разделим числитель и знаменатель на }(x+3)\right|:$

$$\begin{array}{r|l} x^3+5x^2+3x-9 & x+3 \\ \underline{x^3+3x^2} \qquad\qquad & \overline{x^2+2x-3} \\ 2x^2+3x \qquad & \\ \underline{2x^2+6x} \qquad & \\ -3x-9 & \\ \underline{-3x-9} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2-6x-27 & x+3 \\ \underline{x^2+3x} \qquad\quad & \overline{x-9} \\ -9x-27 & \\ \underline{-9x-27} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2+2x-3)}{(x+3)(x-9)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x-9}=\frac{0}{-12}=0.$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16})^2-4^2}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+16-16}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+2)(\sqrt{x+16}+4)}=\frac{1}{(0+2)(\sqrt{0+16}+4)}=\frac{1}{2\cdot(4+4)}=\frac{1}{16}$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^3(2x)}{arctg^3(3x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{tg(2x)}{2x}\right)^3\cdot(2x)^3}{\left(\dfrac{arctg(3x)}{3x}\right)^3\cdot(3x)^3}.$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot(2x)^3}{1\cdot(3x)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^3}{27x^3}=\frac{8}{27}$$

7) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\dfrac{5^{x^2-4}-1}{x^2-4}\cdot\left(x^2-4\right)}{2x^2+3x-2}=$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{ln5\left(x^2-4\right)}{2x^2+3x-2}=ln5\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=$$

$$=ln5\lim_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(2x-1)}=ln5\lim_{x\to-2}\frac{x-2}{2x-1}=$$

$$=ln5\frac{-2-2}{2\cdot(-2)-1}=\frac{4}{5}ln5.$$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{4x^2}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\cdot x^2}{\dfrac{e^{4x^2}-1}{4x^2}\cdot 4x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1\cdot x^2}{1\cdot 4x^2}=\dfrac{1}{4}.$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2n^3}{n^3}-\dfrac{2n^2}{n^3}+\dfrac{6n}{n^3}+\dfrac{12}{n^3}}{\dfrac{9n^2}{n^3}+\dfrac{5n^3}{n^3}-\dfrac{8n}{n^3}+\dfrac{4}{n^3}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{2}{n}+\dfrac{6}{n^2}+\dfrac{12}{n^3}}{\dfrac{9}{n}+5-\dfrac{8}{n^2}+\dfrac{4}{n^3}}=\frac{2-\dfrac{2}{\infty}+\dfrac{6}{\infty}+\dfrac{12}{\infty}}{\dfrac{9}{\infty}+5-\dfrac{8}{\infty}+\dfrac{4}{\infty}}=\frac{2-0+0+0}{0+5-0+0}=\frac{2}{5}.$$

Задание 2. Исследовать функцию $y=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$ на непрерывность.

Решение.

Так как знаменатель дроби $\dfrac{1}{x-2}$ равен нулю при $x=2$, то функция терпит разрыв при $x=2$. Установим тип этой точки разрыва – для этого найдем предел слева и справа в этой точке.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{2}{3+5^{\frac{1}{-0}}}=\frac{2}{3+5^{-\infty}}=\frac{2}{3+\frac{1}{5^{\infty}}}=\frac{2}{3+\frac{1}{\infty}}=\frac{2}{3+0}=\frac{2}{3},$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{2}{3+5^{\frac{1}{+0}}}=\frac{2}{3+5^{+\infty}}=\frac{2}{\infty}=0.$$

Таким образом, у функции существуют и левосторонний предел $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{2}{3}$ и правосторонний предел $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=0$, но между собой они не равны. Значит, точка $x=2$ является точкой разрыва 1 рода. Скачок функции равен: $\left|\frac{2}{3}-0\right|=\frac{2}{3}$.

5.2.30. Образец выполнения типового расчета № 4

Задание 1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos6x}{2x^2}$. б) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)tg\frac{\pi x}{6}$.

Решение.

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos6x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-cos6x)'}{(2x^2)'}=$$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6sin6x}{4x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{cos6x}{1}=9.$$

б) $$\lim_{x\to 3}(2x-6)tg\frac{\pi x}{6}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{ctg\frac{\pi x}{6}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(2x-6)'}{\left(ctg\,\frac{\pi x}{6}\right)'}==\lim_{x\to 3}\frac{2}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{6}}\cdot\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\pi}{6}}=-\frac{12}{\pi}.$$

Задание 2. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$; б) $y=\frac{\cos x}{x^3+9}$;

в) $y=\sin\sqrt{1-x^2}$; г) $y=\left(2arctgx+3^x\right)\left(5\text{arcsin}-\sqrt{3}\right)$;

д) $y=x^{e^x}$.

Решение.

а) $y=5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$.

$$y'=\left(5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}\right)'=\left(5x^3-8x^{-2}+4x^{\frac{1}{2}}\right)'=$$

$$=5\cdot 3x^2-8\cdot(-2)x^{-3}+4\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=15x^2+\frac{16}{x^3}+\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

б) $y=\frac{\cos x}{x^3+9}$.

$$y'=\left(\frac{\cos x}{x^3+9}\right)'=\frac{(\cos x)'(x^3+9)-\cos x(x^3+9)'}{(x^3+9)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x\cdot(x^3+9)-3x^2\cos x}{(x^3+9)^2}.$$

в). $y=\sin\sqrt{1-x^2}$.

$$y'=\left(\sin\sqrt{1-x^2}\right)'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=$$

$$=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1-x^2\right)'=$$

$$=-2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos\sqrt{1-x^2}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos\sqrt{1-x^2}.$$

г) $y=\left(2arctgx+3^x\right)\left(5\arcsin-\sqrt{3}\right)$

$$y'=\left(2arctg\,x+3^x\right)'\cdot\left(5arcsin\,x-\sqrt{3}\right)+\left(5arcsin\,x-\sqrt{3}\right)'\cdot$$

$$\cdot\left(2arctg\,x+3^x\right)=\left(2\cdot\frac{1}{1+x^2}+3^x ln3\right)\cdot\left(5arcsin\,x-\sqrt{3}\right)+$$

$$+\left(5\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-0\right)\cdot\left(2arctg\,x+3^x\right)=\left(\frac{2}{1+x^2}+3^x ln3\right)\cdot$$

$$\cdot\left(5arcsin\,x-\sqrt{3}\right)+\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(2arctg\,x+3^x\right).$$

д) $y=x^{e^x}$.

Прологарифмируем обе части равенства:

$\ln y=\ln(x^{e^x});\qquad \ln y=e^x\ln x$.

Продифференцируем обе части равенства:

$$\frac{y'}{y}=e^x\ln x+e^x\frac{1}{x};\quad y'=y\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right).$$

Тогда,

$$y'=x^{e^x}\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right).$$

Задание 3. Найти производую y'_x функции $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arccos t\end{cases}$

Решение.

Вычислим x'_t и y'_t:

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2}2t = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad y'_t = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x_t} = \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{2t\sqrt{1-t^2}}.$$

Задание 4. Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции: $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Решение.

Исследуем функцию на монотонность и экстремумы:

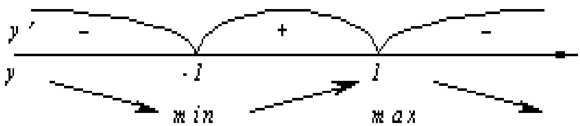
$$y' = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Найдем критические точки 1 рода:

$$y' = 0, \qquad \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 0,$$

$$x = 1, \quad x = -1.$$



При $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ функция убывает,

при $x \in (-1, 1)$ функция возрастает.

$x = -1$ – точка минимума, $y_{min} = y(-1) = \dfrac{-1}{1+(-1)^2} = -\dfrac{1}{2}$.

$x = 1$ – точка максимума, $y_{\max} = y(1) = \dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2}$.

Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба:

$$y'' = \left(\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right)' = \frac{(1-x^2)'(1+x^2)^2 - (1-x^2)((1+x^2)^2)'}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

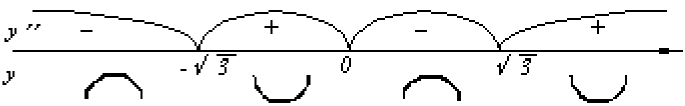
$$= \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{-2x(1+x^2)(1-x^2-2x^2)}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{-2x(1-3x^2)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Найдем критические точки 2 рода:

$$y'' = 0, \quad \frac{-2x(1-3x^2)}{\left(1+x^2\right)^3} = 0.$$

$$x = 0, \quad x = \sqrt{3}, \quad x = -\sqrt{3}.$$



При $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ функция выпуклая,

при $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$ – функция вогнутая.

$x = 0, \quad x = \sqrt{3}, \quad x = -\sqrt{3}$ – точки перегиба.

Задание 5. Найти производную функции: $x^3 + 3y^3 - xy = 0$.

Решение.

Продифференцируем по x равенство: $x^3 + 3y^3 - xy = 0$:

$$3x^2 + 3\cdot 3y^2 \cdot y' - xy' - y = 0.$$

Из полученного соотношения найдем y' :

$$3x^2 - y = (-9y^2 + x)y',$$

$$y' = \frac{3x^2 - y}{x - 9y^2}.$$

5.2.31. Образец выполнения типового расчета № 5

Задание 1. Вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int x\sqrt{5-x^2}dx$; б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$; в) $\int \frac{x}{2x-1}dx$.

Решение.

а) $\int x\sqrt{5-x^2}dx = \left| \begin{matrix} dy = y'dx \\ d\left(5-x^2\right) = -2xdx \end{matrix} \right| =$

$$= \int \left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{5-x^2}\cdot(-2)xdx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{5-x^2}\cdot d\left(5-x^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(5-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot d\left(5-x^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{\left(5-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(5-x^2\right)^3} + C;$$

б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}} = \left| \begin{matrix} 5-4x = t^2; & \sqrt{5-4x} = t \\ -4x = t^2 - 5; & x = -\frac{1}{4}\left(t^2-5\right) \\ dx = -\frac{1}{4}\cdot 2tdt; & dx = -\frac{tdt}{2} \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{-\frac{1}{4}\left(t^2-5\right)\left(-\frac{tdt}{2}\right)}{t} = \frac{1}{8}\int\left(t^2-5\right)dt = \frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3} - 5t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\left(\sqrt{5-4x}\right)^3}{3} - 5\sqrt{5-4x}\right) + C;$$

в) $\int \frac{x}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1+1}{2x-1}dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1+\frac{1}{2x-1}\right)dx = \frac{1}{2}\int \left(1+\frac{1}{2x-1}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int 1dx + \int \frac{1}{2x-1}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx\right) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\int \frac{d(2x-1)}{2x-1}\right) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right) + C.$$

Задание 2. Вычислить следующие определенные интегралы:

$$1.\ \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}. \quad 2.\ \int_1^2 x^2 ln\, x\, dx. \quad 3.\ \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}.$$

Решение.

а) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} = \ln\left|\ln e^2\right| - \ln|\ln e| =$

$$= \ln|2\ln e| - \ln 1 = \ln 2.$$

б) Разобьем подынтегральное выражение на части: $u = lnx$, $dv = x^2 dx$,

тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$.

Согласно формуле $\int_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$, получим:

$$\int_1^2 x^2 lnxdx = \frac{x^3}{3}lnx\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\left(2^3 ln2 - ln1\right) - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2 dx =$$

$$= \frac{8}{3}ln2 - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3}ln2 - \frac{1}{9}\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{8}{3}ln2 - \frac{7}{9} = \frac{24ln2-7}{9}.$$

в) Первообразную найдем, введя подстановку $\sqrt[6]{x}=t$, тогда $x=t^6$, $dx=6t^5dt$. При $x=1$, $t_1=\sqrt[6]{1}=1$; при $x=64$, $t=\sqrt[6]{64}=2$.

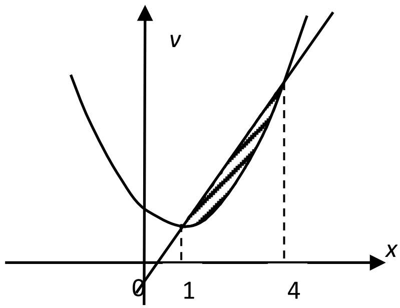
$$\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}=\int_1^2\frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)}=6\int_1^2\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int_1^2\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=$$

$$=6\int_1^2\frac{t^2+1}{1+t^2}dt-6\int_1^2\frac{1}{1+t^2}dt=6t\Big|_1^2-6arctg\,t\Big|_1^2=$$

$$=6(2-1)-6(arctg2-arctg1)=$$

$$=6-6\left(arctg2-\frac{\pi}{4}\right)=6+\frac{3\pi}{2}-6arctg2.$$

Задание 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$.



Решение. Сделаем чертеж. Уравнению $y=x^2-2x+3$ соответствует парабола с вершиной в точке $x=1$, $y=2$, т. к. $y=x^2-2x+3\Rightarrow y-2=(x-1)^2$. Уравнению $y=3x-1$ соответствует прямая.

Найдем точки пересечения заданных линий:

$$\begin{cases} y=x^2-2x+3, \\ y=3x-1. \end{cases}\quad x^2-2x+3=3x-1,\ x^2-5x+4=0,$$

$$x_1=1,\ x_2=4.$$

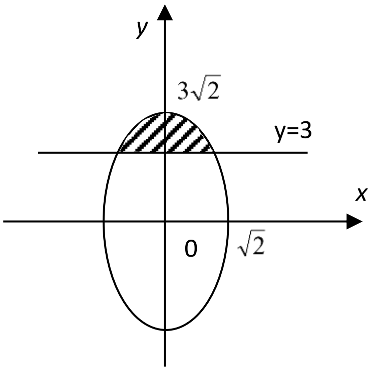
$$\int_1^4 (3x-1-(x^2-2x+3))dx = \int_1^4 (3x-1-x^2+2x-3)dx =$$

$$= \int_1^4 (5x-4-x^2)dx = \frac{5x^2}{2}\bigg|_1^4 - 4x\big|_1^4 - \frac{x^3}{3}\bigg|_1^4 = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = \sqrt{2}\,cos\,t \\ y = 3\sqrt{2}\,sin\,t \end{cases}$, $y = 3$ ($y \geq 3$).

Решение.

Уравнениями $\begin{cases} x = \sqrt{2}\,cos\,t \\ y = 3\sqrt{2}\,sin\,t \end{cases}$ задается эллипс с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$ (параметрические уравнения эллипса: $x = a\,cos\,t,$ $y = b\,sin\,t$, $0 \leq t \leq 2\pi$).



Уравнению $y = 3$ соответствует прямая, параллельная оси Ox. Сделаем чертеж. Получаем фигуру, площадь которой будем вычислять по формуле:

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x) \big) dx\,.$$

Найдем пределы изменения параметра t. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 3\sqrt{2}\,sin\,t \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad 3 = 3\sqrt{2}\,sin\,t\,,\ \ sin\,t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

$$t = (-1)^k\,arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi, \qquad k \in Z\,.$$

При $k = 0$, $t_1 = arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$; при $k = 1$, $t_2 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$.

Значит, $\dfrac{3\pi}{4} \ge t \ge \dfrac{\pi}{4}$, $dx = -\sqrt{2}\,sin\,t\,dt$.

Искомая площадь равна:

$$S = \int\limits_{3\pi/4}^{\pi/4} \left(3\sqrt{2}\,sin\,t - 3\right)\left(-\sqrt{2}\right) sin\,t\,dt =$$

$$= -6\int\limits_{3\pi/4}^{\pi/4} sin^2 t\,dt + 3\sqrt{2}\int\limits_{3\pi/4}^{\pi/4} sin\,t\,dt = -6\int\limits_{3\pi/4}^{\pi/4} \frac{1 - cos\,2t}{2}\,dt - 3\sqrt{2}\,cos\,t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= -3\int\limits_{3\pi/4}^{\pi/4} dt + 3\int\limits_{3\pi/4}^{\pi/4} cos\,2t\,dt - 3\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} - cos\frac{3\pi}{4}\right) = -3t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4} +$$

$$+\frac{3}{2}\,sin\,2t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4} - 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) +$$

$$+\frac{3}{2}\left(sin\frac{\pi}{2} - sin\frac{3\pi}{2}\right) - 6 = \frac{3\pi}{2} - 3 \text{ (кв. ед.).}$$

5.2.32. Образец выполнения типового расчета № 6

Задание 1. На карточках написаны числа от 30 до 40. Наудачу извлекают одну карточку. Найти вероятность того, что извлекут карточку с числом, кратным трем.

Решение.

Введем событие A – число, кратное трем.

$n = 11$ (можно извлечь любую из 11 карточек),

$m = 4$ (чисел, делящихся на три, будет всего четыре: 30; 33; 36; 39).

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{11}.$$

Задание 2. Телефонный номер состоит из шести цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.

Решение.

Введем событие A – все цифры различны.

$n = 10^6$ (столько всех шестизначных номеров существует, считая номер 000000 – возможным).

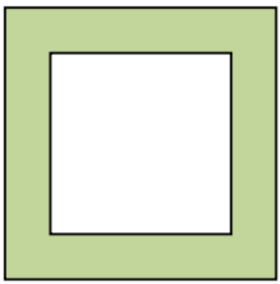
$m = A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ (столько будет существовать номеров с различными цифрами).

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10^6} = 0{,}1512.$$

Задание 3. В квадрат со стороной 4 см «бросают» точку. Какова вероятность, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата будет меньше 1 см?

Решение.

Закрасим в квадрате множество точек, удаленных от ближайшей стороны меньше, чем на 1 см.



Площадь квадрата со стороной 4 см равна $16 см^2$:

Площадь закрашенной части квадрата:

$$16 см^2 - 4 см^2 = 12 см^2 .$$

Значит, искомая вероятность равна: $P(A) = \frac{s}{S} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

Задание 4. В магазин поступила партия обуви одного фасона, размера, но разного цвета. В ней 40 пар черного цвета, 26 – коричневого, 22 – красного, 12 – синего. Коробки с обувью оказались не рассортированными по цвету. Найти вероятность того, что наудачу взятая коробка, окажется с обувью красного или синего цвета.

Решение.

Введем событие *A* – взятая наудачу коробка с обувью красного или синего цвета.

Введем дополнительные два события:

B – коробка с обувью красного цвета;

C – коробка с обувью синего цвета.

Алгебра события: $A = B + C$ (или коробка с обувью красного цвета или синего). События *B*, *C* – несовместные. По теореме сложения имеем:

$$P(A) = P(B) + P(C) = \frac{22}{100} + \frac{12}{100} = \frac{34}{100} = 0,34 .$$

Задание 5. На каждой отдельной карточке написаны буквы, составляющие слово «МАШИНА». Карточки перемешали и положили в пакет. После чего извлекли одну за другой (без возвращения) четыре карточки. Найти вероятность того, что в порядке выхода карточек можно прочитать слово «ШИНА».

Решение.

Введем событие *A* – можно прочитать слово «ШИНА».

Введем дополнительно еще события:

A_1 – первая буква «Ш»; A_2 – вторая буква «И»;

A_3 – третья буква «Н»; A_4 – четвертая буква «А».

Алгебра события: $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$ (одновременно должны наступить события и первая буква «Ш» и вторая «И» и третья «Н» и четвертая «А»). События A_1, A_2, A_3, A_4 – зависимые. По теореме умножения для зависимых событий:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1A_2}(A_3) \cdot P_{A_1A_2A_3}(A_4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{180}.$$

Задание 6. Два студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятность того, что задачу решит первый студент равна 0,7; для второго студента эта вероятность составляет 0,8. Найти вероятности следующих событий: *A* – оба студента решат задачу; *B* – только первый решит задачу.

Решение.

Пусть событие K_1 состоит в том, что первый студент решит задачу; K_2 – второй студент решит задачу. По условию $P(K_1) = 0,7$, $P(K_2) = 0,8$,

$\overline{K_1}$ – первый студент не решит задачу.

$P(\overline{K_1}) = 1 - P(K_1) = 0,3$.

$\overline{K_2}$ – второй студент не решит задачу.

$P(\overline{K_2}) = 1 - P(K_2) = 0,2$.

Событие *A* равносильно событию “первый студент решит задачу и второй студент решит задачу”, т. е. $A = K_1 \cdot K_2$. Причем события K_1, K_2 – независимые. По теореме умножения для независимых событий:

$$P(A) = P(K_1) \cdot P(K_2) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

Событие *B* равносильно событию “первый студент решит задачу и второй студент не решит задачу”, т. е. $B = K_1 \cdot \overline{K_2}$

$$P(B) = P(K_1) \cdot P(\overline{K_2}) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14.$$

Задание 7. На сборку поступают однотипные изделия из четырех цехов. Вероятности брака в каждом из цехов соответственно равны 0,04, 0,03, 0,06, 0,02. Первый цех поставляет 30 изделий, второй цех – 20, третий цех – 50, четвертый – 25. Изделия оказались перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется бракованным.

Решение.

Введем событие A, взятое наудачу, B – изделие бракованное.

Возможные гипотезы:

B_1 – изделие изготовлено в первом цехе;

B_2 – изделие изготовлено во втором цехе;

B_3 – изделие изготовлено в третьем цехе;

B_4 – изделие изготовлено в четвертом цехе.

Событие: $A = B_1 \cdot A + B_2 \cdot A + B_3 \cdot A + B_4 \cdot A$.

Вероятность $P(A)$ будет вычисляться по формуле полной вероятности. Вычислим:

$$P(B_1) = \frac{30}{125}, \qquad P_{B_1}(A) = 0,04;$$

$$P(B_2) = \frac{20}{125}, \qquad P_{B_2}(A) = 0,03;$$

$$P(B_3) = \frac{50}{125}, \qquad P_{B_3}(A) = 0,06;$$

$$P(B_4) = \frac{30}{125} \qquad P_{B_4}(A) = 0,02.$$

$$\sum_{i=1}^{4} P(B_i) = \frac{30}{125} + \frac{20}{125} + \frac{50}{125} + \frac{30}{125} = 1.$$

Вероятность события A:

$$P(A) = \frac{30}{125} \cdot 0,04 + \frac{20}{125} \cdot 0,03 + \frac{50}{125} \cdot 0,06 + \frac{30}{125} \cdot 0,02 = 0,0424.$$

Задание 8. Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей на три класса, которые включают 20 %, 50 % и 30 % водителей соответственно. Вероятности того, что в течение года водитель попадет в аварию, равны 0,01, 0,03 и 0,1 соответственно для каждого класса. Наугад выбранный водитель в течение года попал в аварию. Какова вероятность того, что он относится к первому классу?

Решение.

Обозначим через A событие – водитель попал в аварию.

Возможны следующие предположения (гипотезы): B_1 – водитель относится к первому классу, B_2 – ко второму, B_3 – к третьему.

Вероятности гипотез и условные вероятности того, что водитель попадет в аварию, при условии, что он относится к первому, второму, третьему классу соответственно равны:

$$P(B_1) = 0,2, \qquad P_{B_1}(A) = 0,01;$$

$$P(B_2) = 0,5, \qquad P_{B_2}(A) = 0,03;$$

$$P(B_3) = 0,3, \qquad P_{B_3}(A) = 0,1.$$

Вероятность того, что попавший в аварию водитель относится к первому классу, по формуле Байеса равна:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)} =$$

$$= \frac{0,2\cdot 0,01}{0,2\cdot 0,01 + 0,5\cdot 0,03 + 0,3\cdot 0,1} = 0,043.$$

5.2.33. Образец выполнения типового расчета № 7

Задание 1. Всхожесть семян некоторого сорта растений равна 80 %. Для опыта отбирается 5 семян. Определить вероятность того, что из 5 посеянных семян прорастет: а) 3 семени; б) не менее 3 семян.

Решение.

Будем считать высев 5 семян проведением пяти независимых испытаний. Для каждого из 5 посеянных семян вероятность прорасти постоянна $P(A) = 0,8$. Вероятность противоположного события $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2$. Надо найти $P_5(3)$, т. е. вероятность того, что в 5 испытаниях событие A появится ровно 3 раза. Значит, $n = 5$; $p = 0,8$; $q = 0,2$; $k = 3$. По формуле Бернулли имеем:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^{5-3} = 0{,}2048;$$
$$P_5(4) = C_5^4 \cdot (0{,}8)^4 \cdot (0{,}2)^{5-4} = 0{,}4096;$$
$$P_5(5) = C_5^5 \cdot (0{,}8)^5 \cdot (0{,}2)^{5-5} = 0{,}32768;$$
$$P_5(k \geq 3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) =$$
$$= 0{,}2048 + 0{,}4096 + 0{,}32768 = 0{,}94208.$$

Задание 2. Вероятность изготовления стандартной детали на автомате равна 0,95. Изготовлена партия в 200 деталей. Найти наивероятнейшее число нестандартных деталей и вероятность этого наивероятнейшего числа.

Решение.

По условию: n = 200; q = 0,95; p = 1–0,95 = 0,05.

Так как n = 200 достаточно велико, то наивероятнейшее число $k_0 = np$: $k_0 = 200 \cdot 0{,}05 = 10$.

Вычислим вероятность $P_{200}(10)$, используя локальную теорему Лапласа:

$x = \dfrac{10 - 200 \cdot 0{,}05}{\sqrt{200 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}} = 0.$ По таблице найдем $\varphi(0) = 0{,}3989.$

$$P_{200}(10) = \frac{0{,}3989}{\sqrt{200 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}} = \frac{0{,}3989}{\sqrt{9{,}5}} \approx 0{,}13.$$

Задание 3. Батарея состоит из трех орудий. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого, второго и третьего орудия равна соответственно 0,5; 0,6; 0,8. Каждое орудие стреляет по цели один раз. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий в цель. Вычислить: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить график распределения. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение.

Введем случайную величину X – число попаданий в цель. Возможные значения величины:

$x_1 = 0$ – ни одно орудие не попало; $x_2 = 1$ – попало одно орудие;

$x_3 = 2$ – попали два орудия; $x_4 = 3$ – попали три орудия.

Величина X – дискретная. Вычислим вероятность каждого значения:

$$p_1 = P(X = 0) = (1-0,5)(1-0,6)(1-0,8) = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 = 0,04$$

(и первое и второе и третье орудия промахнулись);

$$p_2 = P(X = 1) = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,26$$

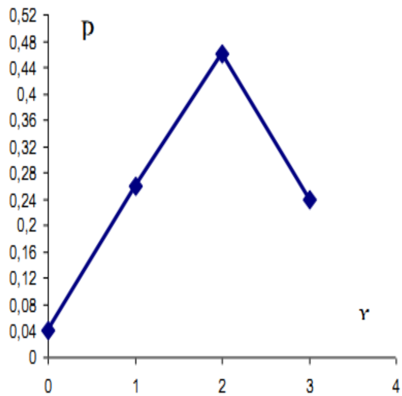
(первое орудие попало, второе и третье промахнулись или второе орудие попало, первое и третье промахнулись или третье орудие попало, первое и второе промахнулись);

$$p_3 = P(X = 2) = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,46;$$

$$p_4 = P(X = 3) = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,24.$$

Закон распределения:

X	0	1	2	3	$\sum p_i$
p	0,04	0,26	0,46	0,24	1



Проверим правильность составленного закона:

$$\sum p_i = 0,04 + 0,26 + 0,46 + 0,24 = 1.$$

Построим график распределения.

Вычислим: $M(X) = 0 \cdot 0,04 + 1 \cdot 0,26 + 2 \cdot 0,46 + 3 \cdot 0,24 = 1,9$.

Для дисперсии вычислим:

$M(X^2) = 0^2 \cdot 0,04 + 1^2 \cdot 0,26 + 2^2 \cdot 0,46 + 3^2 \cdot 0,24 = 4,26$.

$D(X) = 4,26 - (1,9)^2 = 0,65$;

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 4,26 - (1,9)^2 = \sqrt{0,65} \approx 0,81$.

Найдем функцию распределения: $F(x) = P(X < x)$:

$F(x) = 0, \quad x \le 0;$

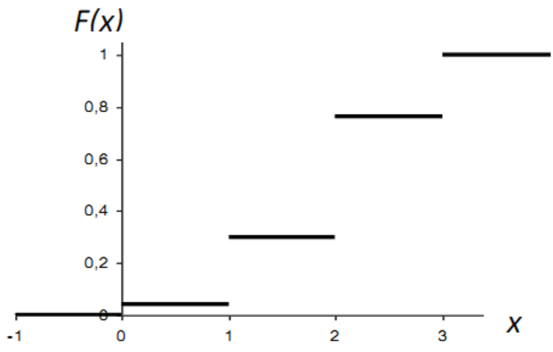
при изменении $0 < x \le 1; \quad F(x) = 0,04;$

при изменении $1 < x \le 2; \quad F(x) = 0,04 + 0,26 = 0,3;$

при изменении $2 < x \le 3; \quad F(x) = 0,04 + 0,26 + 0,46 = 0,76;$

для всех $x > 3; \quad F(x) = 1;$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0,04, & 0 < x \le 1; \\ 0,3, & 1 < x \le 2; \\ 0,76, & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$



Построим график функции: $F(x)$.

5.2.34. Образец выполнения типового расчета № 8

Задание 1. Случайная величина задана законом распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1;\\ a\left(x^2-x\right), & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти параметр a; 2) вычислить вероятность события $1<X\le 1{,}5$; 3) найти $M(X)$, $D(X)$.

Решение.

1. Параметр a найдем из свойства функции плотности вероятности: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

Найдем: $f(x)=F'(x)$: $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1;\\ a\left(2x-1\right), & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2. \end{cases}$

Вычислим: $\int\limits_1^2 a\left(2x-1\right)dx=a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(2x-1\right)^2}{2}\Bigg|_1^2=\frac{a}{4}\cdot\left(9-1\right)=2a.$

Приравняем: $2a=1,\quad a=\frac{1}{2}.$

Функции $F(x)$, $f(x)$ принимают вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1;\\ \frac{1}{2}\left(x^2-x\right), & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2. \end{cases}\quad f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1;\\ \frac{1}{2}\left(2x-1\right), & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2. \end{cases}.$$

2. Вычислим вероятность события: $1<X\le 1{,}5$.

Используем формулу: $P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha),$

найдем: $F(1{,}5)=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)\Big|_{x=1{,}5}=\frac{1}{2}\left(1{,}5^2-1{,}5\right)=0{,}375$,

$F(1)=0$.

Задание 2. Размер диаметра втулок, изготовленных на заводе, можно считать нормально распределенной случайной величиной с $M(X)=2{,}5$ см и $\sigma(X)=0{,}01$ см. Втулки годные, если их размер находится в пределах $2{,}5\pm 0{,}02$. Какой процент изготовленных втулок, является браком?

Решение.

Втулка будет негодной, если $|X-2{,}5|>0{,}02$, где X – случайная величина, размер диаметра втулки. Вычислим сначала вероятность противоположного события $|X-2{,}5|\le 0{,}02$ по формуле:

$$P\left(|X-M(X)|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right):$$

$$P\left(|X-2{,}5|\le 0{,}02\right)=2\Phi\left(\frac{0{,}02}{0{,}01}\right)=2\Phi(2)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544\ .$$

Тогда $P\left(|X-2{,}5|>0{,}02\right)=1-0{,}9544=0{,}0456$.

Следовательно, $4{,}56\%\approx 5\,\%$ втулок – бракованных.

Задание 3. Среднее число дождливых дней в году в данном пункте равно 120. Какова вероятность того, что в этом пункте будет более 200 дождливых дней в году?

Решение.

Введем случайную величину X – число дождливых дней в году.

По условию $M(X)=120$, $\alpha=200$. Согласно формуле

$$P(X>\alpha)\le\frac{M(X)}{\alpha}\text{, имеем: } P(X>200)\le\frac{120}{200}=0{,}6\,.$$

Следовательно, $P(X>200)\le 0{,}6$.

5.2.35. Образец выполнения типового расчета № 9

Задание 1. Обследование качества пряжи на крепость дало следующие результаты:

Крепость нити (г), x_i	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240
Число случаев, n_i	7	25	28	30	8	2

а) построить гистограмму и полигон относительных частот;

б) найти эмпирическую функцию распределения и вычертить её график;

в) рассчитать моду и медиану;

г) вычислить выборочные среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициент вариации, коэффициенты асимметрии и эксцесса;

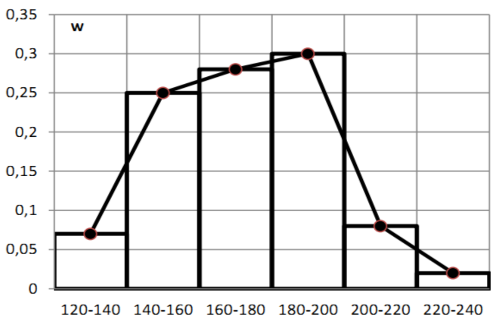
д) по виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса сделать выбор закона распределения случайной величины *X* – потребляемой мощности электроэнергии;

е) найти точечные оценки параметров выбранного закона распределения;

ж) предполагая, что случайная величина *X* распределена по нормальному закону, записать функцию распределения и функцию плотности *X*. Найти интервальные оценки параметров распределения *X*, приняв за доверительную вероятность 0,95.

Решение.

а) Построим гистограмму и полигон относительных частот, для этого найдем относительные частоты (высоты соответствующих прямоугольников гистограммы) по формуле: $w_i = \dfrac{n_i}{n}$.



Для построения полигона на гистограмме соединим середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямых.

интервалы	n_i	w_i
$120-140$	7	$0,07$
$140-160$	25	$0,25$
$160-180$	28	$0,28$
$180-200$	30	$0,3$
$200-220$	8	$0,08$
$220-240$	2	$0,02$
$\sum$	**100**	**1**

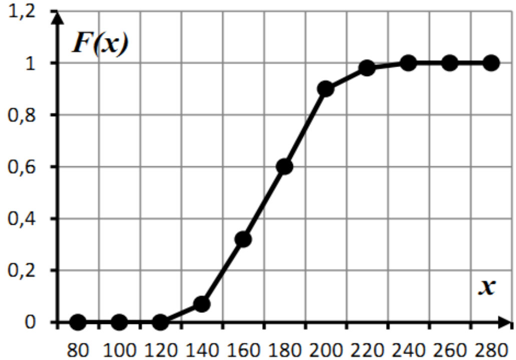
б) Найдем эмпирическую функцию распределения, для этого сначала найдем наколенные частоты:

x_i	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240
n_i	7	25	28	30	8	2
n_x	7	32	60	90	98	100

Очевидно, что для всех $x \in (-\infty;120]$ функция распределения равна нулю. Пусть теперь $x \in (120;140]$. В этом случае число $\frac{n_x}{n}$ не определено, так как неизвестно, сколько выборочных значений случайной величины, принадлежащих этому интервалу, меньше *x*. Если *x* = 140, то $n_x = 7$, $F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{7}{100} = 0,07$.

Рассуждая аналогично, убеждаемся, что точками, в которых значение функции $F^*(x)$ можно определить, являются правые концы интервалов и все точки интервала $x \in [240;\infty)$. Определим значения функции $F^*(x)$ в указанных точках:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x\le 120; \\ 0,07 & \textit{при} \quad x=140; \\ 0,32 & \textit{при} \quad x=160; \\ 0,60 & \textit{при} \quad x=180; \\ 0,90 & \textit{при} \quad x=200; \\ 0,98 & \textit{при} \quad x=220; \\ 1 & \textit{при} \quad x\ge 240. \end{cases}$$



При графическом изображении данной функции, соединим точки графика, соответствующие концам интервалов, отрезками прямой. В результате график функции $F^*(x)$ будет представлять собой непрерывную линию.

в) Рассчитаем моду и медиану. Распределение задано интервальным рядом. Наибольшая частота $n_x=30$ отвечает интервалу 180–200, следовательно, этот интервал является модальным. Поэтому по формуле:

$$Mo\approx x_{Mo}+\Delta x\cdot\frac{n_{Mo}-n_{Mo-1}}{\left(n_{Mo}-n_{Mo-1}\right)+\left(n_{Mo}-n_{Mo+1}\right)},$$

в которой $x_{Mo}=180$ – начало модального интервала; $n_{Mo}=30$ – частота модального интервала; $n_{Mo-1}=28$ – частота интервала, стоящего перед модальным; $n_{Mo+1}=8$ – частота интервала, стоящего после модального, получим:

$$Mo \approx 180 + 20 \cdot \frac{30-28}{(30-28)+(30-8)} \approx 181{,}67 .$$

Для нахождения медианы по формуле

$$Me \approx x_{Me} + \Delta x \cdot \frac{n/2 - (n_x)_{Me-1}}{n_{Me}},$$

нужно определить медианный интервал. Объем ряда $n = \sum n_i = 7+25+28+30+8+2 = 100$, тогда, $n/2 = 50$. Среди накопленных частот находим число 50. Такого числа нет, поэтому берем первое, большее 50 значение. Это будет 60. Интервал 160–180, ему соответствующий, и будет медианным. Следовательно, $x_{Me} = 160$ – начало медианного интервала; $n_{Me} = 28$ – частота медианного интервала; $(n_x)_{Me-1} = 32$ – накопленная частота интервала, стоящего перед медианным.

Подставим найденные значения в формулу, получим:

$$Me \approx 160 + 20 \cdot \frac{100/2 - 32}{28} \approx 172{,}86.$$

г) Вычислим выборочную среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, коэффициенты вариации, асимметрии, эксцесс. В качестве вариант x_i возьмем середины интервалов. Для упрощения расчетов удобно перейти к условным вариантам. В качестве условного нуля выберем $C = 190$:

$$u_i = \frac{x_i - C}{h} = \frac{x_i - 190}{20}.$$

Вспомогательные расчеты сведены в таблицу:

интервалы	n_i	x_i	u_i	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$	$u_i^3 n_i$	$u_i^4 n_i$
120 – 140	7	130	–3	–21	63	–189	567
140 – 160	25	150	–2	–50	100	–200	400
160 – 180	28	170	–1	–28	28	–28	28
180 – 200	30	190	0	0	0	0	0
200 – 220	8	210	1	8	8	8	8
220 – 240	2	230	2	4	8	16	32
Σ	**100**			–87	207	–193	1035

Далее, используя таблицу, найдем:

$$\overline{u} = \frac{\sum u_i n_i}{n} = \frac{-87}{100} = -0,87\ ,\ \overline{u} = \frac{\sum u_i^2 n_i}{n} = \frac{207}{100} = 2,07\ ;$$

$$D_u = \overline{u^2} - (\overline{u})^2 = 2,07 - (-0,87)^2 = 1,3131;$$

$$\sigma_u = \sqrt{D_u} = \sqrt{1,3131} = 1,1459;$$

$$\overrightarrow{x_в} = h \cdot \overline{u} + C = 20 \cdot (-0,87) + 190 = 172,6;$$

$$D_в = h^2 \cdot D_u = 20^2 \cdot 1,3131 = 525,24; \quad \sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{525,24} = 22,92.$$

Коэффициент вариации:

$$V = \frac{\sigma_в}{\overline{\overline{x}}_в} \cdot 100\% = \frac{22,92}{172,6} \cdot 100\% = 13,28\%\ .$$

Для расчета коэффициента асимметрии и эксцесса найдем начальные условные моменты от первого до четвертого порядков:

$$\alpha_1 = \frac{\sum u_i n_i}{n} = \frac{-87}{100} = -0,87\ ;\ \alpha_2 = \frac{\sum u_i^2 n_i}{n} = \frac{207}{100} = 2,07\ ;$$

$$\alpha_3 = \frac{\sum u_i^3 n_i}{n} = \frac{-393}{100} = -3,93\ \ \alpha_4 = \frac{\sum u_i^4 n_i}{n} = \frac{1035}{100} = 10,35\,.$$

Теперь рассчитаем второй, третий и четвертый центральные моменты:

$$\mu_2 = \alpha_2 - (\alpha_1)^2 = 2,07 - (-0,87)^2 = 1,3131;$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2(\alpha_1)^3 = -3,93 - 3 \cdot 2,07 \cdot (-0,87) +$$
$$+2 \cdot (-0,87)^3 = 0,1557;$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\left(\alpha_1\right)^2 - 3(\alpha_1)^4 = 10,35 - 4 \cdot (-3,93) \cdot (-0,87) +$$
$$+6 \cdot 2,07 \cdot (-0,87)^2 - 3 \cdot (-0,87)^4 = 4,3556.$$

Вычислим коэффициент асимметрии и эксцесс:

$$\mathrm{A_s} = \frac{\mu_3}{\left(\sqrt{\alpha_2 - (\alpha_1)^2}\right)^3} = \frac{0,1557}{\sqrt{1,3131}^3} \approx 0,1035;$$

$$\mathrm{E_k} = \frac{\mu_4}{\left(\sqrt{\alpha_2 - (\alpha_1)^2}\right)^4} - 3 = \frac{4,3556}{\sqrt{1,3131}^4} - 3 \approx 0,4739\,.$$

Значения коэффициентов асимметрии и эксцесса малы.

По виду гистограммы и полигона относительных частот, по величине выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса можно сделать вывод, что заданное распределение близко к нормальному.

д) Найдем точечные оценки параметров выбранного закона распределения.

Несмещенной оценкой математического ожидания является выборочная средняя: $\overrightarrow{x_в}=172,6$.

Несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности является исправленная выборочная дисперсия:

$$s_в^2=\frac{n}{n-1}D_в=\frac{100}{99}\cdot 525,24=530,545 .$$

е) Запишем функцию плотности и функцию распределения:

$$a=172,6 ;\ \sigma=\sqrt{530,545}=23,034 ;$$

$$f(x)=\frac{1}{23,034\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-172,6)^2}{2\cdot 23,034^2}} ;\ F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-172,6}{2\cdot 23,034}\right).$$

Найдем интервальные оценки параметров нормального распределения *X*.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ имеет вид:

$$\overline{x_в}-t_\gamma\frac{s_в}{\sqrt{n}}<a<\overline{x_в}+t_\gamma\frac{s_в}{\sqrt{n}} ,$$

где $\overrightarrow{x_в}=172,6$, $s_в=\sqrt{s_в^2}=\sqrt{530,545}=23,034$.

Для уровня значимости $\gamma=0,95$ и объема выборки *n* = 100, находим по таблице значение $t_\gamma=1,984$.

$$172,6-1,984\frac{23,034}{\sqrt{100}}<a<172,6+1,984\frac{23,034}{\sqrt{100}};$$

$$168,0301<a<177,1699.$$

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения нормального распределения:

$$s_в(1-q)<\sigma<s_в(1+q) .$$

По таблице при $\gamma = 0{,}95$ и n = 100 найдем q = 0,143. Тогда, искомый интервал таков:

$$23{,}034(1-0{,}143) < \sigma < 23{,}034(1+0{,}143);$$

$$19{,}74 < \sigma < 26{,}323.$$

5.2.36. Образец выполнения типового расчета № 10

Задание 1. Обследование качества пряжи на крепость дало следующие результаты:

Крепость нити (г), x_i	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240
Число случаев, n_i	7	25	28	30	8	2

Проверить, используя критерий согласия χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения, выбрав за уровень значимости 0,05.

Решение.

Пронормируем случайную величину X, т. е. перейдем к случайной величине $Z = \dfrac{X - \overline{x_в}}{\sigma_в}$, и вычислим концы интервалов: $z_i = \dfrac{x_i - \overline{x_в}}{\sigma_в}$, $z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x_в}}{\sigma_в}$, причем наименьшее значение Z (т. е. z_1) примем равным $-\infty$, а наибольшее (т. е. z_{s+1}), примем равным ∞. Затем вычислим теоретические частоты $n_i' = nP_i$, где n – объем выборки; $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ – вероятности попадания X в интервалы $(x_i; x_{i+1})$; $\Phi(z)$ – функция Лапласа.

Интервалы 5 и 6 объединены, так как по правилу применения критерия Пирсона интервалы, частота которых менее 5, должны быть объединены.

Границы интервала		Эмпирическая частота n_i	Границы интервала		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	Теорет. частота $n_i' = nP_i$
x_i	x_{i+1}		z_i	z_{i+1}				
120	140	7	$-\infty$	-1,42	-0,5	-0,4222	0,0778	7,78
140	160	25	-1,42	-0,55	-0,4222	-0,2088	0,2134	21,34
160	180	28	-0,55	0,32	-0,2088	0,1255	0,3343	33,43
180	200	30	0,32	1,19	0,1255	0,3830	0,2575	25,75
200	220	$\left.\begin{matrix}8\\2\end{matrix}\right\}10$	1,19	$+\infty$	0,3830	0,5	0,117	11,7
220	240							
Сумма								
		100					**1**	**100**

Построим графики эмпирической кривой и теоретически нормальной кривой.

Как видно на графиках, представленных на рисунке, теоретические и эмпирические кривые отличаются друг от друга. Для определения значимо ли это расхождение, вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона, составим для этого расчетную таблицу:

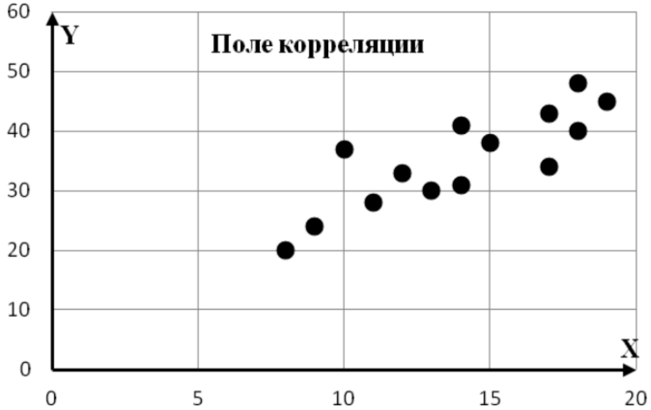
№	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$\left(n_i - n_i'\right)^2$-	$\dfrac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n'}$
1	7	7,78	-0,78	0,608	0,0782
2	25	21,34	3,66	13,4	0,6277
3	28	33,43	-5,43	29,48	0,8819
4	30	25,75	4,25	18,06	0,7015
5	10	11,7	-1,7	2,89	0,2470
Сумма	**100**	**100**			$\chi^2_{набл} \approx 2.54$

Находим число степеней свободы: по выборке рассчитаны два параметра, значит, $r = 2$. Количество интервалов после объединения $m = 5$. Следовательно, $k = 5 - 2 - 1 = 2$. Зная, что $\alpha = 0,05$ и $k = 2$, по таблице критических точек распределения хи-квадрат находим $\chi^2_{крит}(\alpha; k) = \chi^2_{крит}(0,05; 2) = 6,0$. Итак, $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$, следовательно, нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

Задание 2. Приведены результаты исследования стоимости основных производственных фондов *X* (млн сом.) и объемов строительно-монтажных работ *Y* (млн сом.), выполненных в течение года:

x_i	8	9	11	13	14	12	17	10	15	18	14	17	19	18
y_i	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

Необходимо: а) построить график исходных данных; б) полагая, что между *Y* и *X* имеет место линейная зависимость, определить выборочное уравнение линейной регрессии; в) определить направление и тесноту связи; г) проверить значимость выборочного коэффициента линейной корреляции при $\alpha = 0,05$; д) сделать прогноз объема строительно-монтажных работ, если стоимость основных производственных фондов составит 20 млн сом.



Решение.

а) График зависимости переменных X и Y строится в прямоугольной декартовой системе координат. На оси абсцисс откладываются значения факторного признака X (стоимость основных производственных фондов), а по оси ординат – результативного признака Y (объем строительно-монтажных работ).

б) Характер расположения точек на графике показывает, что связь между переменными может выражаться линейным уравнением регрессии $\overline{y}_x = kx + b.$

Параметры уравнения регрессии находим методом наименьших квадратов, путем составления и решения системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\,, \\ k\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i\,. \end{cases}$$

Все расчеты приведены во вспомогательной таблице:

№ п/п	x	y	x^2	y^2	xy
1	8	20	64	400	160
2	9	24	81	576	216
3	11	28	121	784	308

4	13	30	169	900	390
5	14	31	196	961	434
6	12	33	144	1089	396
7	17	34	289	1156	578
8	10	37	100	1369	370
9	15	38	225	1444	570
10	18	40	324	1600	720
11	14	41	196	1681	574
12	17	43	289	1849	731
13	19	45	361	2025	855
14	18	48	324	2304	864
$\sum$	195	492	2883	18138	7166
Сред.	13,929	35,143	205,929	1295,571	511,857

В таблице все средние находятся по формуле средней арифметической простой, например: $\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{195}{14} = 13,929$.

Подставляя полученные суммы в систему нормальных уравнений, учитывая, что n = 14, получим:

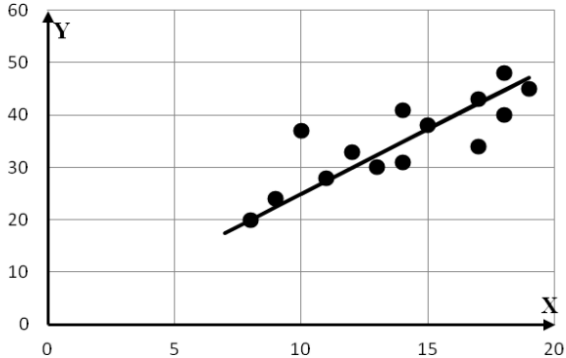
$$\begin{cases} 205,929k + 13,929b = 511,857, \\ 13,929k + 14b = 35,143. \end{cases}.$$

Решив систему, получим: k = 2,4829, b = 0,03997.

Таким образом, уравнение регрессии имеет вид: $\bar{y}_x = 2,4829x + 0,03997$.

Коэффициент регрессии показывает, что при увеличении стоимости основных производственных фондов (т. е. переменной X) на 1 млн сом. объем строительно-монтажных работ в среднем увеличивается на 2,4829 млн сом.

Если в уравнение регрессии подставить фактические значения переменной X, то определяются возможные (теоретические) значения переменной $\bar{y}_x$.



Соединив между собой точки с координатами $\left(x_i; \bar{y}_{x_i}\right)$, получим прямую линию регрессии (или линию тренда).

в) При линейной зависимос-ти, степень тесноты связи между переменными X и Y определяется с помощью коэффициента корреляции:

$$r_в = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Подставляя данные из расчетной таблицы и учитывая, что

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{205,929 - 13,929^2} \approx 3,453,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{1295,571 - 35,143^2} \approx 7,78,$$

получим:

$$r_в = \frac{511,857 - 13,929 \cdot 35,143}{3,45 \cdot 7,78} = 0,833.$$

Так как $r_в > 0,$ то между признаками X и Y связь прямая. Согласно шкале Чеддока, эта связь высокая.

г) Так как исходные данные являются выборочными, то необходимо оценить существенность и значимость величины коэффициента корреляции. Выдвигаем нулевую гипотезу: коэффициент корреляции в генеральной совокупности равен нулю, и изучаемый фактор не оказывает существенного влияния на результативный признак. $H_0: r_Г = 0$, при $H_1: r_Г \neq 0$.

Для проверки нулевой гипотезы найдем наблюдаемое значение критерия: $T_{набл}=\dfrac{r_в\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_в^2}}=\dfrac{0,833\sqrt{12}}{\sqrt{1-0,833^2}}\approx 5,21$. Критическое значение находим по таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости $\alpha=0,05$ и числу степеней свободы $k=n-2=14-2=12$ для двусторонней критической области, получим $t_{кр}\left(0,05;12\right)=2,18$. Так как $T_{набл}>t_{кр}$, то нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, коэффициент корреляции существенно отличен от нуля в генеральной совокупности. Значит, стоимость основных производственных фондов оказывает статистически существенное влияние на объем строительно-монтажных работ.

д) Если стоимость основных производственных фондов составит 20 млн сом., то, согласно уравнению регрессии $\bar{y}_x=2,4829x+0,03997$, объем строительно-монтажных работ в среднем составит: $\bar{y}_x=2,4829\cdot 20+0,03997=49,69797$ млн сом.

5.2.37. Образец выполнения контрольной работы № 1

Задание 1. Вычислить *(AB)C*+2*A(BC)*, где

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 5 & 1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -5\\ 5 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot 1+1\cdot 5 & -1\cdot(-5)+1\cdot 1\\ 3\cdot 1+(-2)\cdot 5 & 3\cdot(-5)+(-2)\cdot 1\\ (-2)\cdot 1+3\cdot 5 & (-2)\cdot(-5)+3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -7 & -17\\ 13 & 13\end{pmatrix};$$

$$\left(AB\right)C=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -7 & -17\\ 13 & 13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot4+6\cdot2\\ (-7)\cdot4+(-17)\cdot2\\ 13\cdot4+13\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\ -62\\ 78\end{pmatrix};$$

$$\left(AB\right)C+2\left(AB\right)C=3\left(AB\right)C=3\cdot\begin{pmatrix}28\\ -62\\ 78\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84\\ -186\\ 234\end{pmatrix}.$$

Задание 2. Решить систему уравнений по формулам Крамера: $\begin{cases}7x-5y-2z=1,\\ x+2y-z=-6,\\ 5x-10y+z=16.\end{cases}$

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix}7 & -5 & -2\\ 1 & 2 & -1\\ 5 & -10 & 1\end{vmatrix}=7\cdot2\cdot1+(-5)\cdot(-1)\cdot5+(-2)\cdot1\cdot(-10)-$$

$$-(-2)\cdot2\cdot5-(-5)\cdot1\cdot1-7\cdot(-1)\cdot(-10)=14+25+20-(-20)-$$

$$-(-5)-70=59+20+5-70=14;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & -5 & -2\\ -6 & 2 & -1\\ 16 & -10 & 1\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot1+(-5)\cdot(-1)\cdot16+(-2)\cdot(-6)\cdot(-10)-$$

$$-(-2)\cdot2\cdot16-(-5)\cdot(-6)\cdot1-1\cdot(-1)\cdot(-10)=$$

$$=2+80-120+64-30-10=14;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}7 & 1 & -2\\ 1 & -6 & -1\\ 5 & 16 & 1\end{vmatrix}=7\cdot(-6)\cdot1+1\cdot(-1)\cdot5+(-2)\cdot1\cdot16-$$

$$-(-2)\cdot(-6)\cdot5-1\cdot1\cdot1-7\cdot(-1)\cdot16=$$

$$=-42-5-32-60-1+112=-28;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -6 \\ 5 & -10 & 16 \end{vmatrix} = 7\cdot 2\cdot 16 + (-5)\cdot(-6)\cdot 5 + 1\cdot 1\cdot(-10) -$$

$$-1\cdot 2\cdot 5 - (-5)\cdot 1\cdot 16 - 7\cdot(-6)\cdot(-10) =$$

$$= 224 + 150 - 10 - 10 + 80 - 420 = 14;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-28}{14} = -2; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1.$$

Ответ: (1; -2; 1).

Задание 3. Исследовать систему уравнений: $\begin{cases} 7x - 5y - 2z = 1, \\ x + 2y - z = -6, \\ 6x - 7y - z = 7. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -6 \\ 6 & -7 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 19 & -5 & -43 \\ 0 & -19 & 5 & 43 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 19 & -5 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$r_1 = 2 = r_2 \quad \Rightarrow$ – система совместна;

$r_1 = 2 = r_2 < n = 3 \quad \Rightarrow$ – система неопределенна;

$n - r = 1$ – количество свободных неизвестных.

Пусть $z=C$, $C \in R$. Тогда,

$$\begin{cases} 7x - 5y - 2z = 1 \\ 19y - 5z = -43 \\ z = C \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - 5y - 2z = 1 \\ 19y = -43 + 5C \\ z = C \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - 5y - 2z = 1 \\ y = \dfrac{-43 + 5C}{19} \\ z = C \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = 1 + 5 \cdot \dfrac{-43+5C}{19} + 2C \\ y = \dfrac{-43+5C}{19} \\ z = C \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{7}\left(1 + 5 \cdot \dfrac{-43+5C}{19} + 2C\right) \\ y = \dfrac{-43+5C}{19} \\ z = C \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-28+9C}{19}; \\ y = \dfrac{-43+5C}{19}; \quad C \in R. \\ z = C; \end{cases}$$

Ответ: Общее решение:

$$\left(\frac{-28+9C}{19}; \quad \frac{-43+5C}{19}; \quad C\right), \quad C \in R.$$

Частное решение: $(-1; \quad -2; \quad 1)$, при $C = 1$.

Задание 4. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Разложим определитель, например, по второму столбцу, так как в нем три элемента равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{42} =$$

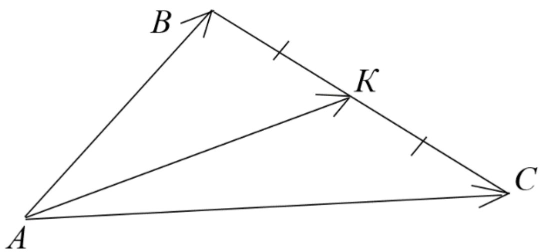
$$= (-1) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 -$$

$$-(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)-2\cdot 2\cdot 1-1\cdot 1\cdot 1=-2-1-2+1-4-1=-9.$$

5.2.38. Образец выполнения контрольной работы № 2

Задание 1. В треугольнике *ABC* дано: $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AC}=\overline{b}$, точка *К* – середина стороны *BC*. Выразить вектор $\overline{AK}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Решение.



Если на векторах $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AC}=\overline{b}$ достроить параллелограмм *ABDC*, то окажется, что точка *К* – точка пересечения его диагоналей. Тогда, по правилу параллелограмма сложения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, вектор $\overline{AK}$ равен половине вектора суммы $\overline{a}+\overline{b}$ .. Поэтому, $\overline{AK}=\frac{1}{2}\left(\overline{a}+\overline{b}\right)$.

Задание 2. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Найти его четвертую вершину *D*.

Решение.

$$\overline{AB} = B - A = \left(3-1;\ 2-(-2);\ 1-3\right) = \left(2;\ 4;\ (-2)\right).$$

Обозначим координаты точки D через $(x;\ y;\ z)$. Тогда

$$\overline{DC} = C - D = \left(6-x;\ 4-y;\ 4-z\right).$$

Т. к. $ABCD$ – параллелограмм, то $\overline{AB} = \overline{DC}$. Следовательно,

$$6 - x = 2;\ 4 - y = 4;\ 4 - z = -2.$$

Отсюда, $x = 4;\ y = 0;\ z = 6.$

Ответ: $D(4;\ 0;\ 6)$.

Задание 3. Найти координаты вектора $\overline{a} \times \left(2\overline{a} + \overline{b}\right)$, если $\overline{a} = \left(3; -1; -2\right)$, $\overline{b} = \left(1; 2; -1\right)$.

Решение.

1) $2\overline{a} + \overline{b} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix};$

2) $\overline{a} \times \left(2\overline{a} + \overline{b}\right) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} =$

$$= 5\overline{i} + 29\overline{j} + 7\overline{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\overline{a} \times \left(2\overline{a} + \overline{b}\right) = (5;\ 29;\ 7)$.

Задание 4. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2-8x+12=0$.

Решение.

Центр окружности $x^2+y^2=9$: $O_1(0;0)$.

Для того чтобы найти центр окружности: $x^2+y^2-8x+12=0$, приведем это уравнение к каноническому виду:

$$x^2+y^2-8x+12=0;$$
$$x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2-4^2+y^2+12=0;$$
$$\left(x-4\right)^2-16+y^2+12=0;$$
$$\left(x-4\right)^2+y^2=4.$$

Центр этой окружности: $\left(x-4\right)^2+y^2=4$: $O_2(4;0)$.

Отсюда находим расстояние: O_1O_2:

$$\left|\overline{O_1O_2}\right|=\sqrt{\left(4-0\right)^2+\left(0-0\right)^2}=4.$$

Ответ: $O_1O_2=4$.

5.2.39. Образец выполнения контрольной работы № 3

Задание 1. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+3n^3-6n+7}{5n^3-4n^2+8n-9}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+9}{3n^2+4}\right)^{2n^2+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+7}{e^{(x+3)}-e}$. 4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^3+x^2-5x-10}{3x^2-x-10}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{x^3+2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arcsin^2\left(2x\right)}{tg^3\left(3x\right)}$.

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{x^2-3x+2}$. 8. $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{ln\left(6-x^2\right)}{e^{x^2-5}-1}$.

Решение.

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n^3-6n+7}{5n^3-4n^2+8n-9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n^2}{n^3}+\frac{3n^3}{n^3}-\frac{6n}{n^3}+\frac{7}{n^3}}{\frac{5n^3}{n^3}-\frac{4n^2}{n^3}+\frac{8n}{n^3}-\frac{9}{n^3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+3-\frac{6}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{5-\frac{4}{n}+\frac{8}{n^2}-\frac{9}{n^3}}=\frac{\frac{5}{\infty}+3-\frac{6}{\infty}+\frac{7}{\infty}}{5-\frac{4}{\infty}+\frac{8}{\infty}-\frac{9}{\infty}}=\frac{0+3-0+0}{5-0+0-0}=\frac{3}{5}.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+9}{3n^2+4}\right)^{2n^2+1}=\left[1^\infty\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n^2+9}{3n^2+4}-1\right)^{2n^2+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n^2+9-\left(3n^2+4\right)}{3n^2+4}\right)^{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{3n^2+4}\right)^{2n^2+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n^2+4}{5}}\right)^{\frac{3n^2+4}{5}\left(2n^2+1\right)\frac{5}{3n^2+4}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^2+5}{3n^2+4}}=e^{\frac{10}{3}}.$$

3) $$\lim_{x\to-2}\frac{3x+7}{e^{(x+3)}-e}=\frac{3\cdot(-2)+7}{e^{(-2+3)}-e}=\frac{1}{0}=\infty.$$

4) $$\lim_{x\to2}\frac{2x^3+x^2-5x-10}{3x^2-x-10}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{разделим числитель и знаменатель на } (x-a), \textit{т.е. на } (x-2):\\[4pt]
\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l}2x^3+x^2-5x-10\\ 2x^3-4x^2\end{array} & \dfrac{x-2}{2x^2+5x+5}\\ \hline -\begin{array}{l}5x^2-5x\\ 5x^2-10x\end{array} & \\ \hline -\begin{array}{l}5x-10\\ 5x-10\end{array} & \\ \hline 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l}3x^2-x-10\\ 3x^2-6x\end{array} & \dfrac{x-2}{3x+5}\\ \hline -\begin{array}{l}5x-10\\ 5x-10\end{array} & \\ \hline 0 & \end{array}
\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x^2+5x+5)}{(x-2)(3x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+5x+5}{3x+5}=\frac{23}{11}.$$

5) $$\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{x+9}}{x^3+2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(3-\sqrt{x+9})(3+\sqrt{x+9})}{(x^3+2x)(3+\sqrt{x+9})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3^2-(\sqrt{x+9})^2}{(x^3+2x)(3+\sqrt{x+9})}=\lim_{x\to 0}\frac{9-x-9}{(x^3+2x)(3+\sqrt{x+9})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(x^2+2)(3+\sqrt{x+9})}=\frac{-1}{(0+2)(3+\sqrt{0+9})}=\frac{-1}{2\cdot(3+3)}=-\frac{1}{12}$$

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin^2(2x)}{tg^3(3x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{arcsin^2(2x)}{(2x)^2}\cdot(2x)^2}{\dfrac{tg^3(3x)}{(3x)^3}\cdot(3x)^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{arcsin(2x)}{2x}\right)^2\cdot(2x)^2}{\left(\dfrac{tg(3x)}{3x}\right)^3\cdot(3x)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot(2x)^2}{1\cdot(3x)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{27x^3}=.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4}{27x}=\frac{4}{0}=\infty$$

7) $$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2-1}-1}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{e^{x^2-1}-1}{x^2-1}\cdot\left(x^2-1\right)}{x^2-3x+2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=\frac{2}{-1}=-2$$

8) $$\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{ln\left(6-x^2\right)}{e^{x^2-5}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{\frac{ln\left(1+5-x^2\right)}{5-x^2}\cdot\left(5-x^2\right)}{\frac{e^{x^2-5}-1}{x^2-5}\cdot\left(x^2-5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{1\cdot\left(5-x^2\right)}{1\cdot\left(x^2-5\right)}=-1.$$

5.2.40. Образец выполнения контрольной работы № 4

Задание 1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $$\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{ln\left(6-x^2\right)}{e^{x^2-5}-1};\quad б)\lim_{x\to 0}x\ln 2x.$$

Решение.

а) $$\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{ln\left(6-x^2\right)}{e^{x^2-5}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{\left(ln\left(6-x^2\right)\right)'}{\left(e^{x^2-5}-1\right)'}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{\frac{1}{\left(6-x^2\right)}\cdot(-2x)}{e^{x^2-5}\cdot 2x}=$$

$$=-\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{1}{e^{x^2-5}\left(6-x^2\right)}=-\frac{1}{1\cdot 1}=-1.$$

б) $$\lim_{x\to 0}x\ln 2x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln 2x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(\ln 2x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2x}\cdot 2}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

Задание 2. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^{\frac{3}{5}}-\dfrac{4}{\sqrt{x^9}}+2\sqrt[7]{x}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x^2-10}$;

в) $y=arctg\sqrt{x^2+1}$; г) $\left(\cos(3x-4)+8^x\right)\left(\sin(6+7x)-x^9\right)$;

д) $y=x^{x^2}$.

Решение.

а) $$y'=\left(5x^{\frac{3}{5}}-\frac{4}{\sqrt{x^9}}+2\sqrt[7]{x}\right)'=\left(5x^{\frac{3}{5}}-\frac{4}{x^{\frac{9}{2}}}+2x^{\frac{1}{7}}\right)'=$$

$$=\left(5x^{\frac{3}{5}}-4x^{-\frac{9}{2}}+2x^{\frac{1}{7}}\right)'=5\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}-4\left(-\frac{9}{2}\right)x^{-\frac{9}{2}-1}+2\cdot\frac{1}{7}x^{\frac{1}{7}-1}=$$

$$=3x^{-\frac{2}{5}}+18x^{-\frac{11}{2}}+\frac{2}{7}x^{-\frac{6}{7}}=\frac{3}{x^{\frac{2}{5}}}+\frac{18}{x^{\frac{11}{2}}}+\frac{2}{7x^{\frac{6}{7}}}=\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}}+\frac{18}{\sqrt{x^{11}}}+\frac{2}{7\sqrt[7]{x^6}}.$$

б) $$y'=\left(\frac{\ln x}{x^2-10}\right)'=\frac{(\ln x)'(x^2-10)-\ln x(x^2-10)'}{(x^2-10)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{x}\cdot(x^2-10)-2x\ln x}{(x^2-10)^2}=\frac{x^2-10-2x^2\ln x}{x(x^2-10)^2}.$$

в) $$y'=\left(arctg\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=$$

$$=\frac{1}{1+x^2+1}\cdot\left(\left(x^2+1\right)^{1/2}\right)'=\frac{1}{x^2+2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{-1/2}\cdot\left(x^2+1\right)'=$$

$$=\frac{1}{x^2+2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{1/2}}\cdot 2x=\frac{x}{\left(x^2+2\right)\sqrt{x^2+1}}.$$

г) $y'=\left(\left(cos(3x-4)+8^x\right)\left(sin(6+7x)-x^9\right)\right)'=$

$$=\left(cos(3x-4)+8^x\right)'\left(sin(6+7x)-x^9\right)+$$

$$+\left(sin(6+7x)-x^9\right)'\left(cos(3x-4)+8^x\right)=$$

$$=\left(-sin(3x-4)\cdot(3x-4)'+8^x ln8\right)\cdot\left(sin(6+7x)-x^9\right)+$$

$$+\left(cos(6+7x)\cdot(6+7x)'-9x^8\right)\cdot\left(cos(3x-4)+8^x\right)=$$

$$=\left(-3sin(3x-4)+8^x ln8\right)\cdot\left(sin(6+7x)-x^9\right)+$$

$$+\left(7cos(6+7x)-9x^8\right)\cdot\left(cos(3x-4)+8^x\right).$$

д) $y=x^{x^2}$.

Пролагорифмируем обе части равенства:

$$\ln y=\ln\left(x^{x^2}\right);\qquad \ln y=x^2\ln x.$$

Продифференцируем обе части равенства:

$$\frac{y'}{y}=2x\ln x+x^2\frac{1}{x};\ y'=y\left(2x\ln x+x\right);\ y'=x^{x^2}\left(2x\ln x+x\right).$$

Задание 3. Найти интервалы монотонности, экстремумы функции:

$$y=\frac{1}{x^2+3}.$$

Решение.

Найдем первую производную:

$$y'=\left(\frac{1}{x^2+3}\right)'=-\frac{1}{\left(x^2+3\right)^2}(x^2+3)'=-\frac{2x}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

Ищем критические точки 1 рода:

$$y' = 0, \quad -\frac{2x}{\left(x^2+3\right)^2} = 0, \quad x = 0.$$

При $x \in (-\infty, 0)$ значения производной положительные, поэтому функция возрастает.

При $x \in (0, +\infty)$ значения производной отрицательные, поэтому функция убывает.

$x = 0$ – точка максимума, $y_{\max} = y(0) = \dfrac{1}{0^2+3} = \dfrac{1}{3}$.

5.2.41. Образец выполнения контрольной работы № 5

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int sin^3 x\, cos\, x\, dx; \quad \text{б) } \int x\sqrt{x+4}\,dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{3+2\,sin\,x+cos\,x}; \quad \text{г) } \int (3x+2)\, sin\, 2x\, dx;$$

$$\text{д) } \int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx; \quad \text{е) } \int \frac{3x^2 - x^5 e^x - 14}{x^5}\,dx.$$

Решение.

а) $\displaystyle\int sin^3 x\, cosx\, dx = \left|cosx\, dx = d\ sinx\right| = \int sin^2 x\, d\ sinx = \frac{sin^3 x}{3} + C$.

б) $\displaystyle\int x\sqrt{x+4}\,dx = \left|\begin{matrix} \sqrt{x+4} = t, \quad x = t^2-4 \\ dx = (t^2-4)'dt = 2tdt \end{matrix}\right| = \int (t^2-4)\cdot t\cdot 2tdt =$

$$= 2\int\left(t^4-4t^2\right)dt = 2\left(t^4-4t^2\right)+C = 2\frac{t^5}{5} - 8\frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x+4)^5} - \frac{8}{3}\sqrt{(x+4)^3} + C.$$

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x} =$

$$=\left|\begin{matrix} tg\dfrac{x}{2}=t, \quad x=2arctgt \\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right| =\int\frac{\dfrac{2}{1+t^2}dt}{3+2\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{\dfrac{2}{1+t^2}dt}{\dfrac{3+3t^2+4t+1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\dfrac{2}{1+t^2}dt}{\dfrac{2t^2+4t+4}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+2t+2}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t+1)^2+1}=\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1}=arctg(t+1)+C=arctg\left(tg\frac{x}{2}+1\right)+C\,.$$

г) $\int(3x+2)sin\,2x\,dx=$

$$=\left|\begin{matrix} u=3x+2 \quad\Rightarrow\quad du=(3x+2)'dx=3dx \\ dv=sin\,2x\,dx \quad\Rightarrow\quad v=\int dv=\int sin\,2x\,dx=-\dfrac{1}{2}sin\,2x\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x+2)cos2x-\int-\frac{1}{2}cos2x\cdot 3dx=-\frac{1}{2}(3x+2)cos2x+$$

$$+\frac{3}{2}\int cos2xdx=-\frac{1}{2}(3x+2)cos2x+\frac{3}{4}sin2x+C.$$

д) $\displaystyle\int\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx.$

Разложим знаменатель на множители:

$$(x^2+2x-3)(x-4)=(x-1)(x+3)(x-4).$$

Дробь, стоящая под интегралом правильная. Разложим ее на простейшие:

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-4}\,.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$2x^2+41x-91=A(x+3)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x+3)\,;$$

$$2x^2+41x-91=A(x^2-x-12)+B(x^2-5x+4)+C(x^2+2x-3);$$

$$2x^2+41x-91=(A+B+C)x^2+$$
$$+(-A-5B+2C)x+(-12A+4B-3C).$$

Левая часть равенства должна быть тождественно равна правой. Это будет иметь место только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства будут равны между собой.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{r|r} x^2 & A+B+C=2 \\ x & -A-5B+2C=41 \\ x^0 & -12A+4B-3C=-91 \end{array}$$

Решив эту систему, получим: $A=4,\quad B=-7,\quad C=5$.

$$\int\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx=\int\frac{4}{x-1}dx-\int\frac{7}{x+3}dx+\int\frac{5}{x-4}dx=$$

$$=4\int\frac{d(x-1)}{x-1}-7\int\frac{d(x+3)}{x+3}+5\int\frac{d(x-4)}{x-4}=$$

$$=4\ln|x-1|-7\ln|x+3|+5\ln|x-4|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C.$$

е) $$\int\frac{3x^2-x^5e^x-14}{x^5}dx=\int\left(\frac{3x^2}{x^5}-\frac{x^5e^x}{x^5}-\frac{14}{x^5}\right)dx=$$

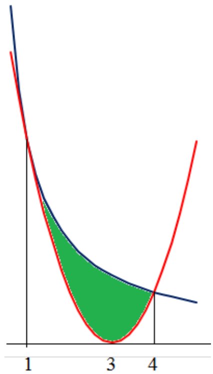
$$=\int\left(3x^{-3}-e^x-14x^{-5}\right)dx=3\int x^{-3}dx-\int e^xdx-14\int x^{-5}dx=$$

$$=3\frac{x^{-2}}{-2}-e^x-14\frac{x^{-4}}{-4}+C=-\frac{3}{2x^2}-e^x+\frac{7}{2x^4}+C.$$

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=(x-3)^2, \quad y=\frac{4}{x}.$$

Решение. Уравнению $y=(x-3)^2$ соответствует парабола с вершиной в точке $x=3$, $y=0$. Уравнению $y=\frac{4}{x}$ соответствует гипербола.



Найдем точки пересечения заданных линий: $\begin{cases} y=(x-3)^2, \\ y=\frac{4}{x}. \end{cases}$:

$$(x-3)^2=\frac{4}{x}; \quad x^3-6x^2+9x-4=0;$$

$$x^3-x^2-5x^2+5x+4x-4=0;$$

$$x^2(x-1)-5x(x-1)+4(x-1)=0, \quad (x-1)^2(x-4)=0;$$

$$x_1=1, \quad x_2=4.$$

$$\int_1^4\left(\frac{4}{x}-(x-3)^2\right)dx=\int_1^4\left(\frac{4}{x}-x^2+6x-9\right)dx=$$

$$=\left(4ln|x|-\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}-9x\right)\Bigg|_1^4=4ln4-\frac{64}{3}+6\cdot\frac{16}{2}-36-$$

$$-4ln1+\frac{1}{3}-6\cdot\frac{1}{2}+9=4ln4-\frac{64}{3}+18+\frac{1}{3}=4ln4-3 \text{ (кв. ед.).}$$

5.2.42. Образец выполнения контрольной работы № 6

Задание 1. Буквы азбуки Морзе представляют собой набор “точек” и “тире”. Сколько букв может быть в азбуке Морзе, если буква не должна содержать более четырех знаков?

Решение.

Количество букв, состоящих из одного знака – 2.

Количество букв, состоящих из двух знаков – 2*2 = 4 способа, т. к. первый знак можно выбрать 2 способами, и второй знак можно выбрать 2 способами. Оба знака – по правилу умножения – 2*2 = 4 способами.

Аналогично, количество букв, состоящих из трех знаков – 2*2*2 = 8, количество букв, состоящих из четырех знаков: $2^4 = 16$.

Поэтому, по правилу сложения, количество букв, содержащих не более четырех знаков: 2+4+8+16 = 30.

Ответ: 30 букв.

Задание 2. Найти число таких перестановок семи учеников, сидящих на скамейке, чтобы три определенных ученика находились рядом.

Решение.

Количество перестановок этих трех учеников между собой: $P_3 = 3! = 3*2*1= 6$.

Количество перестановок других четырех учеников между собой: $P_4 = 4! = 4*3*2*1=24$.

Количество тройных подряд мест $(123, 234, 345, 456, 567)$ на скамейке: 5.

Следовательно, по правилу умножения, все эти действия можно выполнить 6*24*5= 720 способами.

Ответ: 720 перестановок.

Задание 3. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1, и 4 детали – заводом № 2. Наудачу взяты 2 детали.

Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом № 1.

Решение.

Введем обозначения событий:

A: «хотя бы одна из взятых деталей – завода № 1»;

$\overline{A}$: «ни одна из взятых деталей – завода № 1»;

B_1: «первая извлеченная деталь – завода № 2»;

B_2: «вторая извлеченная деталь – завода №2».

Тогда,

$$\overline{A} = B_1 * B_2,$$

и, по теореме умножения вероятностей для зависимых событий,

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left(B_1 * B_2\right) = P\left(B_1\right) * P_{B_1}\left(B_2\right) = \frac{4}{20} * \frac{3}{19} = \frac{3}{95}.$$

Отсюда следует: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{95} = \frac{92}{95}$.

Ответ: $\frac{92}{95}$.

Задание 4. В первом ящике 6 шаров: 1 белый, 2 красных и 3 синих. Во втором ящике 12 шаров: 2 белых, 6 красных, 4 синих. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров нет синих?

Решение.

Пусть события:

A: «среди вынутых шаров нет синих»;

B_1 – «из первого ящика извлеченная деталь – не синяя»;

B_2 – «из второго ящика извлеченная деталь – не синяя».

Тогда $A = B_1 \cdot B_2$ и, по теореме умножения вероятностей для независимых событий:

$$P\left(A\right) = P\left(B_1 \cdot B_2\right) = P\left(B_1\right) \cdot P\left(B_2\right) = \frac{1+2}{6} \cdot \frac{2+6}{12} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задание 5. В каждом из двух ящиков: 2 бракованные детали и 10 небракованных. Из первого ящика одну деталь переложили во второй. Затем из второго ящика извлекли деталь. Найти вероятность того, что она небракованная.

Решение.

Пусть события:

A: «Из второго ящика извлеченная деталь – небракованная»;

*B*1: «Из первого ящика переложенная деталь – небракованная»;

*B*2: «Из первого ящика переложенная деталь – бракованная».

Тогда $P\left(B_1\right)=\frac{10}{12}$, $P\left(B_2\right)=\frac{2}{12}$, и, по формуле полной вероятности:

$$P\left(A\right)=P\left(B_1\right)\cdot P_{B_1}\left(A\right)+P\left(B_2\right)\cdot P_{B_2}\left(A\right),$$

где

$P_{B_1}\left(A\right)$ – вероятность того, что «Из второго ящика извлеченная деталь – небракованная», при условии того, что «Из первого ящика переложенная деталь – небракованная»;

$P_{B_2}\left(A\right)$ – вероятность того, что «Из второго ящика извлеченная деталь – небракованная», при условии того, что «Из первого ящика переложенная деталь – бракованная».

С учетом того, что $P_{B_1}\left(A\right)=\frac{11}{13}$, $P_{B_1}\left(A\right)=\frac{10}{13}$, получаем:

$$P\left(A\right)=\frac{10}{12}\cdot\frac{11}{13}+\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{13}=\frac{55+10}{78}=\frac{65}{78}=\frac{5}{6}.$$

Ответ: $\frac{5}{6}$.

5.2.43. Образец выполнения контрольной работы № 7

Задание 1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z=X+2Y$, если известны: $M(X)=5$, $M(Y)=3,$, $D(X)=2$, $D(Y)=4$.

Решение.

$$M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) =$$
$$= M(X) + 2M(Y) = 5 + 2 \cdot 3 = 11;$$
$$D(Z) = D(X + 2Y) = D(X) + D(2Y) =$$
$$= D(X) + 4M(Y) = 2 + 4 \cdot 4 = 18.$$

Задание 2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, распределенной равномерно в интервале (4;10).

Решение. Если случайная величина распределена по равномерному закону, то

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

По условию задачи: $a = 4$, $b = 10$, тогда

$$M(X) = \frac{4+10}{2} = 7; \quad D(X) = \frac{(10-4)^2}{12} = 3; \quad \sigma(X) = \sqrt{3}.$$

Задание 3. В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 20 %. Составить закон распределения случайной величины *X* – числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года.

Решение.

Пусть *X* – дискретная случайная величина, равная числу банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года. Она может принимать значения 0, 1, 2, 3 и 4.

ДСВ *X* распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 4$, $p = 0,2$, $q = 0,8$, поэтому найдем соответствующие вероятности по формуле Бернулли: $P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Получаем:

$$P(X = 0) = P_4(0) = C_4^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^4 = 0,4096;$$
$$P(X = 1) = P_4(1) = C_4^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^3 = 0,4096;$$

$$P(X=2)=P_4(2)=C_4^2\cdot 0,2^2\cdot 0,8^2=0,1536;$$
$$P(X=3)=P_4(3)=C_4^3\cdot 0,2^3\cdot 0,8^1=0,0256;$$
$$P(X=4)=P_4(4)=C_4^4\cdot 0,2^4\cdot 0,8^0=0,0016.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$0,4096$	$0,4096$	$0,1536$	$0,0256$	$0,0016$

.

Расчеты произведены правильно, так как $\sum p_i=1$.

Задача 4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	-1	2	3	4
p_i	$0,4$	p_2	$0,1$	$0,2$

.

Найти**:** $p_2, M(X), D(X)$.

Решение.

Сначала найдем p_2 из условия $\sum p_i=1$:

$$0,4+p_2+0,1+0,2=1;\quad p_2=0,3.$$

Математическое ожидание вычислим по формуле $M(X)=\sum x_i p_i$:

$$M(X)=-1\cdot 0,4+2\cdot 0,3+3\cdot 0,1+4\cdot 0,2=1,3.$$

Дисперсию можно вычислить исходя из ее определения, но удобнее воспользоваться формулой: $D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2$.

Запишем закон распределения X^2:

x_i^2	1	4	9	16
p_i	$0,4$	$0,3$	$0,1$	$0,2$

.

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2)=1\cdot 0,4+4\cdot 0,3+9\cdot 0,1+16\cdot 0,2=5,7.$$

Найдем искомую дисперсию:

$$D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2=5,7-1,3^2=4,01.$$

5.2.44. Образец выполнения контрольной работы № 8

Задание 1. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону, а именно: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{32}}$. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение.

Плотность нормального распределения $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, причем $M(X) = a$, $D(X)=\sigma^2$.

Поэтому, $M(X) = 2$; $2\sigma^2=32\Rightarrow\sigma^2=16$, т. е. $D(X)=16$.

Задание 2. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ a\left(x-1\right), & 1\le x\le 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Требуется: а) найти коэффициент a; б) найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; в) вычислить вероятность $P(0<X<3)$.

Решение.

а) Найдем параметр a из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)=1$. Получаем:

$$\int\limits_1^3 f(x)dx=\int\limits_1^3 a(x-1)dx=a\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^3=a\left(\frac{9}{2}-3-\frac{1}{2}+1\right)=2a;$$

$2a$=1; откуда $a=\dfrac{1}{2}$. Тогда $f(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ \dfrac{x-1}{2}, & 1\le x\le 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$

б) Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$M(X)=\int_1^3 f(x)\cdot x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^3 (x-1)\cdot x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^3 (x^2-x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3=\frac{1}{2}\left(\frac{27}{3}-\frac{9}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{3};$$

$$D(X)=\int_1^3 f(x)\cdot x^2\,dx-M^2(X)=\frac{1}{2}\int_1^3 (x-1)\cdot x^2\,dx-\left(\frac{7}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 (x^3-x^2)\,dx-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3-\frac{49}{9}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3^4}{4}-\frac{3^3}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)-\frac{49}{9}=\frac{2}{9};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{2}}{9}.$$

в) Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал:

$$P(0<X<3)=\int_0^3 f(x)\,dx=$$

$$=\int_0^1 0\,dx+\int_1^3 \frac{x-1}{2}\,dx=0+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^3==\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-3-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$$

5.2.45. Образец выполнения контрольной работы № 9

Задание 1. Произведена выборка:

x_i	1	4	6	10
n_i	5	10	25	10

.

Требуется:

а) построить полигон распределения; б) вычислить выборочную среднюю, дисперсию, моду, медиану; в) построить эмпирическую функцию распределения.

Решение.

а) Построим полигон распределения:

б) Вычислим выборочную среднюю, дисперсию, моду, медиану:

x_i	1	4	6	10	$\sum$
n_i	5	10	25	10	**50**
n_x	5	15	40	50	
$x_i\, n_i$	5	40	150	100	**295**
$x_i^2 n_i$	5	160	900	1000	**2065**

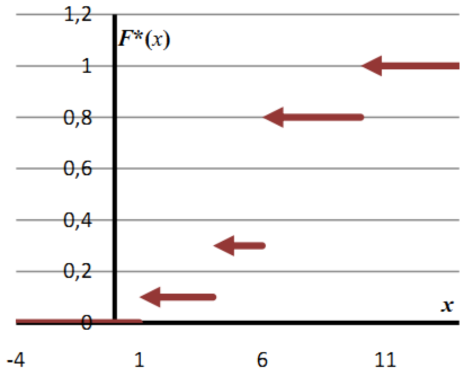
$$\bar{x}_в = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{295}{50} = 5{,}9;$$

$$D_в = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \left(\bar{x}_в\right)^2 = \frac{2065}{50} - (5{,}9)^2 = 6{,}69.$$

Мода – это варианта, имеющая наибольшую частоту. Наибольшая частота равна 25. Ей соответствует варианта 6. Следовательно, $Mo = 6$.

Объем заданного распределения составляет $n = 50$. Разделив объем выборки пополам, получим число 25. Среди накопленных частот найдем число 25 или первое большее 25 число. Это число 40. Варианта, соответствующая числу 40, и будет медианой, т. о. $Me = 6$.

Запишем искомую эмпирическую функцию распределения $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$ и построим ее график:



$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 1; \\ 0{,}1 & при \quad 1 < x \le 4; \\ 0{,}3 & при \quad 4 < x \le 6; \\ 0{,}8 & при \quad 6 < x \le 10; \\ 1 & при \quad x > 10. \end{cases}$$

Задание 2. В результате 5 измерений некоторой физической величины получены данные: 2, 4, 7, 4, 5. Найти несмещенные точечные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии. Вычислить моду и медиану.

Решение. Доказывается, что несмещенной точечной оценкой генеральной средней является выборочная средняя, а генеральной дисперсии – исправленная выборочная дисперсия.

Находим выборочную среднюю:

$$\bar{x}_в = \frac{2+4+7+4+5}{5} = \frac{22}{5} = 4{,}4.$$

Находим выборочную дисперсию:

$$D_в = \frac{2^2+4^2+7^2+4^2+5^2}{5} - (4{,}4)^2 = 2{,}64.$$

Находим исправленную выборочную дисперсию:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{5}{4} \cdot 2,64 = 3,3.$$

Так как мода – наиболее часто встречающееся значение, то $M_o = 4$.

Медиана – варианта, делящая вариационный ряд на равные по объему части. Для нахождения медианы первоначально ранжируем ряд наблюдений, получим: 2, 4, 4, 5, 7. В центре ранжированного ряда находится значение 4, следовательно, $M_e = 4$.

Задание 3. По данным 12 независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметическое результатов отдельных измерений $\overline{x_в} = 16,8$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 1,5$. Оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью $\gamma = 0,95$.

Решение. Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию, поэтому задача сводится к оценке математического ожидания (при неизвестном σ) при помощи доверительного интервала:

$$\overline{x_в} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

покрывающего *a* с надежностью $\gamma = 0,95$.

По таблице по $\gamma = 0,95$ и n = 12, находим $t_\gamma = 2,20$.

Подставляя значения в формулу, получим доверительный интервал:

$$16,8 - 2,20 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{12}} < a < 16,8 + 2,20 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{12}};$$

$$15,85 < a < 17,75.$$

5.2.46. Образец выполнения контрольной работы № 10

Задание 1. Используя критерий χ^2 на уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки:

n_i	14	18	32	70	20	36	10
n_i'	10	24	34	80	18	22	12

.

Решение. Для ответа на поставленный вопрос вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона. Для удобства составим таблицу:

n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$(n_i - n_i')^2 / n_i'$
14	10	4	16	1,6
18	23	-6	36	1,5
32	34	-2	4	0,1176
70	80	-10	100	1,25
20	18	2	4	0,222
36	22	14	196	8,909
10	12	-2	4	0,333
				$\chi^2_{набл} \approx 13,93$

По таблице критических точек распределения хи-квадрат по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы k = 7–3 = 4, находим $\chi^2_{крит}(\alpha; k) = \chi^2_{крит}(0,05; 4) = 9,5.$. Итак, $\chi^2_{набл} > \chi^2_{крит}$, следовательно, гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности отвергается.

Задание 5. Найти выборочное уравнение линейной регрессии Y на X и выборочный коэффициент корреляции. Сделать вывод о силе связи.

X	6	2	15	9	12	5	8
Y	82	86	43	74	58	90	78

Решение. Составим расчетную таблицу:

№	x	y	xy	x^2	y^2
1	6	82	492	36	6724
2	2	86	172	4	7396

3	15	43	645	81	5476
4	9	74	666	81	5476
5	12	58	696	144	3364
6	5	90	450	25	8100
7	8	78	624	64	6084
Итого:	**57**	**511**	**3745**	**579**	**38993**

Подставим соответствующие суммы в формулы:

$$k = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

$$k = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

(или в систему нормальных уравнений) получим:

$$k = \frac{7\cdot 3745 - 57\cdot 511}{7\cdot 579 - (57)^2} = -\frac{2912}{804} \approx -3,62,$$

$$b = \frac{579\cdot 511 - 3745\cdot 57}{7\cdot 579 - (57)^2} = \frac{82404}{804} \approx 102,49.$$

Следовательно, уравнение регрессии будет иметь вид:

$$y = -3,62x + 102,49\,.$$

Для расчета коэффициента корреляции, используя формулу

$$r_в = \frac{n\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} x_i y_i n_{ij} - \left(\sum_{i=1}^{l} x_i n_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_i n_j\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{l} x_i^2 n_i - \left(\sum_{i=1}^{l} x_i n_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{j=1}^{m} y_j^2 n_j - \left(\sum_{j=1}^{m} y_i n_i\right)^2}},$$

получим:

$$r_в = \frac{7\cdot 3745 - 57\cdot 511}{\sqrt{7\cdot 579 - 57^2}\sqrt{7\cdot 38993 - 511^2}} = \frac{-2912}{\sqrt{804}\sqrt{11830}} = -0,944.$$

Так как $r_в < 0,$, то связь между успеваемостью и количеством пропущенных пар обратная, т. е. с увеличением числа пропущенных пар успеваемость студентов снижается. Используя шкалу Чеддока, сделаем вывод, что эта связь весьма высокая.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

Л1.1. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2017. 288 с.

Л1.2. *Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н.* Высшая математика для экономических специальностей: учебник и практикум, 2010.

Л1.3. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. М.: Юрайт-Издат, 2010.

Л1.4. *Сидняев Н.И.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для бакалавров. М.: Юрайт, 2011.

6.1.2. Дополнительная литература

Л2.1 *Ермаков В.И.* Общий курс высшей математики для экономистов: учебник. М.: ИНФРА-М, 2003.

Л2.2 Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. М.: Айрис-пресс, 2008. 576 с.

Л2.3. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. М.: Айрис-пресс, 2008.

Л2.4 *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для прикладного бакалавриата. М.: Юрайт, 2014.

6.1.3. Методические разработки

Л3.1. *Лелевкина Л.Г.* Основы линейной и векторной алгебры: учеб.-метод. пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2001.

Л3.2. *Лелевкина Л.Г., Курманбаева А.К.* Векторная алгебра: учебно-методическое пособие для компьютерного тестирования. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2010.

Л3.3. *Федорова Е.С., Эгембердиев Ш.А.* Типовые расчеты по аналитической геометрии. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2003.

Л3.4. *Курманбаева А.К., Комарцова Е.А.* Линейная алгебра. Ч. 1: учебно-методическое пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2015.

Л3.5. *Курманбаева А.К., Комарцова Е.А.* Линейная алгебра. Ч. 2: учебно-методическое пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2017.

Л3.6. *Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.* Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента: учебно-методическое пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2009.

Л3.7. *Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.* Дифференцирование функций одной переменной: контрольно-обучающая компьютерная программа тестирования. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2009.

Л3.8. *Лелевкина Л.Г., Карабакиров К.Р.* Методы интегрирования неопределенных интегралов: учебное пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2017.

Л3.9. *Давидюк Т.А., Гончарова И.В.* Определенный интеграл и его приложения: учебно-методическое пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2010.

Л3.10. *Эгембердиев Ш.А.* Теория вероятностей: учебно-методическое пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2011.

Л3.11. *Давидюк Т.А., Гончарова И.В.* Методические указания к решению задач по теории вероятностей: методические указания. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2014.

Л3.12. *Эгембердиев Ш.А., Белеков К.Ж.* Математическая статистика: учебное пособие для студ. экон. направлений. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2014.

Л3.13. *Гончарова И.В., Комарцов Н.М., Комарцова Е.А.* Математическая статистика: учебное пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2015.

6.2. Перечень информационных и образовательных технологий

Компентентностно-ориентированные образовательные технологии

При проведении лекционных занятий по дисциплине «Математика» целесообразно использовать мультимедийное презентационное оборудование, чтобы сделать более наглядными и понятными доказательства теорем, методики и алгоритмы решения задач и примеров, иллюстрирующих теоретические выводы и их прикладную направленность. Преподаватель использует компьютерные и мультимедийные средства обучения презентации, мультимедиа-лекции, интерактивную доску, а также наглядно-иллюстрационные (в том числе раздаточные) материалы.

КОПТ (Компьютерные программы тестирования):

Разделы: «Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента», «Дифференцирование функции одной переменной», «Неопределенные интегралы», «Определенные интегралы», «Случайные события».

Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения

Кафедра «Высшая математика» имеет постоянно действующий сайт, на котором содержится весь необходимый теоретический и практический материал для студентов, учебно-методические пособия (ЭУМП), учебно-методический комплекс данной специальности (ЭУМК), необходимый учебный материал (ЭУМ), электронный учебный курс (ЭУК) и электронная библиотека. Данные материалы размещены на сайте кафедры http://matem.krsu.edu.kg/.

ЭУМП:

1. *Лелевкина Л.Г., Джаналиева Ж.Р., Доулбекова С.Б.* Основы аналитической геометрии. http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/ 2012.pdf

2. *Лелевкина Л.Г., Курманбаева А.К.* Векторная алгебра. http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/9vectalg.pdf

3. *Курманбаева А.К., Комарцова Е.А.* Линейная алгебра. http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/linalg2015.pdf

4. *Федорова Е.С., Шемякина Т.А.* Линейная алгебра. http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/11linalg.pdf

5. *Федорова Е.С., Эгембердиев Ш.А.* Типовые расчеты по аналитической геометрии. http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/17analgeom.pdf

6. *Джаналиева Ж.Р., Доулбекова С.* Аналитическая геометрия. http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/21analgeom.pdf

7. *Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.* Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента. http://math.krsu.edu.kg/metodich/limits.pdf

8. *Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.* Дифференцирование функций одной переменной. http://math.krsu.edu.kg/ metodich/ diffunc.pdf

9. *Давидюк Т.А., Гончарова И.В.* Определенный интеграл и его приложения. http://math.krsu.edu.kg/metodich/oprint.pdf

10. *Давидюк Т.А., Гончарова И.В.* Методические указания к решению задач по теории вероятностей. http://math.krsu.edu.kg/metodich/metodich_tv.pdf

11. *Эгембердиев Ш.А.* Теория вероятностей. http://math.krsu.edu.kg/ metodichEgemberdievTeoriaVeroyatnostey.pdf

12. *Эгембердиев Ш.А.* Математическая статистика. http://math.krsu.edu.kg/images/matstat_egemberdiev.pdf

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для изучения дисциплины используется аудиторный фонд университета, в том числе оснащенный мультимедийным проектором и интерактивной доской. Помимо рекомендованной литературы для изучения дисциплины на сайте кафедры имеются электронные версии конспектов лекций по курсу, учебных, учебно-методических пособий, рабочих программ, разработанных сотрудниками кафедры по всем разделам курса.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Математика» состоит из десяти модулей: пять модулей в первом семестре, и пять модулей – во втором семестре. Технологические карты дисциплины имеют вид:

1 семестр

Название модулей дисциплины согласно РПД	Контроль	Форма контроля	Зачетный минимум	Зачетный максимум	график контроля
Модуль 1					
Матричная алгебра и системы линейных алгебраических уравнений	Текущий контроль	Активность, посещаемость, СРС (типовой расчет, дом. задание)	6	9	7
	Промежуточный контроль	Контрольная работа	4	7	

<table>
<tr><td colspan="6">Модуль 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Векторная алгебра и аналитическая геометрия</td><td>Текущий контроль</td><td>Активность, посещаемость, СРС (типовой расчет, дом. задание)</td><td>6</td><td>9</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>Промежуточный контроль</td><td>Контрольная работа (тест)</td><td>4</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="6">Модуль 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Пределы последовательностей и функций</td><td>Текущий контроль</td><td>Активность, посещаемость, СРС (типовой расчет, дом. задание)</td><td>4</td><td>7</td><td rowspan="2">13</td></tr>
<tr><td>Промежуточный контроль</td><td>Контрольная работа (тест)</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="6">Модуль 4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Производные функций</td><td>Текущий контроль</td><td>Активность, посещаемость, СРС (типовой расчет, дом. задание)</td><td>3</td><td>5</td><td rowspan="2">15</td></tr>
<tr><td>Промежуточный контроль</td><td>Контрольная работа (тест)</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="6">Модуль 5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Неопределенные и определенные интегралы</td><td>Текущий контроль</td><td>Активность, посещаемость, СРС (типовой расчет, дом. задание)</td><td>4</td><td>8</td><td rowspan="2">17</td></tr>
<tr><td>Промежуточный контроль</td><td>Контрольная работа</td><td>3</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="3">Всего за семестр</td><td>40</td><td>70</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Промежуточный контроль (экзамен)</td><td>20</td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Семестровый рейтинг по дисциплине</td><td>60</td><td>100</td><td></td></tr>
</table>

2 семестр

Название модулей дисциплины согласно РПД	Контроль	Форма контроля	Зачетный минимум	Зачетный максимум	график контроля
Модуль 1					
Элементы комбинаторики. Случайные события	Текущий контроль	Активность, посещаемость, СРС (типовой расчет, дом. задание)	5	9	30
	Промежуточный контроль	Контрольная работа (тест)	4	8	
Модуль 2					
Дискретные случайные величины	Текущий контроль	Активность, посещаемость, СРС (типовой расчет, дом. задание)	3	5	32
	Промежуточный контроль	Контрольная работа	3	5	
Модуль 3					
Непрерывные случайные величины	Текущий контроль	Активность, посещаемость, СРС (типовой расчет, дом. задание)	4	7	34
	Промежуточный контроль	Контрольная работа	4	7	

Модуль 4					
Распределения. Выборки	Текущий контроль	Активность, посещаемость, СРС (типовой расчет, дом. задание)	4	7	37
	Промежуточный контроль	Контрольная работа (тест)	4	7	
Модуль 5					
Гипотезы. Корреляция.	Текущий контроль	Активность, посещаемость, СРС (типовой расчет, дом. задание)	5	8	40
	Промежуточный контроль	Контрольная работа	4	7	
Всего за семестр			40	70	
Промежуточный контроль (экзамен)			20	30	
Семестровый рейтинг по дисциплине			60	100	

В каждом семестре за пять модулей студент должен набрать 40–70 баллов. На промежуточный контроль (экзамен) отводится 30 баллов. На экзамене студент должен набрать от 20 до 30 баллов.

В сумме за каждый семестр по дисциплине «Математика» студент должен набрать 60–100 баллов.

Шкалы оценивания типовых расчетов, контрольных работ, КОПТ и промежуточного контроля приведены ниже.

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Количество баллов	Критерии оценивания
0–5	Правильно выполнил менее 35 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы
5,5–10	Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы

10,5–15	Правильно выполнил от 60 до 84 % заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки. Ответы на вопросы полные или частично полные
15,5–20	Правильно выполнил не менее 85 % заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений

Шкала оценивания выполнения контрольной работы

Количество баллов	Критерии оценивания
0–2	Правильно выполнил менее 35 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки
3–5	Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки
6–7	Правильно выполнил от 60 до 84 % заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки
8–10	Студент выполнил не менее 85 % заданий или при решении допущены незначительные ошибки

Шкала оценивания КОПТ

Количество баллов	Критерии оценивания
0–2	Правильно выполнил менее 3 заданий, в остальных допущены грубые ошибки
3–5	Правильно выполнил от 3 до 6 заданий, в остальных допущены грубые ошибки
6–7	Правильно выполнил от 6 до 7 заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки
8–10	Студент выполнил не менее 8 заданий или при решении допущены незначительные ошибки

Критерии оценки знаний, умений и уровня приобретенных компетенций на экзаменах по курсу

Количество баллов	Критерии оценивания
0–8	Выставляется, если студент выполнил менее 3 заданий, а в остальных допущены грубые ошибки и не может ответить ни на один дополнительный вопрос в пределах программы
9–17	Выставляется, если студент выполнил 3–4 задания в билете, а в остальных допущены грубые ошибки и неправильно ответил на два дополнительных вопроса в пределах программы
18–23	Выставляется, если студент выполнил 5–6 заданий в билете, но при этом либо отсутствует правильность, полнота и глубина ответа (верное и глубокое изложение фактов, понятий, иллюстрация ответа конкретными примерами; отсутствие необходимости в уточняющих вопросах); либо нет логической последовательности изложения материала в процессе ответа; в некоторых заданиях допущены арифметические ошибки и неправильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы
24–30	Выставляется, если - студент выполнил все задания в билете и при этом присутствует: 1) правильность, полнота и глубина ответа (верное и глубокое изложение фактов, понятий, иллюстрация ответа конкретными примерами; отсутствие необходимости в уточняющих вопросах) и решил все предложенные ему задачи; 2) логическая последовательность изложения материала в процессе ответа; 3) решение задачи; - или студент не выполнил одного из перечисленных выше требований, но ответил правильно на один дополнительный вопрос в пределах программы; - или студент не выполнил два из перечисленных выше требований, но правильно ответил на два дополнительных вопроса в пределах программы

Итоговая оценка выставляется суммированием баллов текущего и итогового контролей следующим образом:

Оценка по 100-бальной шкале	Оценка по традиционной системе
85–100	Отлично
70–84	Хорошо
60–69	Удовлетворительно
0–59	Неудовлетворительно

Изучение дисциплины следует начинать с проработки рабочей программы, уделяя особое внимание целям и задачам, структуре и содержанию курса.

При подготовке к занятиям обучающийся должен просмотреть конспекты лекций, практических занятий, рекомендованную литературу по данной теме; подготовиться к ответу на контрольные вопросы, решить задания домашней работы и соответствующие задания типового расчета.

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнение всех учебных заданий преподавателя, ознакомление с основной и дополнительной литературой.

Запись лекции – одна из форм активной самостоятельной работы студентов, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения и выводы, обобщения, формулировки.

Культура записи лекции – один из важнейших факторов успешного и творческого овладения знаниями. Последующая работа над текстом лекции воскрешает в памяти содержание, позволяет развивать аналитическое мышление. В конце лекции преподаватель оставляет время (5–10 минут) для того чтобы студенты имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу.

Лекции в основном нацелены на освещение фундаментальных и широко используемых понятий и определений, а также призваны способствовать формированию навыков работы с научной литературой.

Предполагается также, что студенты приходят на лекции, предварительно проработав соответствующий учебный материал по источникам, рекомендуемой программой.

Работа с конспектом лекций предполагает просмотр конспекта лекций в тот же день после занятий, пометку материала конспекта, который вызывает затруднения для понимания. Следует попытаться найти ответы на затруднительные вопросы, используя рекомендованную литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформировать вопросы, обратиться за помощью к преподавателю на еженедельных консультациях. Регулярно рекомендуется отводить время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам.

Для выполнения письменных домашних заданий и типовых расчетов студентам необходимо внимательно прочитать соответствующий раздел учебника, учебного и учебно-методического пособия, проработать аналогичные задания, рассматриваемые преподавателем на лекционных занятиях, разобранных на практических занятиях.

Методические указания к использованию КОПТ

КОПТ используются по разделам «Векторная алгебра», «Пределы последовательностей и функций», «Дифференцирование функции одной переменной», «Элементы комбинаторики, случайные события». Включает в себя 7–10 заданий с четырьмя вариантами ответов. В каждом примере можно обратиться к кратким методическим указаниям, разъясняющим, каким образом и на основе использования какой формулы решается данный пример. После завершения теста компьютер выдает каждому студенту количество верно решенных примеров и указывает те задания, которые решены не верно.

Список использованной литературы

1. *Курманбаева А.К., Комарцова Е.А.* Линейная алгебра. Ч. 1: учебно-методическое пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2015.

2. *Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.* Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента: учебно-методическое пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2009.

3. *Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.* Дифференцирование функций одной переменной: контрольно-обучающая компьютерная программа тестирования. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2009.

4. *Лелевкина Л.Г., Карабакиров К.Р.* Методы интегрирования неопределенных интегралов: учебное пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2017.

5. *Давидюк Т.А., Гончарова И.В.* Определенный интеграл и его приложения: учебно-методическое пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2010.

6. *Эгембердиев Ш.А.* Электронный учебно-методический комплекс дисциплины «Теория вероятностей». Бишкек, 2008. http://www.math. krsu.edu.kg/umk/ekonom-tv.pdf

7. *Давидюк Т.А., Гончарова И.В.* Методические указания к решению задач по теории вероятностей: методические указания. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2014.

8. *Гончарова И.В., Комарцов Н.М., Комарцова Е.А.* Математическая статистика: учебное пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2015.

Составитель

К.Р. Карабакиров

МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс

Редактор *И.С. Волоскова*
Компьютерная верстка *Д.Ю. Иванова*

Подписано в печать 24.10.2020
Печать офсетная. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Объем 10,5 п. л. Тираж 100 экз. Заказ 42

Издательство КРСУ
720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, г. Бишкек, ул. Анкара, 2а