ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методический комплекс

Бишкек 2020

УДК 517
М 33

Рецензенты:
Байзаков А.Б., д-р физ.-мат. наук,
профессор КНУ им. Ж. Баласагына,
Курманбаева А.К., канд. физ.-мат. наук, доцент КРСУ

Составители:
И.В. Гончарова, Н.М. Комарцов

Рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики
и Ученым советом ЕТФ КРСУ

М 33 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: учебно-методический комплекс / сост.: И.В. Гончарова, Н.М. Комарцов. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2020. 274 с.

В учебно-методическом комплексе «Математический анализ» указаны дидактические цели обучения. Предложено соответствующее дидактическое обеспечение: образцы типовых расчетов, контрольных работ, компьютерных контрольно-обучающих программ тестирования; решение предложенных образцов. Приведен перечень вопросов и задач, освоение которых обеспечит студенту необходимый уровень подготовки для успешного прохождения рубежных и промежуточных аттестаций.

Для преподавателей и студентов естественно-технического факультета.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель учебно-методического комплекса – помочь студентам организовать свою самостоятельную работу, обозначить круг изучаемых в данном курсе вопросов и задач, сориентировать обучающихся на задания для текущего и рейтингового контроля.

Открытый характер заданий всех видов контроля, а также наличие в УМК решенных образцов типовых расчетов, контрольных работ создают предпосылки и условия для активной и плодотворной работы студентов в семестре, а также при подготовке к зачетам и экзаменам.

Средствами обучения по УМК являются основные и дополнительные учебники и учебные пособия, рекомендованные в списке литературы. Эти учебные пособия в бумажном виде имеются в наличии в библиотеках КРСУ, а также основная часть пособий размещена в электронном виде на сайте кафедры http:// matem.krsu.edu.kg//

Рабочая программа по дисциплине «Математический анализ» составлена в соответствии с требованиями образовательных стандартов высшего образования (уровень бакалавриата) по направлениям: 03.03.02 «Физика»; 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»; 12.03.01 «Приборостроение»; 15.03.03 «Прикладная механика»; 05.03.04 «Гидрометеорология»; 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»; 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» (уровень специалитета); 21.05.05 «Физические процессы горного или нефтегазового производства». Программа предназначена для студентов первого и второго курса естественно-технического факультета КРСУ, и рассчитана на 288 часов, из них 198 аудиторных часов (лекции – 98 часов, практические занятия – 100 часов).

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОУ ВПО КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕЖДАЮ
Декан ЕТФ
____
«____»___________20___г

Рабочая программа дисциплины (модуля)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Закреплена за кафедрой «Высшая математика»

Учебный план направлений

03.03.02 «Физика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 12.03.01 «Приборостроение», 15.03.03 «Прикладная механика», 05.03.04 «Гидрометеорология», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и (уровень специалитета) 21.05.05 «Физические процессы горного или нефтегазового производства».

Форма обучения – очная

Общая трудоемкость	8 ЗЕТ
Часов по учебному плану	288
В том числе:	
аудиторные занятия	198
самостоятельная работа	54
контроль	36

Виды контроля в семестрах:
1 семестр – зачет
2 семестр – экзамен;
3 семестр – зачет с оценкой.

Рабочая программа дисциплины «Математический анализ» разработана в соответствии с ФГОС 3+.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целями освоения дисциплины «Математический анализ» являются:

- получение базовых знаний и формирование основных навыков по математическому анализу, необходимых для решения задач, возникающих в практической деятельности;
- развитие логического мышления;
- формирование необходимого уровня математической подготовки для понимания других математических дисциплин, изучаемых в рамках технического направления.

Задача изучения курса как фундаментальной дисциплины состоит в том, чтобы студент развил логическое мышление, освоил приемы исследования и решения математически формализованных прикладных задач, а также аппарат математического анализа, используемый в параллельных и последующих математических, физических и других курсах.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП

Дисциплина «Математический анализ» является базовой дисциплиной естественно-научного модуля ООП.

2.1. Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Дисциплина «Математический анализ» базируется на элементарной математике, а также курсе «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» этого же блока, изучаемого на первом году обучения.

2.2. Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Физика.

Дифференциальные уравнения.

Интегральные уравнения и вариационное исчисление.

Теория функций комплексного переменного.

Метрология, стандартизация и сертификация.
Теоретическая механика.
Прикладная механика.
Теория физических полей.
Теория вероятности и математическая статистика.
Электротехника,
и другие.

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Математический анализ» входит в список дисциплин, освоение которых способствует формированию у студента-бакалавра общепрофессиональной компетенции.

Направление	Компетенция
Физика	ОПК-2: способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей
Электроника и наноэлектроника	ОПК-1: способность представлять адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений, законов и методов естественных наук и математики; ОПК-2: способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат
Прикладная механика	ОПК-3: способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения физико-математический аппарат

Приборостроение	ОПК-1: способность представлять адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений, законов, методов естественных наук и математики
Гидрометеорология	ОПК-1: владение базовыми знаниями в области фундаментальных разделов математики в объеме, необходимом для владения математическим аппаратом в гидрометеорологии, для обработки и анализа данных, прогнозирования гидрометеорологических характеристик
Электроэнергетика и электротехника	ОПК-2: способность применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач
Инфокоммуникационные технологии и системы связи	ОПК-2: способность решать задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности
Физические процессы горного или нефтегазового производства	ОПК-1: способность решать задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности

Согласно ФГОС по техническим направлениям, в результате изучения дисциплины обучающийся должен:

Знать: терминологию и основные понятия математического анализа; теорию пределов; дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной; интегральное исчисление функции одной действительной переменной; дифференциальное исчисление функций нескольких переменных; интегральное исчисление функций нескольких переменных; теорию числовых и функциональных рядов; теорию поля.

Уметь: вычислять пределы функций и последовательностей; находить производные функций одной и нескольких переменных; находить неопределенные интегралы; вычислять определенные, кратные, криволинейные интегралы; работать с числовыми и функциональными рядами; вычислять основные характеристики скалярных и векторных полей; анализировать поведение функций одной и нескольких действительных переменных; использовать математические методы в технических приложениях; применять свои знания к решению практических задач; пользоваться математической литературой для самостоятельного изучения материала.

Владеть: методами вычисления пределов функций и последовательностей; приемами дифференцирования; методами исследования функций одной и нескольких действительных переменных; методами математического описания физических явлений и процессов, используя элементы дифференциального исчисления; методами интегрирования неопределенных интегралов; методами интегрирования определенных интегралов; методами вычисления кратных интегралов; методами вычисления криволинейных интегралов; приемами исследования рядов; методами вычисления основных характеристик скалярных и векторных полей.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Материал курса «Математический анализ» рассчитан на 288 часов, из них аудиторных – 198 часов (лекции – 98 часов, практи-ческие занятия – 100 часов), самостоятельная работа – 54 часа, а контроль – 36 часов.

Курс разбит на 3 семестра.

Распределение часов по видам занятий и часам с указанием рекомендуемой литературы, приведено в таблице:

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр	Часы	Литература
	Раздел 1. Пределы функции одной переменной			
1.1	Функции одной переменной. Область определения. Область значений. Различные виды и способы задания функций /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5
1.2	Функции одной переменной. Область определения. Область значений. Основные характеристики функций /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6
1.3	Основные элементарные функции и их графики. Преобразования графиков функций /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5
1.4	Основные элементарные функции и их графики. Преобразования графиков функций /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6
1.5	Предел числовой последовательности. Предел функции. Односторонние пределы. Свойства пределов /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5
1.6	Предел функции. Предел последовательности /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.3
1.7	Бесконечно малые и бесконечно большие величины, их свойства. Неопределенности различного вида /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5
1.8	Раскрытие неопределенностей различных видов /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л2.8 Л3.3
1.9	Первый и второй замечательные пределы /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5

1.10	Первый и второй замечательные пределы /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.3
1.11	Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции и их классификация /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5
1.12	Исследование функций на непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6
1.13	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу «Пределы функций одной переменной». Подготовка к защите типового расчета /Ср/	1	6	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.3
	Раздел 2. Дифференцирование функций одной переменной			
2.1	Задачи физики, механики и энергетики, приводящие к понятию производной. Определение производной. Дифференцируемость функции. Правила дифференцирования элементарных функций /Лек/	1	4	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5
2.2	Основные правила и методы дифференцирования элементарных функций /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.4
2.3	Дифференцирование сложных, обратных, неявно и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5
2.4	Дифференциал функции. Дифференцирование сложных функций /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.4
2.5	Дифференцирование неявно и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.4

2.6	Производные и дифференциалы высших порядков. Свойства дифференцируемых функций /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5
2.7	Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей различных видов по правилу Лопиталя /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5
2.8	Производные и дифференциалы высших порядков /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.4
2.9	Раскрытие неопределенностей различных видов по правилу Лопиталя /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.4
2.10	Экстремумы функции. Возрастание, убывание. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба, интервалы монотонности. План исследования функции /Лек/	1	4	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5
2.11	Экстремумы функции. Возрастание, убывание. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба, интервалы монотонности. Полное исследование функции /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6
2.12	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу «Дифференцирование функций одной переменной». Подготовка к защите типового расчета /Ср/	1	6	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.4
	Раздел 3. Неопределенные интегралы			
3.1	Первообразная. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.6 Л3.8
3.2	Непосредственное интегрирование. Введение под знак дифференциала /Пр/	1	3	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.8
3.3	Основные методы интегрирования. Интегрирование по частям. Метод подстановки /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5

3.4	Интегрирование по частям. Метод подстановки /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.8
3.5	Интегрирование дробно-рациональных функций /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.8
3.6	Интегрирование дробно-рациональных функций /Пр/	1	3	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.8
3.7	Интегрирование тригонометрических функций /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.8
3.8	Интегрирование тригонометрических функций /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.8
3.9	Интегрирование иррациональных функций /Лек/	1	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.8
3.10	Интегрирование иррациональных функций /Пр/	1	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.8
3.11	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу «Неопределенный интеграл». Подготовка к защите типового расчета /Ср/	1	6	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.8
	Раздел 4. Определенные интегралы и их приложения			
4.1	Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона–Лейбница. Точные методы вычисления определенных интегралов /Лек/	2	4	Л1.2 Л2.1 Л2.2 Л2.5
4.2	Точные методы вычисления определенных интегралов /Пр/	2	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л3.2

4.3	Геометрические приложения определенных интегралов: вычисление площадей плоских фигур в декартовой, полярной системах координат и при параметрическом задании кривой /Лек/	2	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.2
4.4	Вычисление площадей плоских фигур в декартовой, полярной системах координат и при параметрическом задании кривой /Пр/	2	4	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.2
4.5	Геометрические приложения определенных интегралов: вычисление длин дуг кривых в декартовой, полярной системах координат и в параметрической форме; вычисление объемов тел вращения. Физические приложения определенного интеграла /Лек/	2	4	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.2
4.6	Вычисление длин дуг кривых в декартовой, полярной системах координат и в параметрической форме; вычисление объемов тел вращения /Пр/	2	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.2
4.7	Несобственные интегралы I и II рода, их свойства и вычисление /Лек/	2	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5
4.8	Несобственные интегралы I и II рода, их свойства и вычисление /Пр/	2	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6
4.9	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу «Определенные интегралы и их применение» Подготовка к защите типового расчета /Ср/	2	6	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.2
	Раздел 5. Функции нескольких переменных			

5.1	Основные понятия. Частные производные первого и высших порядков. Полный дифференциал. Дифференциалы высших порядков /Лек/	2	4	Л1.1 Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.5
5.2	Частные производные первого и высших порядков. Полный дифференциал. Дифференциалы высших порядков /Пр/	2	4	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.5
5.3	Дифференцирование сложных функций. Полная производная /Лек/	2	2	Л1.1 Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.8 Л3.5
5.4	Дифференцирование сложных функций. Полная производная /Пр/	2	2	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.5
5.5	Безусловный экстремум. Необходимые и достаточные условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области /Лек/	2	2	Л1.1 Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.5
5.6	Экстремум функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области /Пр/	2	4	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.5
5.7	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу «Функции нескольких переменных». Подготовка к защите типового расчета /Ср/	2	6	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.6 Л3.5
	Раздел 6. Кратные и криволинейные интегралы			
6.1	Задачи физики, механики, энергетики, техники, приводящие к кратным интегралам. Определение и свойства кратных интегралов /Лек/	2	2	Л1.1 Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.6

6.2	Вычисление кратных интегралов /Лек/	2	4	Л1.1 Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.8 Л3.6
6.3	Вычисление кратных интегралов /Пр/	2	6	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.4 Л2.6
6.4	Физические приложения кратных интегралов: объем тела, масса, статические моменты, координаты центра тяжести и моменты инерции плоских фигур и тел /Лек/	2	4	Л1.1 Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.6
6.5	Физические приложения кратных интегралов: объем тела, масса, статические моменты, координаты центра тяжести и моменты инерции плоских фигур и тел /Пр/	2	4	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.6 Л3.6
6.6	Задачи физики, механики, энергетики, техники, приводящие к криволинейным интегралам. Определение криволинейных интегралов I и II рода и их свойства /Лек/	2	2	Л1.1 Л1.2 Л2.4 Л2.5 Л3.6
6.7	Вычисление криволинейных интегралов I и II рода в различных системах координат. Применение криволинейных интегралов для решения технических задач /Лек/	2	2	Л1.1 Л1.2 Л2.4 Л2.5 Л3.6
6.8	Вычисление криволинейных интегралов I рода в различных системах координат /Пр/	2	2	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.6 Л3.6
6.9	Вычисление криволинейных интегралов II рода /Пр/	2	2	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.6 Л3.6
6.10	Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования. Формула Грина /Лек/	2	2	Л1.1 Л1.2 Л2.4 Л2.5 Л3.6

6.11	Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования. Формула Грина /Пр/	2	2	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.6 Л3.6
6.12	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу «Кратные и криволинейные интегралы». Подготовка к защите типового расчета /Ср/	2	6	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.6 Л3.6
6.13	Подготовка к экзамену /Экзамен/	2	36	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.5 Л2.6
	Раздел 7. Ряды			
7.1	Числовой ряд. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд. Ряд геометрической прогрессии /Лек/	3	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.1
7.2	Непосредственное определение сходимости числовых рядов /Пр/	3	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.7 Л3.1
7.3	Достаточные признаки сходимости числовых рядов. Признаки сравнения, признак Даламбера. Радикальный и интегральный признаки Коши. Обобщенный гармонический ряд /Лек/	3	4	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.1
7.4	Признаки сравнения, признак Даламбера. Радикальный и интегральный признаки Коши /Пр/	3	4	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.7 Л3.1
7.5	Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов /Лек/	3	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.1

7.6	Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Признак сходимости знакопеременного ряда. Абсолютная и условная сходимость /Пр/	3	3	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.7 Л3.1
7.7	Функциональные ряды, область сходимости. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов /Лек/	3	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.1
7.8	Функциональные ряды, область сходимости. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда /Пр/	3	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.7 Л3.1
7.9	Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена /Лек/	3	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.1
7.10	Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена /Пр/	3	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.7 Л3.1
7.11	Применение степенных рядов. Приближенное вычисление значений функций, определенных интегралов /Лек/	3	2	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.1
7.12	Применение степенных рядов. Приближенное вычисление значений функций, определенных интегралов /Пр/	3	2	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.7 Л3.1
7.13	Тригонометрический ряд и его основные свойства. Ряд Фурье и его сходимость. Разложение в ряд Фурье 2π-периодических функций, функций произвольного периода и непериодических. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций /Лек/	3	3	Л1.2 Л2.1 Л2.4 Л2.5 Л3.1

7.14	Разложение в ряд Фурье 2π-периодических функций. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода /Пр/	3	4	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.7 Л3.1
7.15	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу «Ряды». Подготовка к защите типового расчета /Ср/	3	9	Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.7 Л3.1
	Раздел 8. Элементы теории поля			
8.1	Скалярное поле. Примеры скалярных полей. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению. Градиент скалярного поля и его свойства. Связь градиента с производной по направлению. Применение градиента /Лек/	3	3	Л1.1 Л1.2 Л2.1 Л2.5 Л3.7
8.2	Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению. Градиент скалярного поля /Пр/	3	3	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л3.7
8.3	Векторные поля. Векторные линии. Поверхностный интеграл 1-го рода, его вычисление и свойства. Поток векторного поля /Лек/	3	2	Л1.1 Л1.2 Л2.1 Л2.5 Л3.7
8.4	Векторные поля. Векторные линии. Поток векторного поля /Пр/	3	2	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л3.7
8.5	Дивергенция, циркуляция и ротор векторного поля. Векторные дифференциальные операции 1 и 2 порядка. Классы векторных полей /Лек/	3	4	Л1.1 Л1.2 Л2.1 Л2.5 Л3.7
8.6	Дивергенция, циркуляция и ротор векторного поля. Классы векторных полей /Пр/	3	4	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л3.7

8.7	Выполнение домашних заданий и типового расчета по разделу «Теория поля». Подготовка к защите типового расчета /Ср/	3	9	Л1.1 Л1.2 Л2.2 Л2.3 Л2.7 Л3.7

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

5.1.1. Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

I СЕМЕСТР – ЗАЧЕТ

1. Функция. Область определения и область значений функции.
2. Графики функций и их преобразования.
3. Основные характеристики функции: ограниченность, четность, нечетность, периодичность, монотонность.
4. Различные виды функций: основные элементарные, элементарные, сложные, взаимообратные.
5. Способы задания функции. Параметрическое задание функции, задание функции в полярных координатах.
6. Числовые последовательности. Предел последовательности.
7. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.
8. Теоремы о связи между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами.
9. Предел функции. Бесконечно большие предельные значения функции и предел функции на бесконечности.
10. Теоремы о пределах функций (сумме, произведении, частном, сложной функции).
11. Первый замечательный предел.
12. Второй замечательный предел.
13. Односторонние пределы.
14. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва функции.

15. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Непрерывность сложной функции.
16. Задачи механики, физики, энергетики, приводящие к понятию производной.
17. Определение производной функции. Геометрический и физический смысл производной.
18. Общие правила дифференцирования (суммы, произведения и частного).
19. Производная сложной и обратной функции.
20. Производные элементарных функций.
21. Дифференцирование параметрически и неявно заданных функций.
22. Логарифмическое дифференцирование.
23. Дифференциал. Свойства дифференциала. Инвариантность формы дифференциала.
24. Производные и дифференциалы высших порядков.
25. Производная высших порядков неявно заданной функции.
26. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически.
27. Правило Лопиталя.
28. Возрастание и убывание функций. Необходимые и достаточные условия существования экстремума.
29. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.
30. Асимптоты (вертикальные и наклонные).
31. Первообразная и неопределенный интеграл. Простейшие свойства неопределенного интеграла.
32. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование; интегрирование методом замены переменной или способом подстановки; интегрирование по частям.
33. Интегрирование дробно-рациональных функций.
34. Интегрирование тригонометрических функций.
35. Интегрирование иррациональных функций.

II СЕМЕСТР – ЭКЗАМЕН

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла, его геометрический и физический смысл.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Формула Ньютона–Лейбница.
4. Точные методы интегрирования определенных интегралов.
5. Несобственные интегралы I рода.
6. Несобственные интегралы II рода.
7. Приближенные методы вычисления определенных интегралов (метод прямоугольников, трапеций, Симпсона).
8. Вычисление площадей плоских фигур в различных системах координат.
9. Вычисление длин дуг плоских кривых в различных системах координат.
10. Вычисление объема тела по известному поперечному сечению и объема тела вращения.
11. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение, свойства двойных интегралов.
12. Вычисление двойных интегралов в декартовых и полярных координатах.
13. Применение двойных интегралов.
14. Криволинейные интегралы I рода.
15. Применение криволинейных интегралов I рода.
16. Криволинейные интегралы II рода.
17. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Формула Грина.
18. Применение криволинейных интегралов II рода.
19. Функции нескольких переменных (область определения, способы задания, графическое изображение, линии уровня).
20. Функции нескольких переменных (определение, предел и непрерывность).
21. Частное и полное приращение функций двух переменных.
22. Частные производные первого порядка функции нескольких переменных и их геометрическое истолкование.

23. Дифференцируемость и полный дифференциал первого порядка функции двух переменных.
24. Дифференцирование неявно заданных функций нескольких переменных.
25. Частные производные высших порядков функции нескольких переменных.
26. Дифференциалы высших (2-го и 3-го) порядков функции двух переменных.
27. Экстремумы функций двух переменных. Необходимое условие существования экстремума.
28. Достаточное условие существования экстремума функции двух переменных.
29. Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в замкнутой области.
30. Метод наименьших квадратов.

III СЕМЕСТР – ЗАЧЕТ С ОЦЕНКОЙ

1. Числовые ряды. Свойства числовых рядов.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда.
3. Гармонический ряд. Геометрический ряд.
4. Признак Даламбера. Радикальный признак Коши.
5. Интегральный признак Коши.
6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
7. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.
8. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
9. Функциональные ряды.
10. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.
11. Свойства степенных рядов.
12. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена.
13. Приложения степенных рядов. Приближенное вычисление значений функций.

14. Приложения степенных рядов. Приближенное вычисление определенных интегралов.
15. Приложения степенных рядов. Приближенное решение дифференциальных уравнений.
16. Ряды Фурье 2π-периодических функций.
17. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.
18. Разложение в ряд Фурье функций произвольного периода.
19. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня.
20. Производная по направлению.
21. Градиент скалярного поля и его свойства.
22. Векторное поле. Поток векторного поля.
23. Дивергенция поля .
24. Циркуляция вектора.
25. Ротор поля.
26. Оператор Гамильтона.
27. Дифференциальные векторные операции второго порядка.
28. Соленоидальное поле.
29. Потенциальное поле.
30. Гармоническое поле.

5.1.2. Задания для проверки уровня обученности УМЕТЬ

1 семестр

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x+1}{5x^2-10x+6}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+x+11}{2x^4+5x^2+1}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+5}{3n^3+4n+6}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{4x^2+5x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{9-x^2}{x^2+x-6}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x+1}{5x^2-10x+6}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^3+4x^2+1}{x^3+5x^2+10}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+1}{7x^3+5x^2+10}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+4x+1}{5x^2-10x+6}$

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-4\right)}{x^2-5x+6}$

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{x^2-3x+2}$

14. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-16}$

15. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x+1\right)^2}{2+3x+x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{6-3x}$

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{x^2-4x+3}$

18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{4x-12}$

19. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$

20. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x+8}$

Найти производные функций

1. $y=\left(3^x-\sqrt[3]{x}\right)\left(tgx-\log_3 x\right)+\sqrt{2}$

2. $y=\left(5\arcsin x+2^x\right)\left(\sqrt[5]{x^3}-3tgx\right)$

3. $y=\dfrac{e^x-2}{\arcsin x+2\ln x}+\sin 1$

4. $y=\dfrac{\log_2 x+tg2}{\arccos x-2x^2}-\ln 10$

5. $y=\left(2\cos x-\dfrac{3}{x}\right)\left(arcctgx+4^3\right)$

6. $y=\dfrac{3\ln x+5\sqrt[3]{x^7}}{2arctgx+4}+\ln 7$

7. $y=\left(2ctgx-\dfrac{5}{x^3}\right)\left(\cos x-\ln x\right)$

8. $y=\left(3e^x-\cos x\right)\left(\log_3 x+5tgx\right)+\sqrt{7}$

9. $y=\dfrac{2^x-x^2+e^2}{2\log_2 x-3}$

10. $y=\dfrac{3e^x+5}{2tgx+4\sqrt[3]{x^4}}$

11. $y=\left(3tgx+5\sqrt[5]{x^3}\right)\left(arcctgx-4^x\right)$

12. $y=\left(5ctgx+7^x\right)\left(\sqrt[4]{x^3}+3\sin x\right)$

13. $y=\left(2arctgx+4^x\right)\left(3\ln x-x^3\right)$

14. $y=\left(2ctgx+3\ln x\right)\left(4\arcsin x-\sqrt[4]{x^3}\right)$

15. $y=\dfrac{5e^x+3x^2}{2\arcsin x+4\sin x}+tg5$

16. $y=\left(3\cos x-4\ln x\right)\left(\dfrac{2}{x^2}+e^3\right)$

Найти производные сложных функций

1. $y=\sin\left(x^3+2\ln x\right)+\sqrt{2}$

2. $y=\left(x+4\sin x\right)^3$

3. $y=arctg\left(\sin 3x+4\right)$

4. $y=\ln\left(3x^2+2tgx\right)+1$

5. $y=5^{\arcsin x-3\sqrt{x}}+2$

6. $y=\arccos\left(5x^2+5\right)$

7. $y=\sin\left(\sqrt[3]{x}+4x\right)-3$

8. $y=\log_5\left(\sin 2x+4\right)+\sqrt{3}$

9. $y=tg\left(\log_2 x+3\right)$

10. $y=3^{\sqrt[4]{x}+2x}$

11. $y=\cos\left(3x-\dfrac{5}{x^2}\right)$

12. $y=\log_3\left(3x-\cos x\right)$

13. $y=\arcsin\left(2x^3+\cos x\right)$

14. $y=ctg\left(\dfrac{6}{x^3}+\ln x\right)$

15. $y=\left(\dfrac{3}{x^3}+4x\right)^3$

16. $y=\arccos\left(\ln x+4tgx\right)$

17. $y=\arccos\left(\cos 2x-\ln x\right)$

18. $y=arctg\left(4e^x-5\right)$.

Найти неопределенный интеграл

1. $\int\dfrac{x7^x-8+4x\cos x}{x}dx$

2. $\int\dfrac{x^2-1}{x^2+1}dx$

3. $\int\dfrac{(6x\ \ -3)^2}{x}dx$

4. $\int\dfrac{x^2 2^x+x-\sqrt[4]{x^3}}{x^2}dx$

5. $\int\dfrac{(2x-3)^2}{x^3}dx$

6. $\int\dfrac{x^4-5x^2e^x+9x}{x^2}dx$

7. $\int\dfrac{3xe^x-x\sin x+5x}{x}dx$

8. $\int\dfrac{(2x+3)^2}{x^5}dx$

9. $\int\dfrac{2x+1}{x-1}dx$

10. $\int\dfrac{x^2e^x-2e^x\sin x}{e^x}dx$

11. $\int\dfrac{2x-3x^2e^x+\sqrt[4]{x^3}+3x^2}{x^2}dx$

12. $\int\dfrac{\left(3x+\sqrt[3]{x}\right)}{x^2}dx$

13. $\int\dfrac{xe^x-4\sqrt[4]{x}+3x-2}{x}dx$

14. $\int\dfrac{x^2+1}{x-1}dx$

15. $\int\dfrac{x^2\cos x+3x^2-5x}{x^2}dx$

16. $\int\dfrac{e^x x^6+4x^6\sin x+9x^4}{x^6}dx$

17. $\int\dfrac{(x+2)^2}{x^2}dx$

18. $\int\dfrac{(x+1)^2}{x^5}dx$

19. $\int\dfrac{x^2-6}{x-5}dx$

20. $\int\dfrac{4x^3+15x^2e^x+14x^4}{x^2}dx$

21. $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}dx$

22. $\int (3x-2)\cos 2x\, dx$

23. $\int (3x-2)e^{2x}dx$

24. $\int (3+9x)\cos 8x\, dx$

25. $\int (x^2-3x)\ln x dx$

26. $\int (5x+23)\cos 8x\, dx$

27. $\int (10x-4)\sin 5x\, dx$

28. $\int \left(5x^2-16x^4-2\right)\ln x\, dx$

29. $\int x^4 \ln x dx$

30. $\int (2x+1)e^x dx$

31. $\int (6x+2)\sin 6x\, dx$

32. $\int (3\cos x+5)\sin x dx$

33. $\int (3x-1)\sin 3x dx$

34. $\int (2x+5)3^x\, dx$

2 семестр

Вычислить определенные интегралы

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin^6 x dx$

2. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

3. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4. $\int\limits_{0}^{1} 6\left(x^2+x^3e^{x^4}\right)dx$

5. $\int\limits_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

6. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^6+1}dx$

7. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin\ln x}{x}dx$

8. $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

9. $\int\limits_{0}^{1} \frac{z^3}{z^8+1}dz$

10. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x \cos^3 x dx$

11. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-3x}}dx$ 12. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

13. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$ 14. $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} \frac{x}{\cos^2\left(x^2\right)}dx$

15. $\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x}dx$ 16. $\int_0^{1/2} arcctg 2x dx$

17. $\int_0^{\pi/2} (x+3)\sin x dx$ 18. $\int_1^e x^3 \ln x dx$

19. $\int_{-3}^0 (x-2)e^{-x/3}dx$ 20. $\int_{-1}^0 x\ln(1-x)dx$

21. $\int_1^2 \ln(3x+2)dx$ 22. $\int_{-1}^0 (x+1)e^{-2x}dx$

23. $\int_0^1 2x\, arctg x dx$ 24. $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx.$

25. $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx.$ 26. $\int_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx.$

27. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx.$ 28. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx.$

29. $\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}dx.$ 30. $\int_0^{\sqrt{7/3}} x^3\sqrt{7+x^2}dx.$

1. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_L \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos^2 x}dl$, где $L-$ $y=\sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

2. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int\limits_L \frac{x^3}{y^2} dl$, где $L -$ $xy = 1$, $1 \le x \le 2$.
3. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int\limits_L \sqrt{1 + x^4} dl$, где $L -$ $y = \frac{x^3}{3}$, $1 \le x \le 2$.
4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int\limits_L y^2 dl$, где $L -$ $y = \frac{x}{2}$, $0 \le x \le 2$.
5. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int\limits_L y dl$, где $L -$ $y = x^3$, $0 \le x \le 1$.
6. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int\limits_L 2y dl$, где *L:* $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2} \\ y = t \end{cases}$, $0 \le t \le 1$.
7. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int\limits_L \sqrt{y} dl$, где $L -$ $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.
8. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где $L -$ $r = 2\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.
9. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где $L -$ $r = 2\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$.
10. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int\limits_L \sqrt[4]{x^2 + y^2} dl$, где $L -$ $r = 1 - \cos\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.
11. Найти производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = y^2 x e^x$.

12. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функции $z=\dfrac{x}{y^2-2x}$.

13. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z=\ln\left(x^2y+xy^2\right)$.

14. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функции $z=e^{x^2+y^2}-x-1$.

15. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ функции

$z=\log_3\left(x^6+y^2\right)+5x^2y^4+1$.

16. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ функции $z=x^2e^{xy}$.

17. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z=\dfrac{y^2}{x+7y}$.

18. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ функции $z=x^3y^4-\sin\left(2x+3y\right)$.

19. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ функции $z=x^4y^3+e^{4x-3y}$.

20. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ функции $z=x^6y^2-\cos\left(3x-5y\right)$.

3 семестр

Исследовать сходимость ряда

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n+1}\right)^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n-2}{6n+5}\right)^{2n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n}{2^n\cdot(3n+2)}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{2n!}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+1}\right)^n$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+1}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n)!}{n^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3\sqrt{n}-1}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$

Найти область сходимости ряда

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{2^{n+1}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^{n+2}}x^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n(n+3)}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+5)^n}{5^{2n}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n(n^2+1)}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+2}}$ 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\frac{(x-3)^n}{3^n}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^{n+2}}$ 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-3)^n}{n^2+1}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$ 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(x-1\right)^n}{4n-3}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2x+1\right)^n}{3n-2}$ 16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^{2n}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(x+5\right)^n}{n\cdot 5^n}$ 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^n}{7n-11}$

1. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M)=(x-z)\overline{i}-y\,\overline{j}+(y+z)\overline{k}$.
2. Найти производную скалярного поля: $u=x^2\cos y+x^3y+5xz-5xz^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.
3. Найти градиент скалярного поля: $u=2x^2y+xz^3+5yz^2+x$ в точке $M_0(1;-2;1)$ и его модуль.
4. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M)=(2x^2-z)\overline{i}-xy\,\overline{j}+(y^2+z)\overline{k}$.
5. Проверить является ли векторное поле: $\overline{a}(M)=(-2x-3yz)\overline{i}+(-2y-3xz)\overline{j}+(-2z-3xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}\left(M\right)$ найти его потенциал.
6. Найти производную скалярного поля: $u=(x^2+4x^3)\cos y+5xz$ в точке $M_0(0;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;0;1)$.
7. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M)=xy^2\overline{i}-y^3z\,\overline{j}+(2y+z)\overline{k}$.
8. Найти градиент скалярного поля: $u=xyz^2+4xz+xy-z^2+2$ в точке $M_0(4;-2;0)$ и его модуль.

9. Найти градиент скалярного поля: $u = 2x^2y^4 + xz^3 + 5z^2 + xyz$ в точке $M_0(1;-2;1)$ и его модуль.
10. Найти градиент скалярного поля: $u = 4x^3z + 5x^2y - yz^2 + 6x + 5$ в точке $M_0(-1;-2;3)$ и его модуль.
11. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = (2x^2y - z)\overline{i} - xy\,\overline{j} + (y + 2z)\overline{k}$.
12. Найти производную скалярного поля: $u = x\cos y + x^2y + 5xz - 5xyz^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.
13. Найти производную скалярного поля $u = xe^y + ye^x - z^2$ в точке $M_0(3;0;2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(4;1;3)$.
14. Найти градиент скалярного поля: $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M_0(0;1;2)$ и его модуль.
15. Вычислить поток векторного поля: $\vec{a}(M) = (2x - z)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $x + y + z = 2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
16. Вычислить поток векторного поля: $\vec{a}(M) = (x + 2z)\vec{i} + (y - 3z)\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $3x + y + z = 6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского.
17. Вычислить ротор и дивергенцию векторного поля: $\vec{a}(M) = 3(x - z)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j} + 3z\vec{k}$.

5.1.3. Задания для проверки уровня обученности ВЛАДЕТЬ

1 семестр

Вычислить пределы

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-4}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x}{x^2+1}\right)^{x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{tg^3 x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{4x}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin\left(6x^2\right)}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg12x}{\ln\left(1+6x\right)}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\left(2x\right)}{e^{10x}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^2\left(10x\right)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{\arcsin\left(6x\right)}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{arctg^2\left(5x\right)}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{e^{2x^2}-1}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+14x\right)}{\arcsin 7x}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{4x}-1}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{\sin\left(4x^2\right)}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 5x}{e^{3x^2}-1}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2\left(3x\right)}{e^{6x^2}-1}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+3x^3\right)}{arctg^3 x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\left(4x\right)}{\ln\left(1+3x\right)}$

Найти производные функций, используя логарифмическое дифференцирование

1. $y=(\cos x)^{5e^x}$
2. $y=\left(x^3+4\right)^{tgx}$
3. $y=(tgx)^{4x}$
4. $y=(\sin x)^{3x}$
5. $y=x^{arctgx}$
6. $y=x^{\arcsin x}$
7. $y=(\sin x)^{x+1}$
8. $y=\left(x^3-1\right)^{x}$
9. $y=(\sin x)^{x}$

Найти производную y'_x функции

1. $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=2-\cos t \end{cases}$
2. $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t-1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x=4t^2+5 \\ y=3t^4+11 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$
5. $\begin{cases} x=\ln(5+t) \\ y=arctgt \end{cases}$
6. $\begin{cases} x=e^t \\ y=\left(t^2-t\right)\cdot e^t \end{cases}$
7. $\begin{cases} x=\ln\left(t+1\right) \\ y=t^2 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x=2t^2+1 \\ y=3t^2-5t \end{cases}$
9. $\begin{cases} x=t^2+3t \\ y=t^3-27t \end{cases}$
10. $\begin{cases} x=\ln\left(t^2+1\right) \\ y=t^3+1 \end{cases}$

Найти производную y' от неявной функции

1. $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$
2. $x^3+\ln y-x^2e^y=0$

3. $x^2+yx+e^y=0$

4. $x^3y+x^2y^2+xy^3=0$

5. $2x^2+y^2-4x+10y+5=0$

6. $e^x-e^y=y-x$

7. $5x^2+3xy-2y^2+3=0$

8. $2x^2+3^y+x\ln y=0$

9. $x^2y^3+x-\sin y=0$

10. $3y^2+\sin y-x2^y=0$

Найти неопределенный интеграл

1. $\int x^2\cdot\sqrt[3]{2+3x^3}dx$

2. $\int\frac{x}{\cos^2 x^2}dx$

3. $\int\frac{e^x}{e^x-3}dx$

4. $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

5. $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

6. $\int e^x\sqrt{e^x+3}dx$

7. $\int(\sin x+5)^2\cos x dx$

8. $\int\sqrt[6]{x^4-11}\cdot x^3dx$

9. $\int e^{x^6}\cdot x^5dx$

10. $\int\frac{ctg^3x}{\sin^2 x}dx$

11. $\int(e^x+5)^4e^xdx$

12. $\int x^4\cdot\sqrt[4]{2+3x^5}dx$

13. $\int\frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx$

14. $\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx$

15. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}dx$

16. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{5x-3}}$

17. $\int\frac{xdx}{\sqrt{3x+4}}$

18. $\int\frac{1}{\sqrt{3x}+1}dx$

19. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x-1}}$

20. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{5x-3}}$

21. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{3x-4}}$

22. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{4x+5}}$

23. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$

24. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-3}}$

Найти интервалы монотонности, выпуклости, вогнутости, экстремум и точки перегиба функции

1. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

2. $y = 3x - x^3$

3. $y = 2x^2 - 8x + 2$

4. $y = 4x^3 + 4x^2 + x - 16$

5. $y = x^3 - 3x^2$

6. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$

7. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$

8. $y = 2x^3 - 3x^2$

9. $y = 2E^3 - 12E^2 + 18E$

10. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

11. $y = x^4 - 2x^2 + 5$

12. $y = x^4 - 2x^2 - 5$

13. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$

14. $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$

15. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

2 семестр

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 3x$, $x^2 = 3y$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 4$, $y = x + 8$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy = 2$, $x + 2y - 5 = 0$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $4y = x^2$, $x = \pm 2$.
5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 4 - x^2$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид: $\begin{cases} x = (t - \sin t) \\ y = (1 - \cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$.
7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$.
8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $r^2 = 4\cos 2\varphi, \quad r = \sqrt{2} \quad \left(r \geq \sqrt{2}\right)$.
9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $r = 2\cos\varphi, r = 3\cos\varphi$.
10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $r = 3\sin\varphi, r = 5\sin\varphi$.
11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $r = 3(1 + \cos\varphi), r = 3{,}5\ (r \geq 3{,}5)$.
12. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций: $y = x^2, \quad y = 2$. Ось вращения Oy.
13. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций: $y = x^3, \quad y = x$. Ось вращения Ox.
14. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций: $y = x^3, \quad y = x^2$. Ось вращения Ox.
15. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций: $y = x^2, \quad y = x$. Ось вращения Oy.

16. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением: $y = \ln\cos x + 2, \quad 0 \le x \le \pi/6$

17. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением: $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

18. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением: $r = 6\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi / 3.$

19. Исследовать на экстремум функцию: $z = (x-1)^2 - 2y^2$.

20. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 + xy + y^2 + x - y - 1$.

21. Исследовать на экстремум функцию: $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

22. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

23. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

24. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

25. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 + (y-1)^2$.

26. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$.

27. Исследовать на экстремум функцию: $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

28. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$.

29. Вычислить интеграл $\iint\limits_D 2x\,dxdy$, где область D ограничена линиями: $y - x = 5$, $x = 0$, $y = 0$.

30. Вычислить интеграл $\iint\limits_D xy\,dxdy$, где область D ограничена линиями: $x = 4$, $y = 0$, $y = \sqrt{x}$.

31. Вычислить интеграл $\iint\limits_D y^2\,dxdy$, где область D ограничена линиями: $y - x = 4$, $x = 0$, $y = 0$.

32. Вычислить интеграл $\iint\limits_D x^2\,dxdy$, где область D ограничена линиями: $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

33. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, где область D ограничена линиями: $y=x^2$, $y=4$.

34. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$, где область D ограничена линиями: $y=x^3$, $x=1$, $y=0$.

35. Вычислить интеграл $\iint\limits_D ydxdy$, где область D ограничена линиями: $y=x^2$, $y=x$.

36. Вычислить интеграл $\iint\limits_D xdxdy$, где область D ограничена линиями: $x=y^2$, $y=4$.

37. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, где область D ограничена линиями: $y=x^2$, $x=2$, $y=0$.

38. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$, где область D ограничена линиями: $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$.

3 семестр

Разложить в ряд Фурье функцию**:**

1. $y=2x$ в интервале $(-\pi,\pi)$.
2. $y=x$ в интервале $(-3,3)$.
3. $f(x)=\begin{cases}-1, & -2\le x\le 0,\\ 2, & 0<x\le 2.\end{cases}$
4. $f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1.\end{cases}$
5. $y=2x$ в интервале $(-4,4)$.
6. $y=3x$ в интервале $(-\pi,\pi)$.

7. $y = x$ в интервале $(-2, 2)$.
8. $y = x$ в интервале $(-1,1)$.
9. $y = 10x$ в интервале $(-5,5)$.
10. $y = |x| + x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
11. $y = |x|$ в интервале $(-4,4)$.
12. $y = 5x$ в интервале $(-3,3)$.

Разложить в ряд Фурье функцию по синусам и по косинусам:
1. $y = x + 1$ в интервале $x \in (0, \pi)$.
2. $y = x - 2$ в интервале $x \in (0, 3)$.
3. $y = 2x$ в интервале $(0, \pi)$.
4. $y = 2x - 3$ в интервале $(-2,2)$.
5. $y = x^2$ в интервале $(0,\pi)$.
6. $y = x - 1$ в интервале $(0,\pi)$.

Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:
1. $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (y - 2z)\overline{j} + (2x - y + 2z)\overline{k}$; P: $x + 2y + z = 2$.
2. $\overline{a}(M) = (x + y)\overline{i} + (y + 2z)\overline{j} + z\overline{k}$; P: $2x + y + z = 4$
3. $\overline{a}(M) = 5x\overline{i} + (y + z)\overline{j} + (2x + z)\overline{k}$; P: $x + y + z = 2$
4. $\overline{a}(M) = (y + 2z)\overline{i} + 2z\overline{j} + (x - y)\overline{k}$; P: $x + 3y + z = 3$
5. $\overline{a}(M) = z\overline{i} + (x - z)\overline{j} + (2y + z)\overline{k}$; P: $x + y + z = 2$
6. $\overline{a}(M) = (y - 2x)\overline{i} + (y - z)\overline{j} + x\overline{k}$; P: $x + y + 3z = 3$
7. $\overline{a}(M) = 3x\overline{i} + (x - z)\overline{j} + (2x - y)\overline{k}$; P: $x + 4y + z = 4$.
8. $\overline{a}(M) = (2x + z)\overline{i} + z\overline{j} - y\overline{k}$; P: $3x + y + 3z = 3$.
9. $\overline{a}(M) = 3x\overline{i} + (x - z)\overline{j} + (2x - y)\overline{k}$; P: $x + 4y + z = 4$.
10. $\overline{a}(M) = (y + 2z)\overline{i} + 2z\overline{j} + (x - y)\overline{k}$; P: $x + 3y + z = 3$.
11. $\overline{a}(M) = 2x\overline{i} + (y + z)\overline{j} + (2x - y + 2z)\overline{k}$; P: $2x + 2y + z = 2$.
12. $\overline{a}(M) = (x + 2y)\overline{i} + (y - 2z)\overline{j} - z\overline{k}$; P: $2x + y + z = 2$.
13. $\vec{a}(M) = x\vec{i} + (x - y - z)\vec{j} + (3y + 2z)\vec{k}$; P: $2x + y + z = 4$.

14. $\vec{a}(M) = (2x - z)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + z\vec{k}$; P: $x + y + z = 2$.
15. $\vec{a}(M) = (x + 2z)\vec{i} + (y - 3z)\vec{j} + z\vec{k}$; P: $x + 2y + 2z = 6$.

5.2. Фонд оценочных средств

Для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Математический анализ», фонд оценочных средств представляет собой комплект контрольно-измерительных материалов, предназначенных для контроля и оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций, определения соответствия или несоответствия уровня достижений обучающегося планируемым результатам. В комплект оценочных средств входят: задания для типовых расчетов, образцы контрольных работ, задания для контрольно-обучающей программы тестирования (КОПТ).

В 1 семестре: Типовые расчеты № 1, № 2, № 3 в количестве 20 вариантов, на усмотрение преподавателя контрольные работы № 1, 2, 3 или компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования (КОПТ) № 1, 2, 3 по разделам «Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента», «Дифференцирование функций одной переменной», «Неопределенный интеграл».

Во 2 семестре: Типовые расчеты № 1, № 2, № 3 в количестве 20 вариантов, на усмотрение преподавателя КОПТ «Определенные интегралы и их применение» или контрольная работа «Определенные интегралы и их применение», КОПТ «Функции нескольких переменных», контрольная работа «Двойные и криволинейные интегралы».

В 3 семестре: Типовые расчеты №1, №2 в количестве 20 вариантов, контрольные работы: «Ряды» и «Теория поля».

Варианты типовых расчетов представлены в ПРИЛОЖЕНИИ № 1, образцы контрольных работ в ПРИЛОЖЕНИИ № 2.

С образцами компьютерных контрольно-обучающих программ тестирования (КОПТов) можно ознакомиться в методических пособиях, разработанных на кафедре «Высшая математика» (Л3.2, Л3.3, Л3.4, Л3.5, Л3.8).

Билеты для проведения итогового контроля в 1-м семестре (зачет), во 2-м семестре (экзамен), в 3-м семестре (зачет с оценкой) составляются из базы вопросов для оценки знаний, умений и навыков, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы. Образцы билетов представлены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

Л1.1 *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: учебное пособие. М.: Физматлит, 2010.

Л1.2 *Баврин И.И.* Высшая математика: учебник. 3-е изд., стереотип. М.: Изд. центр «Академия», 2010.

6.1.2. Дополнительная литература

Л2.1 *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М., 2009.

Л2.2 *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие. СПб.: Профессия, 2005.

Л2.3 *Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математике: учебное пособие. М.: Айрис-пресс, 2008.

Л2.4 *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник для втузов. М.: Наука, 2007.

Л2.5 *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т: учебное пособие. М.: Интеграл-Пресс, 2009.

Л2.6 *Каплан И.А., Пустынников В.И.* Практикум по высшей математике. Т.1: учебное пособие, М., 2008.

Л2.7 *Каплан И.А., Пустынников В.И.* Практикум по высшей математике. Т.2: учебное пособие. М., 2008.

6.1.3. Методические разработки

Л3.1 *Ишмахаметов К.* Ряды: учебное пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2013.

Л3.2 *Давидюк Т.А., Гончарова И.В.* Определенный интеграл и его приложения: учебно-метод. пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2010.

Л3.3 *Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.* Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента: учебно-метод. пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2009.

Л3.4 *Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.* Дифференцирование функций одной переменной: контрольно-обучающая компьютерная программа тестирования. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2009.

Л3.5 *Лелевкина Л.Г., Саламатина Е.А.* Функции двух и нескольких переменных: учебное пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2010.

Л3.6 *Лелевкина Л.Г.* Методическое пособие по кратным и криволинейным интегралам: Методическое пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2005.

Л3.7 *Рафатов Р.Р., Лелевкина Л.Г.* Элементы теории поля: учебное пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 1998.

Л3.8 *Лелевкина Л.Г., Карабакиров К.Р.* Методы интегрирования неопределенных интегралов: учебное пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2017.

6.2. Перечень информационных и образовательных технологий

6.2.1 Компетентностно-ориентированные образовательные технологии

Традиционные образовательные технологии – лекции, практические занятия, ориентированные, прежде всего, на сообщение знаний и способов действий, передаваемых студентам в готовом виде и предназначенных для воспроизводящего усвоения и разбора конкретных задач.

Инновационные образовательные технологии – занятия в интерактивной форме, которые формируют системное мышление и способность генерировать идеи при решении различных творческих задач. К ним относятся: проблемная лекция; лекция с визуализацией; лекция-диалог; диалоговая форма обучения (предполагает разработку целенаправленной системы вопросов, поиск ответов на которые служит основой для включения студентов в дискуссию, в самостоятельный поиск необходимой информации); групповая форма работы (парами, фронтальная, групповая, индивидуальная, микрогруппы); метод «мозгового штурма» (участники обсуждения высказывают большое количество вариантов решения той или иной задачи).

Информационные образовательные технологии: электронные тексты лекций с презентациями; компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования, разработанные кафедрой; самостоятельное использование студентом компьютерной техники и интернет-ресурсов для выполнения домашних заданий, типовых расчетов и самостоятельной работы по различным разделам математического анализа.

6.2.2 Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения

Кафедра «Высшая математика» имеет постоянно действующий сайт, на котором содержится весь необходимый теоретический и практический материал для студентов, учебно-методические пособия (ЭУМП), электронный учебный курс (ЭУК) и электронная библиотека. Данные материалы размещены на сайте кафедры www.matem.krsu.edu.kg.

Электронные учебно-методические пособия (ЭУМП):

1 Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М. Пределы последовательностей и функций непрерывного аргумента http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/4limits.pdf

2. Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М. Дифференцирование функций одной переменной http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/3diffunc.pdf

3. Лелевкина Л.Г. Методические указания по методам интегрирования неопределенных интегралов http://math.krsu.edu.kg/metodich/undefint.pdf

4. Гончарова И.В., Давидюк Т.А. Определенный интеграл и его приложения http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/19op.pdf

5. Лелевкина Л.Г., Саламатина Е.А. Функции двух и нескольких переменных http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/8funcseveralvar.pdf

6. Лелевкина Л.Г. Методическое пособие к решению задач и контрольных заданий по кратным и криволинейным интегралам http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/2curvint.pdf

7. Ишмахаметов К. Ряды. http://matem.krsu.edu.kg/images/files/metodics/12stepryad.pdf

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для изучения дисциплины используется аудиторный фонд университета, в том числе оснащенный мультимедийным проектором и интерактивной доской. Помимо рекомендованной литературы для изучения дисциплины на сайте кафедры имеются электронные версии конспектов лекций по курсу, учебных, учебно-методических пособий, рабочих программ, разработанных сотрудниками кафедры по всем разделам курса.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Система балльной аттестации при изучении курса «Математический анализ» осуществляется по накопительной системе баллов и предполагает текущий, рубежный и промежуточный контроль. Все виды учебной деятельности оцениваются в баллах. Для контроля и ритмичности работы студентов в течение семестра вводятся аттестационные недели в соответствии с технологической картой дисциплины, с указанием минимальной и максимальной сумм баллов. Технологические карты дисциплины представлены в ПРИЛОЖЕНИИ 4.

Модульный контроль по дисциплине включает:

1. Текущий контроль: усвоение учебного материала на аудиторных занятиях (лекциях, практических, в том числе учитывается посещение и активность студентов) и выполнение обязательных заданий для самостоятельной работы (домашних заданий, типовых расчетов).

2. Рубежный контроль: проверка полноты знаний и умений по материалу модуля в целом. Выполнение модульных контрольных заданий проводится в письменном виде или с помощью компьютерной контрольно-обучающей программы тестирования и является обязательной компонентой модульного контроля.

3. Промежуточный контроль – завершенная задокументированная часть учебной дисциплины – совокупность тесно связанных между собой зачетных модулей.

Основные требования к текущему контролю

Изучение дисциплины следует начинать с проработки рабочей программы, уделяя особое внимание целям и задачам, структуре и содержанию курса.

Успешное изучение курса требует от обучающихся посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнение всех учебных заданий преподавателя, ознакомление с основной и дополнительной литературой.

Запись лекции – одна из форм активной самостоятельной работы студентов, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения и выводы, обобщения, формулировки. Культура записи лекции – один из важнейших факторов успешного и творческого овладения знаниями. Последующая работа над текстом лекции воскрешает в памяти содержание, позволяет развивать аналитическое мышление. В конце лекции преподаватель оставляет время (5–10 минут) для того, чтобы студенты имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу.

Лекции в основном нацелены на освещение фундаментальных и широко используемых понятий и определений, теорем и их доказательств, а также призваны способствовать формированию навыков работы с научной литературой.

Предполагается также, что студенты приходят на лекции, предварительно проработав соответствующий учебный материал по источникам, рекомендуемым программой.

При подготовке к занятиям обучающийся должен просмотреть конспекты лекций, практических занятий, рекомендованную литературу по данной теме; подготовиться к ответу на контрольные вопросы, решить задания домашней работы. Рекомендуется регулярно отводить время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам.

Работа с конспектом лекций предполагает просмотр конспекта лекций в тот же день после занятий, пометку материала конспекта, который вызывает затруднения для понимания. Следует найти ответы на затруднительные вопросы, используя рекомендованную литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, нужно сформулировать вопросы, обратиться за помощью к преподавателю на еженедельных консультациях.

За посещение лекционных и практических занятий, а также за активную работу на них, студент получает поощрительные баллы, указанные в технологической карте.

Для закрепления пройденного материала и формирования навыков решения задач на каждом практическом занятии, студент получает домашнее задание – 5–10 примеров, в зависимости от сложности, по пройденным темам. Для выполнения домашних заданий студентам необходимо внимательно прочитать соответствующий раздел учебника, учебного и учебно-методического пособия, проработать аналогичные задания, рассмотренные преподавателем на лекциях, разобранные на практических занятиях. Выполнение домашних заданий поощряется баллами, указанными в технологической карте.

Методические указания к выполнению типового расчета

Для формирования навыков и умений, предусмотренных компетенциями, а также для активизации самостоятельной работы студентам нужно выполнить типовые расчеты (в первом и втором семестрах – по три типовых расчета, в третьем семестре – два типовых расчета). Задания для типовых расчетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 1. Номер варианта типового расчета выбирается согласно номеру студента в списке группового журнала. Типовые расчеты выполняются в отдельной тетради с последующей обязательной защитой. Если студент за типовой расчет набирает баллы ниже минимального, установленного в технологической карте, то преподаватель возвращает типовой расчет на доработку. После доработки студент может получить только минимально возможное количество баллов.

Перед выполнением типового расчета студентам нужно внимательно прочитать соответствующий раздел учебника, учебного и учебно-методического пособия; проработать аналогичные задания, рассмотренные преподавателем на лекциях, разобранные на практических занятиях, приведенные в рабочей программе образцы выполнения типовых расчетов (ПРИЛОЖЕНИЕ № 5). В случае затруднения выполнения заданий типового расчета следует обратиться с вопросами к преподавателю на еженедельных консультациях.

Основные требования к рубежному контролю

Рубежный контроль по дисциплине «Математический анализ» проводится в виде контрольной работы или с применением компьютерной контрольно-обучающей программы тестирования (КОПТ). Образцы контрольных работ приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 2, с образцами КОПТ можно ознакомиться в методических пособиях, разработанных на кафедре «Высшая математика» (Л3.2, Л3.3, Л3.4, Л3.5, Л3.8).

До рубежного контроля студенты должны пройти текущий контроль: выполнить домашние задания, защитить типовой расчет.

Контрольные работы и компьютерное тестирование проводятся в отведенное преподавателем время согласно технологической карте.

В случае если студент отсутствовал на рубежном контроле по уважительной причине, то он должен согласовать с преподавателем время, когда он сможет пройти его, но обязательно до промежуточной аттестации.

Если студент за рубежный контроль набирает меньше минимального количества баллов, указанных в технологической карте, то он имеет не более двух возможностей пройти его повторно. При этом он может получить не более 75 % от максимально возможных баллов, указанных в технологической карте.

Методические указания к выполнению контрольных работ

Перед выполнением контрольной работы студенту необходимо повторить пройденный теоретический материал по данному разделу, выписать и выучить используемые в данном разделе формулы, проработать задания из домашних работ и типового расчета.

Методические указания к выполнению КОПТ

Компьютерные контрольно-обучающие программы тестирования включают в себя задания с четырьмя вариантами ответов. В каждом задании можно обратиться к кратким методическим указаниям, разъясняющим, каким методом, на основе использования какой формулы решается данное задание. После окончания тестирования компьютер выдает каждому студенту количество верно решенных заданий.

Основные требования к промежуточному контролю

При явке на промежуточную аттестацию студенты обязаны иметь при себе зачётные книжки, которые они предъявляют экзаменатору в начале аттестации. На промежуточном контроле студент должен верно ответить на теоретические вопросы билета и решить практические задания. Образцы билетов приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 3.

Оценка промежуточного контроля:

- 10 баллов – Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ;
- 20 баллов – Вопросы для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ.

Шкалы оценивания всех видов работ и промежуточного контроля приведены в ПРИЛОЖЕНИИ № 6. Итоговая оценка выставляется суммированием баллов текущего и итогового контроля следующим образом:

Оценка по 100-бальной шкале	Оценка по традиционной системе
85–100	Зачтено (отлично)
70–84	Зачтено (хорошо)
60–69	Зачтено (удовлетворительно)
0–59	Не зачтено (неудовлетворительно)

Приложение 1

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

1 семестр

Типовой расчет № 1

Вариант № 1

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-3n+1}\right)$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n}$ 3. $\lim\limits_{x\to1}\left(x-\sqrt{x^2+8}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2+3x-5}$ 5. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}$ 6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3(2x)}{x^2\cdot arctg(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{tg(x-5)}{\sqrt{x+4}-3}$ 8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}$ 9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+8}{5n^2+3n-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y=e^{\frac{1}{x+3}}$.

Вариант № 2

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n-4}-n\right)$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+5}\right)^{5n}$ 3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x+6}{2^x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3+3x^2}{\sqrt{x^2+16}-4}$ 6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2(4x)}{x\cdot tg(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-2x-8}{e^{x-4}-1}$ 8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^{6x}-1}{\ln(1+8x)}$ 9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2n^2+8}{5n^2+3n^3+19}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Вариант № 3

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n+1}-2n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+5}{3n-2}\right)^{n+5}$

3. $\lim\limits_{x\to-2}\left[\ln(x+3)-x^2+5\right]$

4. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-7x+12}{2x^2-12x+18}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2-4x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cdot tg(5x)}{\arcsin^3(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{\sin(x-4)}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-7x)}{e^{5x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n^4+8}{5n^2-3n^3-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность $y=2-\dfrac{1}{x}$.

Вариант № 4

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4+3n^3-2n}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+6}{5n+5}\right)^{2n-1}$

3. $\lim\limits_{x\to3}\left(\sqrt{2x^2-9}-2x\right)$

4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-\sqrt{x^2+8}}{2x-2}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg^3(2x)}{x\cdot\sin(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3^{2x-4}-1}{x^2-4}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-1}{\ln(1-2x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^5-2n^4+1}{n^2-3n^5-8}$

II. Исследовать функцию на непрерывность:

$$y=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le\pi,\\ x-2, & x>\pi.\end{cases}$$

Вариант № 5

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2-5n+5}\right)$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-4}{2n+3}\right)^{5-n}$ 3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x+2}{3x^2+5x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$ 5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-6}{5-\sqrt{x+23}}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{tg^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{arctg(2x-6)}{4-\sqrt{x+13}}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{7^{3x}-1}$ 9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^3+2n^2+8n}{5n^2-3n^3-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y=\dfrac{3}{1+2^{1/x}}$.

Вариант № 6

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-2n+4}-3n\right)$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n+4}\right)^{5n-2}$ 3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+2x-3}{4x^2-x-5}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x+1}{5x-7}\right)^{x^2}$ 5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x+13}-3}{3x+6}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin^2(4x)}{arctg^4(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{e^{3x-3}-1}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^{4x}-1}{\ln(1+9x)}$ 9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+n^3+8}{3n^2+3n^4-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y=\dfrac{x^3-4}{x+1}$.

Вариант № 7

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2-\sqrt{4n^4+2n-1}\right)$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+7}\right)^{3n^2}$ 3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3^{x-3}-1}{2^{x-2}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-3x^2-2x}{x^2-5x+6}$ 5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-9}{1-\sqrt{4x-11}}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3(4x)}{x\cdot tg^2(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{2x+3}}{\sin(3x-9)}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{e^{-6x}-1}$ 9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^5+2n+8}{6n^3+3n^5-9n}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y=9^{\frac{1}{x+3}}$.

Вариант № 8

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-4n+10}-n\right)$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-1}{4n+5}\right)^{6-2n}$

3. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt{x^2+16}-x+1\right)$ 4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{x^2-9}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{15-5x}{3-\sqrt{4x-3}}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(6x)}{arctg^2(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7^{3x+3}-1}{6x^2+7x+1}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{\ln(1+5x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2+6n+2}{5n^2-3n^3-9n+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность:

$$y=\begin{cases}x+4, & x<-1,\\ 2x, & x\ge -1.\end{cases}$$

Вариант № 9

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{16n^2-2n+7}-4n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-4}{6n+5}\right)^{-2n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\ln(2x+9)}{x^2-1}$

4. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-8x+16}{2x^2-5x-12}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2(5x)}{1-\cos(4x)}$

7. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2-8x-4}{arctg(8-4x)}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+7x)}{8^{4x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-5n^2++2}{3n^2+9n+1}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$.

Вариант № 10

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4-3n^2+11}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+2}{7n-4}\right)^{3n+2}$

3. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x+3}{x+4}\right)^{x-5}$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{7x^2-5x-2}{-x^2+3x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+24}-5}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg^3(2x)}{x\cdot\sin^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{\sqrt{2x+7}-3}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{7x}-1}{\ln(1+10x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^6+2n^2+2}{n^6-3n^3-9}$

II. Исследовать функцию на непрерывность:

$$y=\begin{cases}2x^2, & x\le 0,\\ 3, & 0<x\le 1,\\ x+2, & x>1.\end{cases}$$

Вариант № 11

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n^2-2n+5}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8n-3}{8n+1}\right)^{5-4n}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x-1}{2x^2-4x+3}$

4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-5x-25}{x^2-25}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4-\sqrt{6x-2}}{9-3x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\cdot\arcsin^2(3x)}{tg^5(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sin(4x-4)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-9x}-1}{\ln(1-6x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3+9n+2}{3n^3+9n^2+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

Вариант № 12

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2+4}-n^2\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n+2}{9n-5}\right)^{3n+4}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+5}{\ln(x+3)}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2-x-6}{3x^3+4x^2+x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^3+3x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^3(5x)}{arctg^3(4x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-12x)}{e^{4x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2+6n}{3n^3-9n+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y=\dfrac{2}{1+4^{\frac{1}{x-1}}}$.

Вариант № 13

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5n-\sqrt{25n^2+4n+4}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n+51}{10n-64}\right)^{20n+4}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2-6x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{2x^2+12x+18}$

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{3x+10}-1}{2x+6}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(6x)}{x\cdot arctg(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(3x-6)}{2-\sqrt{x+2}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{2^{-10x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n^2+6}{4n^3+4n+5}$

II. Исследовать функцию на непрерывность:

$$y=\begin{cases}2x^2-1, & x\le 1,\\ x+2, & x>1.\end{cases}$$

Вариант № 14

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+2n^2-6}-n^2\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{11n-2}{11n+3}\right)^{4-5n}$

3. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{2x^2-11x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln\left(x^2+3\right)-\ln\left(3x^2+1\right)\right]$

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+6}{7-\sqrt{19-10x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^4(2x)}{tg^4(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-7x-15}{e^{x^2-25}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{-8x}-1}{\ln(1-16x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6-2n^4+6n^2}{9n^6-3n^5-n}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Вариант № 15

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-3n+2}-n^2\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-4}{2n+5}\right)^{5n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\sqrt{x^2+12}-\sqrt{3x^2-3}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-4x^2+3x+27}{2x^2-5x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x+13}-3}{3x+6}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot arctg^2(7x)}{\arcsin^3(2x)}$

7. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3-\sqrt{4x+21}}{tg(5x+15)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{20x}-1}{\ln(1+5x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4+2n^3+n}{7n^5+3n^2+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y=3^{\frac{1}{x-6}}$.

Вариант № 16

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(6n-\sqrt{36n^2-2n+5}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-5}{3n+5}\right)^{-n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x+1}{5x-2}\right)^{3x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2-12x+4}{3x^2+x-14}$

5. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{6-\sqrt{x^2+20}}{3x+12}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2(8x)}{x\cdot\sin^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{arctg(15-5x)}{2x^2+3x-27}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+15x)}{e^{-3x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+9}{5n^3-7n+5}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y=8^{\frac{1}{5-x}}$.

Вариант № 17

I Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2-\sqrt{4n^4-3n^2+1}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n-3}{7n+1}\right)^{2-6n}$

3. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+5x-12}{2x^2+16x+32}$

4. $\lim\limits_{x\to2}\left[\ln\left(3x^2-6\right)-\ln\left(x^2+2\right)\right]$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{16-3x}-4}{x^2+2x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\sin^2(3x)}{1-\cos(4x)}$

7. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{8^{2x+2}-1}{\sqrt{x^2+15}-4}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10^{7x}-1}{\ln(1+21x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15n^3+7n^2+6}{3n^3-5n+4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y = \dfrac{5-x}{x+5}$.

Вариант № 18

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^4+5n^2+2}-3n^2\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-7}{2n+5}\right)^{3n}$

3. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x-10}$

4. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-25}{3x^2+10x-25}$

5. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{\sqrt{5x+11}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^4(2x)}{x\cdot\arcsin^3(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3x^2+7x-6}{e^{2x+6}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-16x)}{6^{8x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n-12}{3n^2+6n-4}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y = \dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x+2}}}$.

Вариант № 19

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7n-\sqrt{49n^2+4n+4}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{3n+1}\right)^{n-2}$

3. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\ln(2x-7)}{x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2+7x+3}{3x^2-5x-8}$

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x-5}{6-\sqrt{39-3x}}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3(3x)}{tg^4(4x)}$

7. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{\arcsin(2x-6)}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-18x)}{e^{9x}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15n^3+2n^2-n+2}{7n^3+3n^2-7n+8}$

II. Исследовать функцию на непрерывность: $y=\begin{cases} x^2, & x\le 0, \\ x, & 0<x\le 1, \\ 1, & x>1. \end{cases}$

Вариант № 20

I. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{49n^2-n}-7n\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n+6}\right)^{4n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+3}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-13x+6}{-x^2+4x+12}$

5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{4x-20}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^3(3x)}{x\cdot\sin(9x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4^{20-4x}-1}{x^2-25}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{14x}-1}{\ln(1+21x)}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4+3n^3-6n}{n^5+n^3-9n+8}$

II. Исследовать функцию на непрерывность:

$$y=\begin{cases} -(x+1), & x\le -1, \\ (x+1)^2, & -1<x\le 0, \\ x, & x>0. \end{cases}$$

Типовой расчет №2

Вариант № 1

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 2x^5 - \dfrac{4}{x^3} + 3\sqrt{x}$

б) $y = \dfrac{2\arcsin x + 3^x}{4\ln x - 2x^2}$

в) $y = \ln\sin\left(2x+5\right)$

г) $y = x^{\ln x}$

д) $y = \left(e^x - 3\cos x\right)\left(5 - 4\log_2 x\right)$

е) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + arctgx^3$

2. Найти производную y'_x функции $\begin{cases} x = \ln\left(1+2t\right), \\ y = t^2 - 2t. \end{cases}$

3. Найти производную от неявной функции:
$\ln(x+y) - arctgx = 0$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin\left(3x\right)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln\left(x^2-15\right)}{e^{x-4}-1}$.

5. Провести полное исследование функции: $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$ и построить ее график.

Вариант № 2

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \dfrac{2}{x^4}$

б) $y = \dfrac{4\arccos x - e^x}{3\log_2 x + 5x^3}$

в) $y = \dfrac{1}{2}\sin^4\left(\cos x\right)$

г) $y = x^{\arcsin x}$

д) $y=\left(2^{x}+4\sin x\right)\left(3\ln x-2\right)$ е) $y=8^{\sqrt{tgx}}+\sin^{4}\left(\cos x\right)$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=arctg2t, \\ y=t^2+2t. \end{cases}$

3. Найти производную от неявной функции: $\cos(xy)=\dfrac{y}{x}$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{tg\left(2x\right)}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{x-1}-1}{\ln\left(2x-1\right)}$.

5. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$ и построить ее график.

Вариант № 3

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=3x^4+\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{4}{x^2}$ б) $y=\dfrac{2\ln x-8x^4}{4^x-2arcctgx}$

в) $y=\arccos\left(ctg4x\right)$ г) $y=x^{\sqrt{x+1}}$

д) $y=\left(5tgx-e^{x}\right)\left(4\log_7 x+3\right)$ е) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{3x-2}}+e^{-\ln\left(1+\cos x\right)}$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=\ln\left(1-4t\right), \\ y=2t^2+4t. \end{cases}$

3. Найти производную y' от неявной функции: $arctg(x+y)=x$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x)}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{e^{x+3}-1}{\ln(2x+9)-\ln 3}$.

5. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$ и построить ее график.

Вариант № 4

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=7\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^5}-3x^3$ б) $y=\dfrac{e^x+6\arcsin x}{5x^2-2\log_4 x}$

в) $y=arctge^{2x}$ г) $y=(tgx)^{x^3}$

д) $y=\left(8ctgx+3^x\right)\left(2\ln x-5\right)$

е) $y=\ln\left(\arcsin x\right)+\dfrac{1}{2}\ln^2 x+\arcsin\left(\ln x\right)$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=arctg3t, \\ y=3t^2-12t. \end{cases}$

3. Найти производную y' от неявной функции: $y\sin x+\cos(x-y)=0$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{tg(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{4^{x+2}-1}$.

5. Провести полное исследование функции: $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ и построить ее график.

Вариант № 5

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=7x+\dfrac{5}{x^2}-\sqrt[7]{x^4}$

б) $y=\dfrac{7^x-3\arccos x}{4x^3+3\ln x}$

в) $y=\ln(\arcsin 3x)$

г) $y=(\sin x)^{\cos x}$

д) $y=\left(e^x-4tgx\right)\left(3+7\log_3 x\right)$

е) $y=arctg\dfrac{1+x^2}{1-x^2}+\sqrt{\arccos(1-2x)}$

2. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции: $\begin{cases} x=\ln(1+6t), \\ y=3t^2-12t. \end{cases}$

3. Найти производную y' от неявной функции: $y\sin x+\cos y=0$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{x^2-4\pi^2}{tg(x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-4x)}{e^{3x-6}-1}$.

5. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{12x}{9+x^2}$ и построить ее график.

Вариант № 6

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \dfrac{4}{x^3}$

б) $y = \dfrac{7x^2 + 4\log_3 x}{2e^x - 5arcctgx}$

в) $y = e^{tg(3x-2)}$

г) $y = (\arcsin x)^{x^2+1}$

д) $y = \left(5^x + 2\cos x\right)\left(10 - 3\ln x\right)$

е) $y = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x^3 - x^2}$

2. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции: $\begin{cases} x = arctg4t, \\ y = t^4 + 4t^3. \end{cases}$

3. Найти производную y' от неявной функции: $arcctg(x+y) - x - 2y = 0$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\sin\left(3x + \pi/4\right)}{\pi/4 - x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5^{2x-3} - 5^5}{e^{x-4} - 1}$.

5. Провести полное исследование функции: $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x-1}$ и построить ее график.

Вариант № 7

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 3x^5 - \sqrt{x^3} + \dfrac{10}{x^5}$

б) $y = \dfrac{3arctgx - 5^x}{4\ln x - 5x^6}$

в) $y=\ln\left(e^{2x}+3\right)$ г) $y=\left(\sin x\right)^{\sqrt{x}}$

д) $y=\left(e^{x}+6ctgx\right)\left(9+7\log_6 x\right)$ е) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=\ln\left(1-5t\right), \\ y=t^5-10t^2. \end{cases}$

3. Найти производную y' от неявной функции: $e^{x+y}=\sin xy$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{\sin\left(2\pi x\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3^{5x+10}-1}{\ln\left(4x+9\right)}$.

5. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$ и построить ее график.

Вариант № 8

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\sqrt[3]{x^7}-4x^6+\dfrac{4}{x^5}$ б) $y=\dfrac{2\arccos x+e^x}{3\log_2 x-7x^3}$

в) $y=3^{-\arcsin\left(6x\right)}$ г) $y=\left(x^3-1\right)^x$

д) $y=\left(7^x-4\sin x\right)\left(4+3\ln x\right)$ е) $y=\dfrac{1}{2}\ln tg\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}tg^2\left(3^x\right)$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=arctg5t, \\ y=5t^2-20t. \end{cases}$

3. Найти производную y' от неявной функции: $arcctg\left(2x-3y\right)=5^{y}$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{ctg\dfrac{\pi x}{4}}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3^{x-4}-1}{\ln\left(33-2x^{2}\right)}$.

5. Провести полное исследование функции: $y=\dfrac{x^{2}-4x+1}{x-4}$ и построить ее график.

Вариант № 9

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=8x^{2}+\sqrt[3]{x^{4}}-\dfrac{2}{x^{3}}$ б) $y=\dfrac{5\ln x+3x^{4}}{6\arcsin x-2^{x}}$

в) $y=\left(1+\sin 2x\right)^{10}$ г) $y=\left(x^{4}+5\right)^{ctgx}$

д) $y=\left(4\log_{5}x-e^{x}\right)\left(6-5tgx\right)$ е) $y=\arcsin\sqrt{1+\sin x}+2^{-\left(x^{2}+2x\right)}$

2. Найти производную y'_{x} функции: $\begin{cases} x=\ln\left(2+3t\right), \\ y=t^{6}-3t^{2}. \end{cases}$

3. Найти производную y' от неявной функции: $\cos\left(x-y\right)-2x+4y=0$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{tg\left(2\pi x\right)}{2x^{2}-6x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(4x-6\right)-\ln 2}{2^{3x-6}-1}$.

5. Провести полное исследование функции: $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$ и построить ее график.

Вариант № 10

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=4x^6-\sqrt[3]{x^7}-\dfrac{7}{x^4}$ б) $y=\dfrac{5\arccos x-e^x}{4\log_5 x-6x^3}$

в) $y=2^{\arcsin 5x}$ г) $y=(\ln x)^x$

д) $y=\left(10\ln x+6^x\right)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)$ е) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}+\ln^3 x$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=arctg6t, \\ y=3t^4+2t^3. \end{cases}$

3. Найти производную y' от неявной функции: $e^{xy}=\ln x+arcctgy$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos(x/2)}{\pi-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(2x^2-1\right)}{3^{x-1}-1}$.

5. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$ и построить ее график.

Вариант № 11

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=2\sqrt{x^3}+3x^2-\dfrac{2}{x^5}$ б) $y=\dfrac{6^x-3arctgx}{5x^2-9\ln x}$

в) $y=\left(1+\cos 3x\right)^6$ г) $y=(\arccos x)^{x^2}$

д) $y=\left(e^x-7\log_3 x\right)\left(\sqrt{2}-3tgx\right)$ е) $y=arctg\sqrt{\sin x}+\dfrac{1}{2}\cos x^2$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=\ln\left(5-4t\right), \\ y=t^8+2t^4. \end{cases}$

3. Найти производную y' от неявной функции: $\cos y=\sin x+2y$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 3\pi}\dfrac{x^2-9\pi^2}{\sin\left(x/3\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{e^{x-3}-e^2}{4^{10-2x}-1}$.

5. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

Вариант № 12

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=4x^3-\sqrt[5]{x^2}+\dfrac{6}{x^2}$ б) $y=\dfrac{8x^4-7\log_8 x}{e^x+2\arcsin x}$

в) $y=\ln tg\left(4x-1\right)$ г) $y=(\sin x)^{x^3}$

д) $y=\left(4^x+6\ln x\right)\left(8+3\cos x\right)$ е) $y=6\sqrt[6]{1-\sin^2 x}+\arccos\left(2^x\right)$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=arctg7t, \\ y=7t^4-21t. \end{cases}$

3. Найти производную y' от неявной функции: $xy+\ln y-2\ln x=0$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/8}\dfrac{\pi/4-2x}{\sin\left(2x+3\pi/4\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln\left(3x-14\right)}{4^{2x-10}-1}$.

5. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+12}$ и построить ее график.

Вариант № 13

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$ б) $y=\dfrac{9^x-3\arccos x}{5x^3+8\ln x}$

в) $y=\sin\left(e^{4x+3}\right)$ г) $y=\left(x^2+2\right)^{3x}$

д) $y=\left(e^x-5\log_8 x\right)\left(6ctgx-1\right)$ е) $y=\log_3\sqrt[3]{x^3-1}+\ln\left(\ln x\right)$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=\ln\left(8-7t\right), \\ y=t^7-7t^2. \end{cases}$

3. Найти производную y' от неявной функции: $tgy=xy^2+e^x$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{ctg\dfrac{\pi x}{6}}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7^{2x-3}-7^3}{e^{6-2x}-1}$.

5. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{-8x}{x^2+4}$ и построить ее график.

Вариант № 14

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{9}{x^3}+\sqrt[3]{x^4}+5x^4$ б) $y=\dfrac{5\arccos x-e^x}{2\log_4 x-6x^2}$

в) $y=\arcsin\left(\ln\left(2x\right)\right)$ г) $y=x^{arctgx}$

д) $y=\left(2^x+3\ln x\right)\left(4\cos x+11\right)$ е) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}+3^{\sin^2 x}$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=arcctg7t, \\ y=t^7-7t^2. \end{cases}$

3. Найти производную y' от неявной функции:

$x\ln y=3x^3+y^2$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{1+\cos\left(x/2\right)}{\left(x-2\pi\right)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(13-3x^2\right)}{3^{x-2}-1}$.

5. Провести полное исследование функции $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$ и построить ее график.

Вариант № 15

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\frac{4}{x^5}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3$ б) $y=\frac{4\ln x-3x^6}{7arcctgx+8^x}$

в) $y=\ln\left(1+arctg2x\right)$ г) $y=\left(\cos x\right)^{tgx}$

д) $y=\left(e^x-5\log_4 x\right)\left(9\sin x-12\right)$ е) $y=6\sqrt[6]{1-\sin x}+\arcsin\left(3^x\right)$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=\ln\left(4+3t\right), \\ y=6t^3-15t^2. \end{cases}$

3. Найти производную y' от неявной функции: $e^{xy}-\left(x+3y\right)=0$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{tg\pi x}{\sin\left(x-2\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{e^{3x+12}-1}{\ln\left(3x+13\right)}$.

5. Провести полное исследование функции $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$ и построить ее график.

Вариант № 16

1. Найти производные следующих функций:

1. $y = \dfrac{8}{x^3} - 4\sqrt{x^3} + 2x^7$

2. $y = \dfrac{3\arcsin x - e^x}{5\log_3 x + 6x^2}$

3. $y = \ln\cos(2x+5)$

4. $y = \left(x^3 + 1\right)^{tgx}$

5. $y = \left(6\ln x - 5^x\right)\left(15 + 7\sin x\right)$

6. $y = \cos^4 x \cos x^4 - \cos\left(4x+1\right)$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x = arcctg 6t, \\ y = 2t^3 - 9t^2. \end{cases}$

3. Найти производную y' функции, заданной неявно: $x\sin y - y\cos x = 0$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{tg\left(x + 3\pi/4\right)}{\pi - 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{8^{x+6} - 8^3}{e^{2x+6} - 1}$.

5. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$ и построить ее график.

Вариант № 17

1. Найти производные следующих функций:

1. $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^7} - \dfrac{2}{x^6}$

2. $y = \dfrac{2arctgx + 4^x}{3\ln x - 4x^5}$

3. $y = \arccos\left(\log_4 7x\right)$

4. $y = \left(tgx\right)^{\sin x}$

5. $y=\left(3\log_9 x+e^x\right)\left(21-2\cos x\right)$ 6. $y=e^{\frac{x}{\ln^2 x}}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=\ln\left(2-5t\right), \\ y=t^5+5t^2. \end{cases}$

3. Найти производную y' функции, заданной неявно: $tg(x+y)-xy=0$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{4\pi-2x}{\cos\left(x/4\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{e^{x+1}-1}{\ln\left(4x^2-3\right)}$.

5. Провести полное исследование функции $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$ и построить ее график.

Вариант № 18

1. Найти производные следующих функций:

1. $y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\frac{5}{x^4}$ 2. $y=\frac{7x^4-5\log_9 x}{e^x-3\arcsin x}$

3. $y=arctg\left(\cos 3x\right)$ 4. $y=(\cos x)^{tgx}$

5. $y=\left(4\ln x-6^x\right)\left(1+5ctgx\right)$ 6. $y=\sin\frac{1+x^2}{1-x^2}+arcctg(\sqrt{x})$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=arcctg 5t, \\ y=3t^5+5t^2. \end{cases}$

3. Найти производную y' функции, заданной неявно: $e^{x+y} - xy = 0$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 3\pi/2} \dfrac{6\pi - 4x}{ctg\,\dfrac{x}{3}}$. б) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{e^{x+1} - 1}{3^{2x+3} - 3}$.

5. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^3 - 32}{x^2}$ и построить ее график.

Вариант № 19

1. Найти производные следующих функций:

1. $y = \sqrt{x^5} + \dfrac{4}{x^3} - 3x^3$ 2. $y = \dfrac{5^x - 3arctgx}{4x^3 + 2\ln x}$

3. $y = e^{\sin(6x-5)}$ 4. $y = \left(x^4 + 1\right)^{\sqrt{x}}$

5. $y = \left(2\log_3 x - 6\cos x\right)\left(9 + e^x\right)$ 6. $y = \arcsin^3\left(\ln\left(1 + x^2\right)\right)$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x = \ln(3 + 4t), \\ y = 2t^4 - 6t^2. \end{cases}$

3. Найти производную y' функции, заданной неявно: $x + y - (x - y)^2 = 0$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 4\pi}\dfrac{\left(3x-12\pi\right)^2}{1+\cos\left(x/4\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{5-5x}-1}{\ln\left(5x-4\right)}$.

5. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{3x-2}{x^3}$ и построить ее график.

Вариант № 20

1. Найти производные следующих функций:

1. $y=9x^3-\dfrac{7}{x^4}+\sqrt[3]{x^7}$
2. $y=\dfrac{e^x+2\arcsin x}{5x^2-4\log_7 x}$
3. $y=\sin\left(\ln 2x\right)$
4. $y=\left(2x+1\right)^{e^x}$
5. $y=\left(5\ln x+8tgx\right)\left(5^x-8\right)$
6. $y=\ln\dfrac{1+e^x}{1-e^{-x}}+\sin\left(tg^2x\right)$

2. Найти производную y'_x функции: $\begin{cases} x=arcctg4t, \\ y=3t^4-8t^2. \end{cases}$

3. Найти производную y' функции заданной неявно: $e^{xy}-x^2+y^2=0$.

4. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\pi-6x}{tg\left(2x+2\pi/3\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln\left(2x-5\right)}{e^{3x-9}-1}$.

5. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$ и построить ее график.

Типовой расчет №3

Вариант № 1

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}}dx$ 2. $\int (1-4x)^7 dx$ 3. $\int \frac{x-1}{7x^2+4}dx$

4. $\int \sin^2(1-x)dx$ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$ 6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

7. $\int (3x-2)\cos 2x\, dx$ 8. $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$ 9. $\int \frac{5xdx}{(x^2-1)(x^2+4)}$

Вариант № 2

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \left(\sqrt[4]{x^3}-\frac{3}{x^2}+2\right)dx$ 2. $\int \frac{dx}{4-3x}$ 3. $\int \frac{1-2x}{5x^2-1}dx$

4. $\int \sin^3(1-x)dx$ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$ 6. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$

7. $\int (5-4x)\sin 3x\, dx$ 8. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ 9. $\int \frac{x^3+4x^2-x+100}{(x^2-1)(x^2+25)}dx$

Вариант № 3

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx$ 2. $\int \sin(5-3x)dx$ 3. $\int \frac{2x+1}{5x^2+1}dx$

4. $\int \left(1-2\sin\frac{x}{5}\right)^2 dx$ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$ 6. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

7. $\int (2x+1)e^{5x}dx$ 8. $\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$ 9. $\int \frac{x^3+8x-2}{x^4+4x^2}dx$

Вариант № 4

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{4x^2 + 3\sqrt{x} - 5}{2x^2} dx$ 2. $\int e^{10x+2} dx$ 3. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}} dx$

4. $\int \cos^3 5x \sin 5x dx$ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$ 6. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$

7. $\int (4-5x)3^x dx$ 8. $\int \frac{dx}{2+4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$

9. $\int \frac{2x^3 - 2x^2 + 5}{(x-1)^2 (x^2+4)} dx$

Вариант № 5

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{5}{x^4} - 2 \right) dx$ 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5+3x}}$ 3. $\int \frac{3x-2}{2x^2+7} dx$

4. $\int \cos^3 (1-x) dx$ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$ 6. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

7. $\int (x^3 - 4x + 1) \ln x dx$ 8. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^5 x}$ 9. $\int \frac{x^3 - x - 5}{(x^2-1)(x^2+4)} dx$

Вариант № 6

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{2\sqrt{x} - x^2 + 3}{\sqrt[3]{x}} dx$ 2. $\int \frac{dx}{3x+4}$ 3. $\int \frac{5-x}{3x^2+1} dx$

4. $\int (3 - \sin 2x)^2 dx$ 5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$ 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$

7. $\int 4x \, arctgx \, dx$ 8. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$ 9. $\int \frac{2x^2 - 7x + 10}{(x-1)^2 (x^2+4)} dx$

Вариант № 7

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{\sqrt[4]{x} - 2x + 5}{x^2} dx$

2. $\int \sin(3 + 4x) dx$

3. $\int \frac{5 + x}{3x^2 + 1} dx$

4. $\int \sin^2 \frac{3x}{2} dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 2x - 3x^2}}$

6. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx$

7. $\int (5x^2 - 16x^4 - 2) \log_2 x \, dx$

8. $\int \frac{dx}{5 + 5\cos x + \sin x}$

9. $\int \frac{4x + 2}{x^4 + 4x^2} dx$

Вариант № 8

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{6}{x^5} + 9 \right) dx$

2. $\int e^{2-5x} dx$

3. $\int \frac{2x - 5}{\sqrt{7x^2 + 3}} dx$

4. $\int (\cos x + 3)^2 \, dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}$

6. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{3x - 2}}$

7. $\int 6x \arcsin x \, dx$

8. $\int \frac{dx}{2 + 4\cos x + 3\sin x}$

9. $\int \frac{x^3 - x + 2}{x^4 + x^2} dx$

Вариант № 9

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{2x^3 - \sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}} dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3 - 4x)^2}}$

3. $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$

4. $\int \cos^3(x + 3) dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 10x + 4}}$

6. $\int x\sqrt{1 + x} dx$

7. $\int (3 - 5x) \cos 3x \, dx$

8. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos x + 2\sin x}$

9. $\int \frac{x^3 - 2x + 5}{x^4 - 1} dx$

Вариант № 10

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int\left(\sqrt[6]{x^5}-\dfrac{8}{x^3}-10\right)dx$ 2. $\int\dfrac{dx}{2-5x}$ 3. $\int\dfrac{3x-2}{3x^2+1}dx$

4. $\int\sin^3\dfrac{4x}{5}dx$ 5. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ 6. $\int\dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

7. $\int(6x+2)\sin 6x\,dx$ 8. $\int\dfrac{dx}{\cos x\sin^3 x}$ 9. $\int\dfrac{x^3+4x-3}{x^4+4x^2}dx$

Вариант № 11

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int\dfrac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}dx$ 2. $\int\cos(4x+3)dx$ 3. $\int\dfrac{x-1}{5-2x^2}dx$

4. $\int(1-\cos)^2\,dx$ 5. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$ 6. $\int\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}dx$

7. $\int(3-2x)e^{2x}dx$ 8. $\int\dfrac{dx}{1+3\cos^2 x+2\sin^2 x}$

9. $\int\dfrac{7x-2}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$

Вариант № 12

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int\left(\sqrt[3]{x^7}-\dfrac{5}{x^2}+4\right)dx$ 2. $\int e^{15-x}dx$ 3. $\int\dfrac{2x+3}{1-3x^2}dx$

4. $\int\sin^2(2x-1)dx$ 5. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ 6. $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$

7. $\int(x^5-4x^3+3)\log_3 x\,dx$ 8. $\int\dfrac{dx}{1+4\sin^2 x}$

9. $\int \frac{x^3+2x^2+4x-2}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+4\right)}dx$

Вариант № 13

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int\left(\sqrt[4]{x^7}+\frac{3}{x^4}-8\right)dx$ 2. $\int\sqrt[5]{3-2x}dx$ 3. $\int\frac{2x+3}{5x^2+2}dx$

4. $\int\sin^3 6xdx$ 5. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}$ 6. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

7. $\int(7x-3)5^x dx$ 8. $\int\frac{dx}{5+5\cos^2 x+\sin^2 x}$

9. $\int\frac{2x^3-2x-5}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+4\right)}dx$

Вариант № 14

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int\left(\sqrt[4]{x^5}+\frac{7}{x^2}-14\right)dx$ 2. $\int\frac{dx}{2x+3}$ 3. $\int\frac{x-3}{4x^2+1}dx$

4. $\int\sin^2 0,5xdx$ 5. $\int\frac{dx}{4x^2-5x+4}$ 6. $\int\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx$

7. $\int 3x\arccos x\, dx$ 8. $\int\frac{dx}{2-\cos x}$ 9. $\int\frac{3x-8}{(x-1)^2\left(x^2+4\right)}dx$

Вариант № 15

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int\frac{3x^2-\sqrt[5]{x}+2}{x}dx$ 2. $\int\cos(5-3x)dx$ 3. $\int\frac{x-3}{1-4x^2}dx$

4. $\int\sin^2(1+0,5x)dx$ 5. $\int\frac{dx}{x^2-4x+10}$ 6. $\int\frac{1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}dx$

7. $\int\left(x^4-16x^8-4\right)\log_4 x\,dx$

8. $\int\frac{dx}{2+\cos^2 x}$ 9. $\int\frac{2-8x}{x^4+4x^2}dx$

Вариант № 16

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int\frac{2x^3-\sqrt{x}+4}{x^2}dx$ 2. $\int e^{7+3x}dx$ 3. $\int\frac{3x-1}{4-x^2}dx$

4. $\int\cos^2 2xdx$ 5. $\int\frac{dx}{2x^2-7x+1}$ 6. $\int\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$

7. $\int 5x\,arcctgx\,dx$ 8. $\int\frac{dx}{\cos^4 x\sin^2 x}$ 9. $\int\frac{x^3-x^2+4x}{x^4-1}dx$

Вариант № 17

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int\frac{\sqrt[6]{x^5}-5x^2+3}{x}dx$ 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{(3-x)^5}}$ 3. $\int\frac{5x-2}{x^2+9}dx$

4. $\int\left(1+2\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$ 5. $\int\frac{dx}{2x^2+x-6}$ 6. $\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$

7. $\int(5x+3)\cos 5x\,dx$ 8. $\int\frac{dx}{2+\cos x}$ 9. $\int\frac{2x+3}{(x-1)^2\left(x^2+4\right)}dx$

Вариант № 18

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}dx$ 2. $\int\frac{dx}{1-4x}$ 3. $\int\frac{2x+5}{\sqrt{5x^2+1}}dx$

4. $\int\cos^2 3xdx$ 5. $\int\frac{dx}{2x^2-2x+1}$ 6. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x-1}}$

7. $\int (4-2x)\sin 4x\, dx$ 8. $\int \frac{1+tg^2 x}{2tgx + 4tgx} dx$ 9. $\int \frac{5x^3+4x^2+20x+3}{(x^2-9)(x^2+4)} dx$

Вариант № 19

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \left(\sqrt[5]{x^9} - \frac{5}{x^7} + 4 \right) dx$ 2. $\int \cos(10x-3)\, dx$ 3. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}} dx$

4. $\int \sin^4 2x dx$ 5. $\int \frac{dx}{2x^2-11x+2}$ 6. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2}} dx$

7. $\int (16-7x)4^x\, dx$ 8. $\int \frac{dx}{4+3\cos x}$ 9. $\int \frac{4x^3+3x^2+48x}{x^4+16x^2} dx$

Вариант № 20

Найти неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{\sqrt{x^3}-3x^4+2}{x} dx$ 2. $\int e^{2-4x} dx$ 3. $\int \frac{2x-4}{x^2+16} dx$

4. $\int \sin^2 3x dx$ 5. $\int \frac{dx}{2x^2+x+2}$ 6. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{3x+5}}$

7. $\int (x^4-2x^3+3)\log_5 x\, dx$

8. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 5\sin^2 x}$ 9. $\int \frac{x^3+9x^2+9x+42}{(x^2-4)(x^2+9)} dx$

2 семестр

Типовой расчет №1

Вариант № 1

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^2 x\sqrt{5-x^2}dx$; б) $\int\limits_1^9 \dfrac{dx}{5+2\sqrt{x}}$;

в) $\int\limits_0^{\pi/3} x\cos x dx$; г) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{3+2\cos x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r = 4\cos\varphi$,

$r = 2 \quad (r \geq 2)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \leq x \leq 3$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi / 3.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $\rho = 6e^{12\varphi/5}, \quad -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций:

$y = 3\sin x, \quad y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi.$

Вариант № 2

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx$; б) $\int\limits_1^{16} \frac{dx}{x + \sqrt[4]{x}}$;

в) $\int\limits_0^{\ln 5} x e^{-x} dx$; г) $\int\limits_0^{1} x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \frac{2}{x}$, $y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах: $r = \cos 2\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = 1 - \ln\cos x, \quad 0 \le x \le \pi/6$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi / 3.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 1 - \sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi / 2$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y = xe^x, \quad y = 0, \quad x = 1.$

Вариант № 3

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^e \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx$; б) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx$;

в) $\int\limits_0^1 \ln(1 + 2x) dx$; г) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 1 + \frac{8}{9}x^2$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r^2 = 4\cos 2\varphi$,

$r = 2$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = 2 - e^x$, $\ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3,5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi / 2.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 5e^{5\varphi/12}$, $0 \le \varphi \le \pi / 3$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^2$, $y^2 - x = 0$.

Вариант № 4

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x dx$; б) $\int\limits_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} dx$;

в) $\int\limits_0^1 \ln(x+1) dx$; г) $\int\limits_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 0$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид: $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r = 4\sin 3\varphi$, $r = 2 \quad (r \geq 2)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{7}{9}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi / 2 \leq t \leq 2\pi / 3.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 4(1 - \sin\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi / 6$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y = 2 - x^2$, $y = x$, $x = 0.$

Вариант № 5

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 8} dx$; б) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} dx$;

в) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x \cos 3x dx$; г) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^3 x \sin^5 x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями : $y = x^2 + 2$, $y = 1 - x^2$ $x = 0$, $x = 1$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r = 1 + \cos\varphi$, $r = \cos\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = 1 - \arccos x + \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \le x \le \dfrac{9}{16}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ x = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \pi / 2 \le t \le \pi.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 2(1 - \cos\varphi)$, $\pi / 3 \le \varphi \le \pi$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y = 2x - x^2, \quad y = -x + 2, \quad x = 0.$

Вариант № 6

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(arctgx)^3}{1 + x^2} dx$; б) $\displaystyle\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx$;

в) $\displaystyle\int_0^\pi x \sin x dx$; г) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ $y = 0$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах: $r = \sin 3\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = e^x + e, \quad \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{15}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 3e^{3\varphi/4}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^3, \quad y = \sqrt{x}$.

Вариант № 7

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{(10x - 2)}{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}dx$; б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5 + 4x}}$;

в) $\int\limits_0^1 (x-1)e^{-x}dx$; г) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 5\cos x + \sin x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \dfrac{x^2}{2}$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r = 6\sin 3\varphi$, $r = 3 \;\; (r \geq 3)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 2\cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi / 6.$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^2, \quad y = 1, \quad x = 2.$

Вариант № 8

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^2 e^{-x^4} \cdot x^3 dx$;   б) $\int\limits_9^{25} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} dx$;

в) $\int\limits_0^{2\pi} x\cos x dx$;   г) $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид: $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах: $r = \cos 3\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = 1 - \ln \sin x, \quad \pi/3 \le x \le \pi/2$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi / 2.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 5(1 - \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi/3$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$.

Вариант № 9

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\left(2 + x^2\right)^2} dx$; б) $\int\limits_0^3 x\sqrt{1 + x}dx$;

в) $\int\limits_0^2 xe^{-\frac{x}{2}} dx$; г) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 3\cos x + 2\sin x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 2(x-1)$, $x = 3$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r = 6\cos 3\varphi$, $r = 3$, $(r \geq 3)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq \dfrac{15}{16}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 5e^{5\varphi/12}$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2.$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^3 + 2,\quad x = 1,\quad y = 1.$

Вариант № 10

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$; б) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

в) $\int_0^1 \ln(x+2)dx$; г) $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$ ($x \geq 0$).

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x=5\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x=4\cos^3 t \\ y=3\sin^3 t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r=2\left(1+\cos\varphi\right)$, $r=2$ $(r \geq 2)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y=1-\ln(x^2-1)$, $3 \leq x \leq 4$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi/6$.

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r=8(1-\cos\varphi)$, $\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/2$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной графиками функций: $y=5\cos x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x \geq 0$.

Вариант № 11

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$; б) $\int_{-2}^{0} \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$;

в) $\int\limits_1^e x\ln x dx$; г) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{1+3\cos^2 x+2\sin^2 x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy=4,\ \ y=x,\ \ x=4$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$, $\begin{cases} x=4\cos^3 t \\ y=4\sin^3 t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r=\cos\varphi, r=2\cos\varphi.$

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2},\quad 1\le x\le 2$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $0\le t\le 3\pi/2.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r=\sqrt{2}e^{\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi/3.$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y=-x^2+9,\quad y=0.$

Вариант № 12

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_{1}^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$; б) $\int_{2}^{10} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}$;

в) $\int_{0}^{1} xe^{-x}dx$; г) $\int_{0}^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2}dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=3\sqrt{x}$, $y=\frac{3}{x}$, $x=9$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид: $\begin{cases} x=(t-\sin t) \\ y=(1-\cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r^2=9\sqrt{2}\cos 2\varphi$, $r=3$ $(r\geq 3)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y=\ln\sin x$, $\pi/3\leq x\leq\pi/2$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t), \\ y=4(\sin t-t\cos t), \end{cases} \quad 0\leq t\leq 2.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r=2e^{4\varphi/3}$, $-\pi/2\leq\varphi\leq\pi/2$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y = \sin^2 x, \quad x = \pi / 2, \quad y = 0.$

Вариант № 13

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \left(e^x + 4\right)^3 e^x dx$; б) $\int\limits_4^{12} \frac{\sqrt{x-3}+3}{\sqrt{x-3}-3} dx$;

в) $\int\limits_0^1 x e^{2x} dx$; г) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 8x$, $x = 8$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases}, \begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}.$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r = \sin\varphi$, $r = 2\sin\varphi.$

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = e^x + 6, \quad \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases} \quad \pi / 6 \le t \le \pi / 4.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 6(1+\sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi / 2$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиками функций: $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

Вариант № 14

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$; б) $\int\limits_{-4/3}^{11/3} \frac{dx}{\sqrt{3x+5}-\sqrt[4]{3x+5}}$;

в) $\int\limits_0^1 x \cdot arctgxdx$; г) $\int\limits_0^{16} \sqrt{256-x^2}dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 2x+4$, $x = 0$.

3.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r = 2\left(1+\cos\varphi\right)$, $r = 2\cos\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = \ln\cos x + 2$, $0 \le x \le \pi/6$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 8\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi / 4$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций: $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.

Вариант № 15

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{x^6 + 4} dx$;   б) $\int\limits_{-4/3}^{1/3} \frac{dx}{6 + \sqrt{3x + 8}}$;

в) $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x} dx$;   г) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r^2 = 4\sqrt{2}\cos 2\varphi$,

$r = 2$ $(r \ge 2)$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \le x \le \frac{7}{9}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi / 3.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 4e^{4\varphi/3}$, $0 \le \varphi \le \pi / 3.$

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций: $x = y^2 + 1, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad x = 0,5.$

Вариант № 16

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; б) $\int\limits_1^9 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$;

в) $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1) dx$; г) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 1 - x$, $x = -3$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид: $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 4\cos 4\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = \sqrt{x^3}, \quad 0 \le x \le 4$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 6\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi / 3$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^2, \quad x = 2, \quad y = 0.$

Вариант № 17

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^2 e^x \sin e^x dx$; б) $\int\limits_{-1}^{62} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+2}} dx$;

в) $\int\limits_0^{2\pi} (x+\pi)\cos x dx$; г) $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{dx}{2 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 2$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}, \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r^2 = 4\cos 2\varphi$, $r = \sqrt{2}$ $(r \ge \sqrt{2})$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \le x \le \frac{1}{4}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi / 3.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 3(1 + \sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi / 2$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций: $y^2 = 9x, \quad y = 3x.$

Вариант № 18

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$; б) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x^3}} dx$;

в) $\int_2^e \ln x dx$; г) $\int_0^3 \frac{dx}{(9 + x^2)^{3/2}}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4x - x^2$, $y = x$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r = \sin 6\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = e^x + 13, \quad \ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически-ми уравнениями: $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(t - \cos t), \end{cases} \quad \pi \le t \le 2\pi.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $\pi / 3 \le \varphi \le \pi / 2$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций: $y^2 = x - 2, \quad y = 0, \quad y = x^3, \quad y = 1$.

Вариант № 19

1.Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{-2}^{4} \sqrt{8 + 2x}dx$; б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{\sqrt{x}}{x + 1}dx$;

в) $\int\limits_{0}^{\pi} x\sin 2xdx$; г) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \sin x}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}, \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}.$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r = 2\cos\varphi$, $r = 3\cos\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = 1 + \ln\cos x$, $0 \le x \le \pi/6$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi / 2.$$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 2\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi / 6$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^3$, $y = x$.

Вариант № 20

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx$; б) $\int\limits_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$;

в) $\int\limits_1^e x^3 \ln x dx$; г) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 3x$, $x^2 = 3y$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первыми арками циклоид: $\begin{cases} x = (t - \sin t) \\ y = (1 - \cos t) \end{cases}$, $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 2\sin 4\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y = -\ln\cos x, \quad 0 \le x \le \pi / 6$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 12e^{12\varphi/5}$, $0 \le \varphi \le \pi / 3$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^3, \quad y = x^2$.

Типовой расчет №2

Вариант № 1

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = y^2 \cos(x + y)$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = \dfrac{x^2}{y - 2z}$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 2x^3 + 6xy^2 - 30x - 24y$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = \dfrac{x}{y}, \quad x = t + 1, \quad y = \ln\left(t + 1\right)$.

5. Найти частные производные $z'_x,\ z'_y$ от функции, заданной неявно: $x^2 y + xyz = e^z$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ от функции: $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции: $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в треугольнике $x = 0, \quad y = 0, \ 2x + 3y - 12 = 0$.

Вариант № 2

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = x^2 tgy$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = xe^{yz}$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 3x^2y - y^3 + 6x^2 + 9y^2 - 4$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = xy, \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = t^2 + 1$.

5. Найти частные производные $z'_x,\ z'_y$ от функции, заданной неявно: $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$.

6. Найти производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ от функции: $z = x^2 + y^3 + y\cos x + e^x + 5$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в треугольнике $x = 1, \quad y = 1, \quad x + y = 1$.

Вариант № 3

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = y^2 ctgx$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = x^2 \sin\sqrt{y+z}$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 6x^2y + 2y^3 - 24x - 30y$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = (1-x)^2 y^3, \quad x = \cos 2t, \quad y = \sin 3t$.

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной неявно: $x + y - e^{xz} = 6$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ от функции $z = e^x \cos y + x^2 + \sin y.$

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 - 3xy + y^3$ в прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$.

Вариант № 4

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = \left(2y^2 - 2x\right)\left(3y + x\right)$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = \ln\left(x^2 + y - 2z\right)$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = x^3 - 8y^3 - 6xy + 1$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = \dfrac{xy+1}{x-y}, \quad x = 5t + 4, \quad y = \dfrac{1}{t}$.

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной неявно: $x^2 - zy^2 - e^{yz} = 0$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ от функции $z = y^4 + 3x^2 + 4xy + 5x - 2y + \pi$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в треугольнике $x = 0,\quad y = 0,\ x + y = 3$.

Вариант № 5

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = e^{x^2+3y^2}$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = \dfrac{x + y^2}{2z}$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = x^3 - xy^2 + 3x^2 + y^2 - 1$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = \sin\dfrac{y}{x},\quad y = \arcsin^2 x + 1$.

5. Найти частные производные $z'_x,\ z'_y$ от функции, заданной неявно: $\sin(xyz) + 5xz^2 = 0$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ от функции $z = x^2 + 5xy + 6y^2x + 2$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy - 2x - y$ в прямоугольнике $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 4$.

Вариант № 6

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = \dfrac{y^2}{x+5}$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = xye^z$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = x^2 y - \dfrac{1}{3}y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = \cos\dfrac{x}{y}, \quad y = \dfrac{\ln 3}{x}$.

5. Найти частные производные $z'_x,\ z'_y$ от функции, заданной

неявно: $z^2 = x\ln\dfrac{x+2z}{y}$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ от функции $z = \dfrac{x}{y} + y^2$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 0,5x^2 - xy$ в области $y = 0,5x^2$, $y = 3$.

Вариант № 7

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = y\log_2 5x$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = xz \cdot tg\sqrt{y}$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = 5^{xy^2}$, $y = \dfrac{x}{\log_5 x}$.

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной неявно: $\cos\left(\dfrac{xy}{z}\right) = -4yz^2 + 5$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ от функции $z = x^4 + 5x^2 y - 7xy^2 + 8$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x - y + x^2 y$ в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.

Вариант № 8

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = x^2 3^{x+y}$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = x^{yz}$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = x^2 y - y^3 - x^2 - 3y^2 + 3$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = 3^{\sin\left(x^2 - y^2\right)}$, $x = uv$, $y = \dfrac{u}{\ln v}$.

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной неявно: $3^{xz^2} + \ln\left(x\sqrt{y}\right) = 3z - 1$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ от функции $z = x^2 + 3y^3 + 5x^2 y + 5x - 4y$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

Вариант № 9

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = y^2 5^{x^2 + 4y}$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = \dfrac{2x^2 + y}{z + x}$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 3x^2 - 6xy - y^3 - 12x + 12y$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = e^{x^2 - 3y}$, $x = u\left(5 - v\right)^2$, $y = \ln\left(u^3 + v^2\right)$.

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной неявно: $e^{z^2} - x^2 y^3 \ln z = 5y$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ от функции $z = x^3 + 4x^2 y - 2xy^2 - 15xy + 1$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в треугольнике $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -3$.

Вариант № 10

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = (x+3)\arcsin y^2$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = yze^{x^2}$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = 3^{5x - 3y^2}$,

$x = \dfrac{u^2 + 3v}{v}$, $y = \ln\left(u + 3v^2\right)$.

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной неявно: $\sin\left(xyz\right) + 5xz^2 = \ln 3$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ от функции $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 - y + 1$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 2$ в прямоугольнике $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$, $y = -1$.

Вариант № 11

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = \dfrac{2y^2 - 2x}{3y + x}$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = xy\cos\sqrt{z}$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = x^2 y - 2y^3 - x^2 - 5y^2$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = \sin\left(3x^2 - y^2\right)$, $x = 3arctgu + 5^v$, $y = \dfrac{u + 4v^3}{v^2}$.

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной неявно: $\cos(xy) - \log_2(xz) = (y - z)^2$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ от функции $z = e^{x^2} + 4x - 5xy^3$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2$ в треугольнике $x = 1$, $y = 0$, $4x - 3y = 6$.

Вариант № 12

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = \dfrac{2x^2 + y}{3y + x}$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = x\ln\left(y + z\right)$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 2x^3 + y^2 + 6xy + 12x$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = e^{x^2 - 2y}$, $x = \arcsin 2t,\ \ y = 2t^3 - 4t$.

5. Найти частные производные $z'_x,\ z'_y$ от функции, заданной неявно: $y^2 + \ln\left(x - z\right) - z^3 = 2^{xy}$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ от функции $z = \ln x - x^2 + y^2 + 4x^3 y^2$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в треугольнике $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -5$.

Вариант № 13

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = x^y$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = \dfrac{y^2}{x + z}$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 8x^3 - y^3 - 12xy - 1$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = tg\dfrac{x}{y}$,

$x = \left(1 - 2t\right)^5$, $y = \dfrac{3}{\sin t}$.

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной

неявно: $\cos\left(y^2\right) + \ln\left(x^2 - z^2\right) = z$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ от функции

$z = e^{x^2} + 5\cos y - 4x^2 y^4$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике $x = -1$, $x = 1$, $y = -3$,

$y = 4$.

Вариант № 14

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = x \cdot tg\sqrt{y}$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = x^2 z e^y$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = 2x^3 + 16y^3 - 12x^2y - 9x^2$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $x = u^2v^3$, $y = arctgv$.

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной неявно: $e^{xyz^2} + 5x - \ln z + 3y = 5$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ от функции $z = y\cos x + x\sin y$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 6xy - x^2 - y^2 + 1$ в области $x^2 = y^2$, $x = 4$.

Вариант № 15

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = xye^{x^2}$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = xarctg\left(yz\right)$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = -8x^3 + y^3 + 6xy^2 + 9y^2$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x = \cos\left(uv\right)$, $y = u\sin v$.

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной неявно: $x^3 + y^3 - e^{y^2+z^2} = 3tgz$.

6. Найти производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ от функции $z = x^6 + y^2 + \log_3 x + 5x^2y^4 + 1$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ в области $y = x^2$, $y = 4$.

Вариант № 16

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = \frac{x + y^2}{2x - y}$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = y^{zx^2}$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + y^2)$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x = R\cos t$, $y = R\sin t$.

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной неявно: $z^3 = xy^2 + arctg\frac{y}{x}$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ от функции $z = y^2 e^{x^2} - x - 1$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.

Вариант № 17

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = \dfrac{x}{y^2 - 2z}$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = e^{-2x^2}(x - y^2)$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = e^{x^2 + y^2}$,

$x = a\cos u,\ \ y = a\sin v$.

5. Найти частные производные $z'_x,\ z'_y$ от функции, заданной

неявно: $y^2 + 5 = \arcsin\dfrac{x}{z}$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ от функции $z = x^2 y + xy^2 - 5\ln y$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x$ в области $x = -y^2$, $x = -16$.

Вариант № 18

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = x^2 \sin(x + y^2)$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = y^2 x e^z$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = e^{-\frac{y}{2}}(x^2 - y)$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = x^2 e^y$,

$x = \sin u,\ \ y = \cos u$.

5. Найти частные производные $z'_x,\ z'_y$ от функции, заданной

неявно: $z = x + arctg\dfrac{y}{z - x}$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ от функции $z = e^x \sin y + x e^y$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy(4 - x - y)$ в треугольнике: $x = 1$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Вариант № 19

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = x e^{xy}$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = z \sin x \cos y$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = e^{-2y^2}(x^2 + y)$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = x^y, \quad x = \ln(u - v), \quad y = e^{\frac{u}{v}}$.

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной неявно: $xe^y + ye^x + ze^z = a$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ от функции $z = (x+1)^2 + \dfrac{1}{y} - 6xy^2$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 3xy + y^2 - 4$ в области $y = -x^2$, $y = -9$.

Вариант № 20

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = \dfrac{x^2}{y - 2}$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = \dfrac{x + y}{\ln(z - x)}$.

3. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = -\dfrac{1}{2}x^2 + 8xy - y^3 - 13x - 12y$.

4. Найти частные производные сложной функции: $z = x\sin y\cos t,\ \ x = \ln(t^2+1),\ \ y = -\sqrt{1-t^2}$.

5. Найти частные производные $z'_x,\ z'_y$ от функции, заданной неявно: $x\sin y + y\cos z + ztgx = 5$.

6. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ от функции $z = 3x^2 + x^3y^2 + 5x - 4y + \ln 5$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = -x^2 + 4xy - 34y^2 + 4x - 1$ в треугольнике $x = -1$, $y = -1$, $x + y = -4$.

Типовой расчет № 3

Вариант № 1

1. Поменять порядок интегрирования $\int_0^2 dy \int_y^{4-y} f(x,y)dx$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y=1$, $z=0$, $z=6$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=x$, $x=6-y^2$, $y=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=4y$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int_L \frac{8y}{x}dl$, где L: парабола $y=\frac{1}{2}x^2$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(4;8)$.

5. Вычислить интеграл $\int_L (2x^2+y)dx+(5y-3x)dy$, где L – парабола $y=x^2$, от точки $(0,0)$ до точки $(3,9)$.

Вариант № 2

1. Поменять порядок интегрирования $\int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x,y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $y=9$, $z=1$, $z=2$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x+y=2$, $x=y^2$, $y=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=y$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L xy^2dl$, где L: $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{4}$.

5. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L(2x-2y-4)dx+(-2x+10y)dy$, и вычислить его от точки $(0,1)$ до точки $(3,0)$.

Вариант № 3

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x=y^2$, $x=1$, $z=0$, $z=2$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y-2x=2$, $x+y=2$, $y=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=y$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L\sqrt{x^2+y^2+a^2}\,dl$, где L: $r=a\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

5. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(4x^2-2y\right)dx+\left(5x+3xy\right)dy$. Контур L: $y=0$, $x=4$, $y=x$.

Вариант № 4

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y=x^2-1$, $y=0$, $z=0$, $z=2$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $2x+y=4$, $x-2y=2$, $x=0$, если поверхностная плотность равна $\rho\left(x,y\right)=4x$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \cos x \sin x dl$, где L: $y=\ln\sin x$, $\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{3}$.

5. Вычислить по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении $\oint\limits_L \left(x^3-3y+1\right)dx+\left(x^2-3y+5\right)dy$. Контур L: $y=x^2$, $y=9$.

Вариант № 5

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x = y^2 - 4$, $x = 0$, $z = 0$, $z = 1$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x, y) = x^2$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{1 + \cos^4 x}\,dl$, где L: $y = tgx$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$.

5. Вычислить интеграл $\int\limits_L (x^2 + 5y)dx + (2x + 4y + 5)dy$, где L: $y = x^3$, от точки $(1,1)$ до точки $(2,8)$.

Вариант № 6

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = y^2$, $x = -1$, $x = 2$, $z = 4$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = 3 - x^2$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x, y) = 2x^2$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}\,dl$, где L: $y = \cos x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

5. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L \left(3x^2+10xy\right)dx+\left(5x^2-8y\right)dy$, и вычислить его от точки $(0,0)$ до точки $(4,8)$.

Вариант № 7

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z=2x^2$, $z=2$, $y=1$, $y=2$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=5-x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=4x^2$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$, где L: $y=\sin x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

5. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении: $\oint\limits_L \left(5xy+3\right)dx+\left(2x^2-4y\right)dy$. Контур L: $x=0$, $y=3$, $y=x$.

Вариант № 8

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x^3}^{10-x} f(x,y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 5 - y^2$, $x = 0$, $x = 2$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x = y^2 - 4$,

$x = -\frac{1}{2}y^2 + 2$, если поверхностная плотность равна $\rho(x, y) = y^2$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{8y}\,dl$, где L: $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$, $0 \le t \le \sqrt{8}$.

5. Вычислить по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении: $\oint\limits_L \left(5x^2 + 2y^2 - 4\right)dx + \left(3x^2 - 2y^3 + 1\right)dy$. Контур L: $y = x^2$, $y = 0$,

$x = -1$, $x = 2$.

Вариант № 9

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^8 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{10-y} f(x, y)dx$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 10 - x^2$, $y = -1$, $y = 1$, $z = 1$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x + 3$,

если поверхностная плотность равна $\rho(x, y) = x$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{y}dl$, где L: $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

5. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(x^2 + 2xy\right)dx - \left(3x^2 - y + 1\right)dy$, где L: $y = 2 - x^2$, от точки $\left(-1,1\right)$ до точки $\left(1,1\right)$.

Вариант № 10

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x + y + z = 5$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x = y^2 - 2$, $y = -1$, $y = 1$, $x = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho\left(x, y\right) = y^2$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}dl$, где L: $r = 2\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

5. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L \left(2x - y^2 - 2\right)dx + \left(-2xy + 3y^2\right)dy$, и вычислить его от точки $\left(0,5\right)$ до точки $\left(6,0\right)$.

Вариант № 11

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_{x^2}^4 f(x,y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x-y+z=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=4$, $x=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=xy$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L: $r=2\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

5. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении: $\oint\limits_L \left(2xy+y^2\right)dx+\left(3x^2+2y+1\right)dy$. Контур L: $x=0$, $y=4$, $y=x^2$.

Вариант № 12

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x^2}^{2} f(x,y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y-x+z=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x=y^2$, $x+y=6$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=3y^2$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dl$, где L: $r=1-\cos\varphi$, $0\le\varphi\le2\pi$.

5. Вычислить по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении: $\oint\limits_L \left(-2x^2+xy+10\right)dx+\left(2x+3y^2-5\right)dy$. Контур L: $y=x^2$, $y=8-x^2$.

Вариант № 13

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{y^2-4}^{0}f(x,y)dx$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x-y-z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $x=3-y^2$, $y=1$, $y=-1$, $x=0$, если поверхностная плотность равна $\rho\left(x,y\right)=2y^2$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L xdl$, где L: дуга окружности $r=R$, в I четверти.

5. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(5x+2y^2\right)dx+3xydy$, где L: $y=-x^3$, от точки $\left(0,0\right)$ до точки $\left(2,-8\right)$.

Вариант № 14

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{y-2}^{-\sqrt{y}}f(x,y)dx$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x+y=4$, $x=0$, $y=x$, $z=0$, $z=1$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $x+y=2$, $x=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=5x$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, где L: $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

5. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L (2x+2y)dx+(2x+6y-5)dy$, и вычислить его от точки $(1,1)$ до точки $(5,4)$.

Вариант № 15

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x+y=4$, $y=0$, $y=2x$, $z=0$, $z=2$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=x+2$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=x^2$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos^2 x}dl$, где L: $y=\sin x$, $0\le x\le \frac{\pi}{4}$.

5. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении: $\oint\limits_L \left(x^3-2xy\right)dx+\left(x-2y+6\right)dy$. Контур L: $y=0$, $x=3$, $y=x^2$.

Вариант № 16

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x+2}^{4-x^2} f(x,y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x+y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=2$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=x^2-4$, $y=-2x^2+8$, если поверхностная плотность равна $\rho\left(x,y\right)=2x^2$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{x^3}{y^2}dl$, где L: $xy=1$, $1\le x\le 2$.

5. Вычислить по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении: $\oint\limits_L \left(3x^5-2xy+1\right)dx+\left(5xy-4y^2+5y\right)dy$. Контур L: $y=4-x^2$, $y=0$.

Вариант № 17

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y-2}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x-y=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=3$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=2x^2$, $x+y=3$,

если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=x+1$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{1+x^4}\,dl$, где L: $y=\dfrac{x^3}{3}$, $1\le x\le 2$.

5. Вычислить интеграл $\int\limits_L \left(x^3-y+1\right)dx+\left(2xy-3\right)dy$, где L:

$x=y^2$, от точки $(4,-2)$ до точки $(4,2)$.

Вариант № 18

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x} f(x,y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y-x=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=4$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $2x+y=-4$,

$y=4x-4$, $y=0$, если поверхностная плотность равна

$\rho(x,y)=-2y$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \sqrt{1+x^6}\,dl$, где L: $y=\dfrac{x^4}{4}$, $0\le x\le 1$.

5. Показать, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования $\int\limits_L \left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+6y^2\right)dy$, и вычислить его от точки $(0,0)$ до точки $(3,9)$.

Вариант № 19

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x=4$, $y=0$, $y=\sqrt{x}$, $z=0$, $z=2$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=x+2$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=5x$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L y^2dl$, где L: $y=\dfrac{x}{2}$, $0\le x\le 2$.

5. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении: $\oint\limits_L (xy+2)dx+\left(3x+2y^2\right)dy$. Контур L: $y=0$, $x=4$, $x=y^2$.

Вариант № 20

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{6-x^2}} f(x,y)dy$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x=4$, $y=0$, $y=\sqrt{x}$, $z=0$, $z=2$.

3. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y=x$, $y=-3x+12$, $y=0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y)=3y$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L ydl$, где L: $y=x^3$, $0\le x\le 1$.

5. Вычислить по формуле Грина криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении: $\oint\limits_L \left(2x^3+5xy+y^2\right)dx+\left(x^2+y^2-2y^3\right)dy$. Контур L: $y=x^2-9$, $y=0$.

3 семестр

Типовой расчет № 1

Вариант № 1

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{9n+1}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n(n+1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+1}{n^2-n+4}$; д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,2} e^{-4x^2}dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y''-(1+x^2)y=0, \quad y(0)=-2, \quad y'(0)=2.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x)=x-1, \quad -1\le x\le 1$; б) $f(x)=\begin{cases}-2, -\pi\le x\le 0,\\ 3, 0<x\le\pi.\end{cases}$

8. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-x, \quad 0\le x\le \pi .$$

Вариант № 2

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n+1}\right)^{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-1}{2n^4+n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{3n+2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1} .$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}} .$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int\limits_{0}^{0,1}\sin\left(100x^2\right)dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y'' = \cos y + 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 .$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x) = |x|, \quad -\pi \le x \le \pi$; б) $f(x) = \begin{cases} -x, -2 \le x \le 0, \\ 0, 0 < x \le 2. \end{cases}$

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x) = 2 - x, \quad 0 \le x \le 2.$$

Вариант № 3

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+100}{100n^2 - 2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n-1} \right)^{3n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{10^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^4 + 2n - 1}{5n^2 + 2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(3 + \ln n)^3}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+3} .$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^{n+1}}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int\limits_0^1 \cos\left(x^2\right) dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y' = e^y + 2xy, \quad y(0) = 1.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции $f(x)$ и построить график суммы ряда:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, -\pi \le x \le 0, \\ 2, 0 < x \le \pi. \end{cases}$ б) $f(x) = x + 2, \quad -2 \le x \le 2$.

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{6}, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Вариант № 4

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 4n}{2n^4 - 1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{2n^2 + 2}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n!}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n+2}$;　　　　д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(7+5\ln n)}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-1}{100n^2+1}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^{n+2}}x^n.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x/5)}{x}dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y''-xy'+y^2=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x)=2+|x|,\quad -1\le x\le 1$;　　　б) $f(x)=\begin{cases}-4, -\pi\le x\le 0,\\ 4, 0<x\le\pi.\end{cases}$

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x)=x-1,\quad 0\le x\le 2.$$

Вариант № 5

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{n^5-3n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-2}{n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5n+6}{10n+101}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{\sqrt{n^5+5}}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n^3+1}}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y' = xy + e^{-x}, \quad y(1) = 0.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x)=\dfrac{\pi - x}{2}, \quad -\pi \le x \le \pi$; б) $f(x)=\begin{cases} -5, -3 \le x \le 0, \\ 5, 0 < x \le 3. \end{cases}$

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x)=2-\frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le \pi .$$

Вариант № 6

1. Найти сумму ряда: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+4)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{4n^3-3}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n\left(n+2\right)}$;

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^6+2}{3n^6-1}$; д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+1\right)\sqrt{3+2\ln\left(n+1\right)}}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{2n}{3n^4+5} .$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt[4]{n^5+1}} .$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\displaystyle\int_0^{0,2}\sin\left(25x^2\right)dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y'' = x^2 y' - y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 .$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x) = x + 1, \quad -2 \le x \le 2$; б) $f(x) = \begin{cases} -2, -\pi \le x \le 0, \\ 1, 0 < x \le \pi. \end{cases}$

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 2 .$$

Вариант № 7

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+5)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{100\sqrt{n}+5}{n+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2+2}{3n-1} \right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n \cdot n!}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n+3}{3n+2}$ д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\sqrt{5+3\ln(n+2)}}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2n!} .$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \frac{(x-3)^n}{3^n} .$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int\limits_0^{0,5} \cos\left(4x^2\right) dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y'' = xy' + y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 .$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$ б) $f(x) = 4 - |x|, \quad -4 < x < 4$.

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 2, \\ 1, & 2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Вариант № 8

1. Найти сумму ряда: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)(n-1)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{2}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n-1)}{2^n(n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^3-1}{2n^2+2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{(n+3)\left(2+3\ln(n+3)\right)}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5n}{6n^2-1}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{4^n(n^2+1)}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int\limits_0^{0,4}\dfrac{\ln(1+x/2)}{x}dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y''=xy',\quad y(0)=y'(0)=1.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x)=x+2,\quad -2\le x\le 2$; б) $f(x)=\begin{cases}2, -\pi\le x\le 0,\\ 1, 0<x\le\pi.\end{cases}$

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x)=\begin{cases}x,\ 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ 1,\ \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$$

Вариант № 9

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)n}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{1+3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n^2-2}{4n^2+5}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n}{2^n\cdot\left(3n+2\right)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+n^2-1}{3n^2+4n-5}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\left(n+3\right)\left(9+\ln^2\left(n+3\right)\right)}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+5)^n}{5^{2n}}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2}\,dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y''+xy=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x)=x+1, \quad -\pi \le x \le \pi$; б) $f(x)=\begin{cases} -2, -2 \le x \le 0, \\ 3, 0 < x \le 2. \end{cases}$

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график суммы ряда:

$f(x)=\pi-2x$, $x \in [0;\pi]$.

Вариант № 10

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(n-2)(n+1)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{3n^3+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{7n-2}{6n+5}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n}{n^2 \cdot 3^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4+3}{3n^4-n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+4)\left(4+\ln^2(n+4)\right)}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n+1}{n^2+2}$.

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{n(n+3)}$.

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int\limits_0^{0,4} \sin\left(\dfrac{5x}{2}\right)^2 dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y'' = (y')^2 + y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1 .$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x) = x - 2, \quad -\pi \le x \le \pi$; б) $f(x) = \begin{cases} -2, -4 \le x \le 0, \\ 1, 0 < x \le 4. \end{cases}$

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график суммы:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}, \ \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

Вариант № 11

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)(n+1)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{n^3 - 2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{3n+3} \right)^{3n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{(2n)!}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^4}{1+n^4}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{(2n+3)\sqrt[4]{\left(\ln(2n+3)\right)^3}}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)4^n}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int\limits_0^{0,2}\cos\left(25x^2\right)dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y''-xy'-y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда

а) $f(x)=2x-1,\quad -1\le x\le 1$; б) $f(x)=\begin{cases}-3, -\pi\le x\le 0,\\ 2, 0<x\le\pi.\end{cases}$

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x)=\pi-x,\ x\in(0;\pi).$$

Вариант № 12

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{2n^3-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3n!}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(3n+2)\sqrt[7]{5+6\ln(3n+2)}}$

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{100n+1}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-5)^n}{n\cdot 4^n}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+2x)}{x}dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y''=y^2+xy',\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x)=2|x|,\quad -\pi\le x\le\pi$; б) $f(x)=\begin{cases}1, -3\le x\le 0,\\ -2, 0<x\le 3.\end{cases}$

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x)=2x-1,\quad x\in(0;1).$$

Вариант № 13

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{1}{n(n-3)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^4+2}{3n^6-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^{4n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{(2n)!}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^2+5\sqrt{n}}{2n+1}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8}{(3n+4)\sqrt[4]{8+5\ln(3n+4)}}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n}{3n+1}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 5^n}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int\limits_0^{0,5}\sin\left(4x^2\right)dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y''-yy'=x^2,\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=1.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 2, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x}{2}+1, \quad -2 \le x \le 2$.

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}-x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

Вариант № 14

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)(n+2)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^{n/2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(n-1)!}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(5n+3)\left(9+2\ln(5n+3)\right)^4}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^n(n+1)}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int\limits_{0}^{0,1}\cos\left(100x^2\right)dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$y''=(y')^2-xy, \quad y(0)=4, \quad y'(0)=2$.

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x)=3+|x|, \quad -1\le x\le 1$; б) $f(x)=\begin{cases}-2, -\pi\le x<0,\\ 1, 0\le x\le\pi.\end{cases}$

8. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам. Построить график суммы ряда: $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{5}, \quad 0\le x\le\pi$.

Вариант № 15

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)(n+3)}$.

2. Исследовать на сходимость ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+5}{n\cdot 3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\dfrac{1}{3^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^3}{1+n^3}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+1)}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n!}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-5)^{n}}{n\cdot 4^{n}}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,0001 $\int_{0}^{1}\sin x^{2}dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y''+xy'+y^{3}=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x)=x+2,\quad -2\le x\le 2$; б) $f(x)=\begin{cases}1, -\pi\le x<0,\\ 2, 0\le x\le \pi.\end{cases}$

8. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x)=x-1,\quad 0\le x\le 2.$$

Вариант № 16

1. Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n+1)(n+3)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg^{n} \dfrac{1}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{1+n^4}$;. в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-2}{n!}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[5]{n^2}+\sqrt[3]{n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{(n+3)\sqrt[3]{\left(\ln(n+3)\right)^4}}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,0001 $\int\limits_{0}^{0,5} \ln(1+\sqrt{x})dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y'' = (2x-1)y' - 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x) = \begin{cases} 3, & -\pi \le x < 0, \\ 2, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$ б) $f(x) = x + |x|, \quad -1 < x < 1$.

8. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам. Построить график суммы ряда:

$f(x)=\pi-x$, $x\in\left(0;\pi\right)$.

Вариант № 17

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+2)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\left(n+2\right)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^{n}\frac{1}{n+1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^{2}+1}{n\cdot 5^{n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\left(2n+3\right)\sqrt[3]{\left(\ln\left(2n+3\right)\right)^{2}}}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{n+5}{n+2}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+3\right)^{n}}{n^{2}}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,0001 $\int\limits_{0}^{0,5} arctgx^{2}dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y'' = y' - xe^{y}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x) = 1 - x, \quad -2 \le x \le 2$; б) $f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi \le x < 0, \\ 2, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$.

8. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам. Построить график суммы ряда: $f(x) = x - 1, \quad x \in (0;1)$.

Вариант № 18

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+3)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n/2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+1}{5n^4+n^2+2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[5]{\ln^4 n}}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6n}{7n+2}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{x^n}{2^n}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,0001 $\int\limits_0^{0,5} \ln(1+x^3)dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y'' - \left(x^2+1\right)y = 0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=2.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x)=2x+1, \quad -\pi \le x \le \pi$; б) $f(x)=\begin{cases} x+1, -2\le x<0, \\ 1, \ 0\le x\le 2. \end{cases}$

8. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам. Построить график суммы ряда: $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{3}, \quad 0\le x\le \pi$.

Вариант № 19

1. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{(n+2)(n+4)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^2+5\sqrt{n}}{2n+1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\dfrac{3n+1}{4n+2}\right)^{4n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{(3n-1)\sqrt[4]{\left(\ln(3n-1)\right)^3}}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n} .$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\sqrt{n}} x^n .$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,0001 $\int_0^1 e^{-4x^2} dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y'' - x^2 y + y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x) = x + 2, \quad -\pi \le x \le \pi$; б) $f(x) = \begin{cases} -4, -2 \le x < 0, \\ 4, \ 0 \le x \le 2. \end{cases}$

8. Разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x) = 2 - x, \quad x \in (0;2) .$$

Вариант № 20

1. Найти сумму ряда: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{(n-1)(n+1)}$.

2. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^{4n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^2+5}{2n+1}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{(3n+2)\sqrt[4]{\left(\ln(3n+2)\right)^5}}$.

3. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+3)}.$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)\cdot 2^n}.$$

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,0001 $\int\limits_0^1 \sin\dfrac{x^2}{9}\,dx$.

6. Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$y''+xy'+y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=-1.$$

7. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x)=x-1,\quad -\pi\le x\le\pi$; б) $f(x)=\begin{cases}-2, & -4\le x<0,\\ 3, & 0\le x\le 4.\end{cases}$

8. Разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-x, \quad 0\le x\le\pi \ .$$

Типовой расчет № 2

Вариант № 1

1. Найти производную скалярного поля $u = 5x^2 + 4x^3 y + 5xz - e^{z^2}$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = x^2 y + 5z \sin y + 6z^2$ в точке $M_0(-1;0;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = z\overline{i} + (x + y - 2z)\overline{j} + (y + 2z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $x + 2y + z = 2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (y - 2z)\overline{j} + (2x - y + 2z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости *P*: $x + y + z = 1$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (x^2 y - z)\overline{i} - xyz\,\overline{j} + (xy^3 + z^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (2x - 4yz)\overline{i} + (2y - 4xz)\overline{j} + (2z - 4xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 2

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3y + 5xz - e^{x+z^2}$ в точке $M_0(-1;2;1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;-2;0)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz + 5z\ln y + 6z^2$ в точке $M_0(1;3;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (x+z)\overline{i} - 2z\overline{j} + (2y+x+z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $2x+2y+z=2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (x+z)\overline{j} + (2x-y+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x+y+3z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = x^2yz\overline{i} + xy^3z\,\overline{j} + (xy^3+2z)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (2x+3yz)\overline{i} + (2y+3xz)\overline{j} + (2z+3xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 3

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3\cos y + 5xz^3 - x + z^2$ в точке $M_0(-1;-2;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz + z\ln x + 6y^2$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (y+z)\overline{i} + (x+2y)\overline{j} + (x+3z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $x + 2y + 2z = 2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (y-2z)\overline{j} + (2x - y + z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $x + 2y + z = 4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = x^2y\overline{i} + (xy^3 - z)\overline{j} + (xy^3 + xz^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (2x+5yz)\overline{i} + (2y+5xz)\overline{j} + (2z+5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 4

1. Найти производную скалярного поля $u = y^2\sin x + 2xz^3 - yz^2$ в точке $M_0(1;-2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = z\cos xy$ в точке $M_0(2;1;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (4x+z)\overline{i} + (z+2y)\overline{j} + (x-3z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $3x+2y+z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)=4x\overline{i}+(y-z)\overline{j}+(3y+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $2x+y+z=4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M)=x^2\overline{i}+3xy^3\overline{j}+(xy^3z+2xz^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M)=(3x-5yz)\overline{i}+(3y-5xz)\overline{j}+(3z-5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 5

1. Найти производную скалярного поля $u=4x^3y+5xz^3-x+xz^2$ в точке $M_0(3;0;2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(4;1;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u=x^2yz+x\ln(x+y)+6y^2z$ в точке $M_0(-1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M)=(2x+y+z)\overline{i}+(x-2y)\overline{j}+(x+y-3z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $5x+y+z=5$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)=2x\overline{i}+2z\overline{j}+(x-y+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $2x+2y+z=2$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M)=(x^2+6y)\overline{i}+(2xy^3-z^2)\overline{j}+(2x^4y^3+z^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M)=(6x+2yz)\overline{i}+(6y+2xz)\overline{j}+(6z+2xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 6

1. Найти производную скалярного поля $u=xe^y+2xe^z-yz^2$ в точке $M_0(1;-2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u=xy/z$ в точке $M_0(3;1;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M)=(4x-y-z)\overline{i}+(z+3y)\overline{j}+(2x+5z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $3x+y+3z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)=(x+2y)\overline{i}-z\overline{j}+(x+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $3x+y+z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (3x + 4y^2 z)\overline{i} + (x - yz^3)\overline{j} + (xy^3 - xz^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (7x - yz)\overline{i} + (7y - xz)\overline{j} + (7z - xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 7

1. Найти производную скалярного поля $u = \ln(3 + xy) + 5xz^3$ в точке $M_0(1;2;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(4;5;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = \sqrt{xyz - 6y^2}$ в точке $M_0(2;1;4)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (5x + y + z)\overline{i} + (z - 2y)\overline{j} + (y + 3z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $x + 2y + 2z = 4$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = (x - z)\overline{i} + y\overline{j} + (x - z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $x + 3y + z = 3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля $\overline{a}(M) = (x^2 + y)\overline{i} + 2xy^3\,\overline{j} + (x + y^3 + xz^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (2x + 5yz)\overline{i} + (2y + 5xz)\overline{j} + (2z + 5xy)\overline{k}$ потенциальным

или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 8

1. Найти производную скалярного поля $u = y^2 \sin\left(xz\right)$ в точке $M_0(1;-2;-3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = (x+z)\cos y$ в точке $M_0(2;1;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (4x+z)\overline{i} + (x+2y)\overline{j} + (2x+4z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $4x+2y+z=4$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (x-z)\overline{j} + y\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $x+y+z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = x^2y^2\overline{i} + (3z - xy^3)\overline{j} + (2x + y^3z^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (9x-5yz)\overline{i} + (9y-5xz)\overline{j} + (9z-5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 9

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3 \ln y + 5xz^3 - x$ в точке $M_0(-1;2;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz + z\ln x + 6y^2$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (6x + y + z)\overline{i} + (x + y)\overline{j} + (x + 3z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $x + y + 2z = 6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = y\overline{i} + (x - 2z)\overline{j} + (y + z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x + 3y + 3z = 3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = (xz^2 - 3y)\overline{i} + (xz^3 - xz)\overline{j} + (y^3 - z^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (5x - 9yz)\overline{i} + (5y - 9xz)\overline{j} + (5z - 9xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 10

1. Найти производную скалярного поля $u = y^2 e^{xy} + xz^3$ в точке $M_0(0;-2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;0;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = z\ln(x + zy^2)$ в точке $M_0(2;1;3)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (4x + z)\overline{i} + (z + 5y)\overline{j} + (2x + 7z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $3x + y + z = 6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = z\overline{i} + (x + z)\overline{j} + (x - y)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $4x + 4y + z = 4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = z^2\overline{i} + 3yz^3\overline{j} + (y^3z - 2xz^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (3x - 2yz)\overline{i} + (3y - 2xz)\overline{j} + (3z - 2xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 11

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3z\arccos y$ в точке $M_0(-1;0;2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;4;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = e^{xyz} + z\ln x + 6y^2$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (y + z)\overline{i} + (x + 5y)\overline{j} + (y + x - 3z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $3x+3y+z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)=zx\overline{i}+(y-x)\overline{j}+(2z-y)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x+4y+z=4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M)=(x^2-y^2)\overline{i}+(y^3+xz)\overline{j}+(y^3+x^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M)=(4x-8yz)\overline{i}+(4y-8xz)\overline{j}+(4z-8xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 12

1. Найти производную скалярного поля $u=z\,arctgx+yz^2$ в точке $M_0(0;2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u=ze^{x^2+xy}$ в точке $M_0(2;1;-7)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M)=(3x+y)\overline{i}+(x+z)\overline{j}+(2x-3z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $x+2y+3z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + z\overline{j} + (3y - x)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $3x + y + 3z = 3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = 2x^2 z\overline{i} + (y^3 - 3xy)\overline{j} + (x^3 z - xz^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (7x - 5yz)\overline{i} + (7y - 5xz)\overline{j} + (7z - 5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 13

1. Найти производную скалярного поля $u = \dfrac{4x^3 \cos y}{z^2}$ в точке $M_0(-1;0;1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = \cos(xy + z^2) + z\ln x$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (y + z)\overline{i} + x\overline{j} + (x + 3z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $x + 2y + 2z = 2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = (x + y + z)\overline{i} + 2z\overline{j} + (y - z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $3x + 2y + z = 6$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = (z^2 - y)\overline{i} + xy^3\,\overline{j} + xyz^2\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (2x - 7yz)\overline{i} + (2y - 7xz)\overline{j} + (2z - 7xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 14

1. Найти производную скалярного поля $u = y\ln(2xz^3 + yz^2)$ в точке $M_0(1;-2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = y\cos xz + xy^2$ в точке $M_0(2;1;0)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (x + z)\overline{i} + z\overline{j} + (2x - y)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $3x + 2y + z = 6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = 4x\overline{i} + (x - y - z)\overline{j} + (3y + z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $2x + 4y + z = 4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = xy^2\overline{i} + (xz - y^3)\overline{j} + (y^3z + yz^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (-3x - yz)\overline{i} + (-3y - xz)\overline{j} + (-3z - xy)\overline{k}$ потенциальным

или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 15

1. Найти производную скалярного поля $u = 4x^3 \ln y + 5xz^3 - x + z^2$ в точке $M_0(-1;2;0)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz + z\ln x + 6z^2$ в точке $M_0(1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = z\overline{i} + (x+y)\overline{j} + y\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $2x + y + 2z = 2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (y-2z)\overline{j} + (2x-y+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $x + 2y + 4z = 4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = (6z^2 - 4y)\overline{i} + (2xy^3 - xz)\overline{j} + x^3yz^2\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (4x + 5yz)\overline{i} + (4y + 5xz)\overline{j} + (4z + 5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 16

1. Найти производную скалярного поля $u = z^2 + 4x^3y + 5yz - e^{y^2}$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = x^2yz + 5y\sin z + 2y^2$ в точке $M_0(-1;0;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = 2z\overline{i} + (x + y - 2z)\overline{j} + (x - y + 2z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $x + 2y + z = 2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = 3x\overline{i} + (y - 2x)\overline{j} + (-y + 2z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x + y + z = 1$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = (x^2yz - x)\overline{i} - xyz^2\,\overline{j} + (y^3 + z^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (5x - 4yz)\overline{i} + (5y - 4xz)\overline{j} + (5z - 4xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 17

1. Найти производную скалярного поля $u = x^3 + z + 5y^2z - e^{x+y+z^2}$ в точке $M_0(-1;2;1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;-2;0)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xy^2 z + x \ln y + 6z^2$ в точке $M_0(1;3;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (x+y)\overline{i} - 2z\overline{j} + (y-x+z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $2x + 2y + z = 2$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = x\overline{i} + (x+y+z)\overline{j} + (2x+z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $x + y + 3z = 3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = y^2 z\overline{i} + xy^3 z\,\overline{j} + (2xy^3 + 2z)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (2x - 3yz)\overline{i} + (2y - 3xz)\overline{j} + (2z - 3xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 18

1. Найти производную скалярного поля $u = 3x^2 \ln y + 2yz^3 - x + z^2$ в точке $M_0(-1;2;2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = y^3 z + x^2 \ln x + 6y^2 z$ в точке $M_0(3;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (x+z)\overline{i} + (x+2y)\overline{j} + z\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $2x+2y+z=4$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)=(2x+y)\overline{i}+y\overline{j}+(x-z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $x+2y+z=2$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M)=(x^2y+z^3)\overline{i}+(y^3-z)\overline{j}+xz^2\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M)=(9x-5yz)\overline{i}+(9y-5xz)\overline{j}+(9z-5xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 19

1. Найти производную скалярного поля $u=4z^2\sin x+xy^3-5yz^2$ в точке $M_0(0;2;3)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(-1;-2;-3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u=z^2\cos(x+y)$ в точке $M_0(2;1;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M)=(y+z)\overline{i}+(x+2y)\overline{j}+(x-3z)\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $2x+3y+z=6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского;

б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = 2x\overline{i} + (y - x)\overline{j} + (2y + z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $2x + y + 4z = 4$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = xy^2\overline{i} + z^3\overline{j} + (y^3 + 2xz^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (10x - 2yz)\overline{i} + (10y - 2xz)\overline{j} + (10z - 2xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Вариант № 20

1. Найти производную скалярного поля $u = 3x^2yz + 9xz^2 - y + xy^3$ в точке $M_0(5;1;-2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(4;1;3)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xy^3z + x\ln(y + z) + 5x^2z$ в точке $M_0(-1;4;-2)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = (2x - z)\overline{i} + (y - z)\overline{j} + 3z\overline{k}$:

а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью P: $3x + y + 2z = 6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского; б) через наклонную грань пирамиды.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = (2x + y)\overline{i} + z\overline{j} + (x - z)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $2x + y + z = 2$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = (x^2 y + 6z)\overline{i} + (2xz^3 - z^2)\overline{j} + (x^4 y^3 - 2z^2)\overline{k}$.

6. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (6x + 12yz)\overline{i} + (6y + 12xz)\overline{j} + (6z + 12xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Приложение 2

Образцы контрольных работ

1 семестр

Контрольная работа № 1

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+9}{5n^3-7n+5}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-5}{3n+5}\right)^{-n^2}$

3. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x+1}{5x-2}\right)^{3x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2-12x+4}{3x^2+x-14}$

5. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{6-\sqrt{x^2+20}}{3x+12}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2(8x)}{x\cdot\sin^2(5x)}$

7. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{arctg(15-5x)}{2x^2+3x-27}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+15x)}{e^{-3x}-1}$

Контрольная работа № 2

1. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{8^{x+6}-8^3}{e^{2x+6}-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

1. $y=\dfrac{8}{x^3}-4\sqrt{x^3}+2x^7$

2. $y=\dfrac{3\arcsin x-e^x}{5\log_3 x+6x^2}$

3. $y=\ln\cos(2x+5)$

4. $y=\left(x^3+1\right)^{tgx}$

5. $y=\left(6\ln x-5^x\right)\left(15+7\sin x\right)$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции:

$$\begin{cases} x = arcctg 6t, \\ y = 2t^3 - 9t^2. \end{cases}$$

4. Найти интервалы монотонности, экстремум функции:
$y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

Контрольная работа № 3

1. $\int x\sqrt{5-x^2}\,dx$.
2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$
3. $\int \frac{3x^2 + x^5 5^x - 4}{x^5}dx$
4. $\int (3x-2)\cos 2x\,dx$
5. $\int \frac{x^3 - 8x - 14}{(x+2)(x-4)}dx$
6. $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$

2 семестр

Контрольная работа № 1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией: $r = 4\cos\varphi$.

4. Вычислить длину дуги кривой: $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, $3 \le x \le 4$.

5. Вычислить длину дуги кривой:

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi / 2.$$

6. Вычислить длину дуги кривой: $\rho = 2\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi / 6.$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной графиками функций: $y = x^2, \quad y = x.$

Контрольная работа № 2

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = \dfrac{x^2}{y-2}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных: $z = -\dfrac{1}{2}x^2 + 8xy - y^3 - 13x - 12y$.

3. Найти частные производные $z'_x,\ z'_y$ от функции, заданной неявно: $x\sin y + y\cos z + ztgx = 5$.

4. Найти производную $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ от функции $z = 3x^2 + x^3y^2 + 5x - 4y + \ln 5$.

Контрольная работа № 3

1. Поменять порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy$.

2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x, y) = xy$.

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y = x^2$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 3$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, где L: $r = 2\cos\varphi$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

5. Вычислить непосредственно криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении: $\oint\limits_L \left(2xy + y^2\right)dx + \left(3x^2 + 2y + 1\right)dy$. Контур L: $x = 0$, $y = 4$, $y = x^2$.

3 семестр

Контрольная работа № 1

1. Исследовать на сходимость ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n^2+1}$.

2. Исследовать на сходимость ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$.

3. Исследовать на сходимость ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$.

4. Исследовать на сходимость ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}$.

5. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n!}$.

6. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$.

7. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$.

8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi\le x<0,\\ 2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

9. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам:

$f(x)=\frac{\pi}{2}-x,\quad 0\le x\le\pi$.

Контрольная работа № 2

1. Найти производную скалярного поля $u=2x^2+4x^3yz+5xz-z^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;2;1)$.

2. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P с координатными плоскостями при положительном направлении обхода:

$\overline{a}(M)=x\overline{i}+(y-2z)\overline{j}+(2x-y+2z)\overline{k}$; P: $x+2y+z=2$.

4. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M)=(x-z)\overline{i}-y\,\overline{j}+(y+z)\overline{k}$.

5. Проверить является ли векторное поле $\overline{a}(M)=(2x-4yz)\overline{i}+(2y-4xz)\overline{j}+(2z-4xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{a}\left(M\right)$ найти его потенциал.

Приложение 3

Образцы билетов

1 семестр

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс _1_ Семестр _1_ Дисциплина Математический анализ

Билет № 1

1. Функция: определение, способы задания, область определения, четность, нечетность.
2. Интегрирование по частям.
3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-4\right)}{x^2-5x+6}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{4x}-1}$.

4. Найти производные функций:

а) $y=\sin\left(x^3+2\ln x\right)+\sqrt{2}$, б) $y=\left(\cos x\right)^{5e^x}$.

5. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\dfrac{x7^x-8+4x\cos x}{x}dx$, б) $\int x^2\cdot\sqrt[3]{2+3x^3}\,dx$.

2 семестр

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс 1 Семестр 2 Дисциплина Математический анализ

Билет № 1

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определение определенного интеграла, его геометрический и физический смыслы.

2. Частные производные функции двух переменных.

3. Вычислить: $\int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4}\,dx$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 4$, $y = 5$.

5. Вычислить интеграл $\iint_D y\,dx\,dy$, где область D ограничена линиями: $x - y = 4$, $x = 0$, $y = 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги $\int_L \sin x \cos^3 x\,dl$, где L: $y = \ln\cos x$ $(0 \le x \le \pi/3)$.

7. Найти производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = \dfrac{x+y}{\ln x}$.

8. Исследовать на экстремум функцию:
$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 40$.

3 семестр

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс 2 Семестр 3 Дисциплина Математический анализ

Билет № 1

1. Признак Даламбера.
2. Производная по направлению.
3. Исследовать сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}$.
4. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{2^{n+1}}$.
5. Разложить в ряд Фурье функцию $y=2x$ в интервале $(-\pi,\pi)$.
6. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)=x\overline{i}+(y-2z)\overline{j}+(x-y)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости Р: $x+2y+z=2$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.
7. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M)=(x-z)\overline{i}-y\overline{j}+(y+z)\overline{k}$.

Приложение 4

Технологические карты дисциплины «Математический анализ»

Семестр 1

<table>
<tr><th>Название модулей дисциплины согласно РПД</th><th>Контроль</th><th>Форма контроля</th><th>зачетный минимум</th><th>зачетный максимум</th><th>график контроля</th></tr>
<tr><td colspan="6">Модуль 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Пределы функций одной переменной</td><td>Текущий контроль</td><td>Защита типового расчета № 1 (9), ДЗ (3), посещаемость (1), активность (1)</td><td>7</td><td>14</td><td rowspan="2">7</td></tr>
<tr><td>Рубежный контроль</td><td>КОПТ или контрольная работа</td><td>7</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="6">Модуль 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Дифференцирование функций одной переменной</td><td>Текущий контроль</td><td>Защита типового расчета № 2 (9), ДЗ (3), посещаемость (1), активность (1)</td><td>7</td><td>14</td><td rowspan="2">12</td></tr>
<tr><td>Рубежный контроль</td><td>КОПТ или контрольная работа</td><td>7</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="6">Модуль 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Неопределенный интеграл</td><td>Текущий контроль</td><td>Защита типового расчета № 3 (7), ДЗ (3), посещаемость (1), активность (1)</td><td>6</td><td>12</td><td rowspan="2">17</td></tr>
<tr><td>Рубежный контроль</td><td>КОПТ или контрольная работа</td><td>6</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="3">ВСЕГО за семестр</td><td>40</td><td>70</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Промежуточный контроль (зачет)</td><td></td><td>20</td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Семестровый рейтинг по дисциплине</td><td>60</td><td>100</td><td></td></tr>
</table>

Семестр 2

Название модулей дисциплины согласно РПД	Контроль	Форма контроля	зачетный минимум	зачетный максимум	график контроля
Модуль 1					
Определенные интегралы и их применения	Текущий контроль	Защита типового расчета № 1 (8), ДЗ (3), посещаемость (1), активность (1)	6	13	30
	Рубежный контроль	КОПТ или контрольная работа	6	10	
Модуль 2					
Функции двух и нескольких переменных	Текущий контроль	Защита типового расчета № 2 (7), ДЗ (1), посещаемость (1), активность (1)	6	10	35
	Рубежный контроль	КОПТ или контрольная работа	4	7	
Модуль 3					
Кратные и криволинейные интегралы	Текущий контроль	Защита типового расчета № 3 (15), ДЗ (3), посещаемость (1), активность (1)	12	20	40
	Рубежный контроль	КОПТ или контрольная работа	6	10	
ВСЕГО за семестр			40	70	
Промежуточный контроль (экзамен)			20	30	
Семестровый рейтинг по дисциплине			60	100	

Семестр 3

Название модулей дисциплины согласно РПД	Контроль	Форма контроля	зачетный минимум	зачетный максимум	график контроля
Модуль 1					
Ряды	Текущий контроль	Защита типового расчета № 1 (18 б), активность (3 б), посещаемость (3 б), ДЗ (3 б)	16	27	10
	Рубежный контроль	Контрольная работа № 1	8	15	
Модуль 2					
Теория поля	Текущий контроль	Защита типового расчета № 2 (10 б), активность (2 б), посещаемость (2 б), ДЗ (2 б)	9	16	15
	Рубежный контроль	Контрольная работа № 2	7	12	
ВСЕГО за семестр			40	70	
Промежуточный контроль (зачет с оценкой)			20	30	
Семестровый рейтинг по дисциплине			60	100	

Приложение 5

Образцы выполнения типовых расчетов

1 СЕМЕСТР

Образец выполнения типового расчета № 1

Вариант № 1

I. Вычислить пределы, не применяя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}$

3. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{\ln(x+3)}$

4. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^3(2x)}{arctg^3(3x)}$

7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{4x^2}-1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}$

II. Исследовать функцию $y=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$ на непрерывность.

Решение

I. Вычислить пределы, не применяя правила Лопиталя:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)=\left[\infty-\infty\right]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}\right)\left(\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}\right)}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(9n+2)-(4n-1)}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{\sqrt{9n+2}+\sqrt{4n-1}}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{\sqrt{9n+2}}{n}+\frac{\sqrt{4n-1}}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{9n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{4n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{9}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}}=$$

$$=\frac{5+\frac{3}{\infty}}{\sqrt{\frac{9}{\infty}+\frac{2}{\infty}}+\sqrt{\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}}}=\frac{5}{0}=\infty.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\left[1^\infty\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}-1\right)^{3n^2+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{(2n^2+n+4)\cdot\frac{\left(3n^2+1\right)}{2n^2+n+4}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+n+4}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

3) $$\lim_{x\to-2}\frac{2x+5}{\ln(x+3)}=\frac{2\cdot(-2)+5}{\ln(-2+3)}=\frac{1}{\ln 1}=\frac{1}{0}=\infty\,.$$

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-6x-27}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$=\left|\textit{Разделим числитель и знаменатель на } (x+3)\right|$

$$\begin{array}{r|l} -\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{\underline{x^3+3x^2}} & \dfrac{x+3}{x^2+2x-3} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\dfrac{x^2-6x-27}{\underline{x^2+3x}} & \dfrac{x+3}{x-9} \end{array}$$

$$-\dfrac{2x^2+3x}{\underline{2x^2+6x}} \qquad\qquad -\dfrac{-9x-27}{\underline{-9x-27}}$$

$$0$$

$$-\dfrac{-3x-9}{\underline{-3x-9}}$$

$$0$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2+2x-3)}{(x+3)(x-9)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x-9}=\frac{0}{-12}=0\,.$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16})^2-4^2}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+16-16}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+2)(\sqrt{x+16}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+16}+4)}=\frac{1}{(0+2)(\sqrt{0+16}+4)}=\frac{1}{2\cdot(4+4)}=\frac{1}{16}.$$

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{tg^3\left(2x\right)}{arctg^3\left(3x\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{tg\left(2x\right)}{2x}\right)^3\cdot\left(2x\right)^3}{\left(\dfrac{arctg\left(3x\right)}{3x}\right)^3\cdot\left(3x\right)^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot\left(2x\right)^3}{1\cdot\left(3x\right)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^3}{27x^3}=\frac{8}{27}.$$

7) $$\lim_{x\to -2}\frac{5^{x^2-4}-1}{2x^2+3x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{\dfrac{5^{x^2-4}-1}{x^2-4}\cdot\left(x^2-4\right)}{2x^2+3x-2}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{5^{x^2-4}-1}{x^2-4}\cdot\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=$$

$$=\ln 5\cdot\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{2x^2+3x-2}=\ln 5\cdot\lim_{x\to -2}\frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)\left(2x-1\right)}=$$

$$=\ln 5\cdot\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{2x-1}=\ln 5\cdot\frac{-2-2}{2\cdot(-2)-1}=\frac{4}{5}\ln 5.$$

8) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{4x^2}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\cdot x^2}{\dfrac{e^{4x^2}-1}{4x^2}\cdot 4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot x^2}{1\cdot 4x^2}=\frac{1}{4}.$$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-2n^2+6n+12}{9n^2+5n^3-8n+4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3}{n^3}-\frac{2n^2}{n^3}+\frac{6n}{n^3}+\frac{12}{n^3}}{\frac{9n^2}{n^3}+\frac{5n^3}{n^3}-\frac{8n}{n^3}+\frac{4}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{12}{n^3}}{\frac{9}{n}+5-\frac{8}{n^2}+\frac{4}{n^3}}=$$

$$=\frac{2-\frac{2}{\infty}+\frac{6}{\infty}+\frac{12}{\infty}}{\frac{9}{\infty}+5-\frac{8}{\infty}+\frac{4}{\infty}}=\frac{2-0+0+0}{0+5-0+0}=\frac{2}{5}.$$

II. Исследовать функцию $y=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$ на непрерывность.

Решение. Так как знаменатель дроби $\dfrac{1}{x-2}$ равен нулю при $x=2$, то функция терпит разрыв при $x=2$. Установим тип этой точки разрыва, для этого найдем предел слева и справа в этой точке:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{2}{3+5^{\frac{1}{-0}}}=\frac{2}{3+5^{-\infty}}=\frac{2}{3+\frac{1}{5^{\infty}}}=\frac{2}{3+\frac{1}{\infty}}=\frac{2}{3+0}=\frac{2}{3},$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\frac{2}{3+5^{\frac{1}{+0}}}=\frac{2}{3+5^{+\infty}}=\frac{2}{\infty}=0.$$

Таким образом, у функции существуют и левосторонний предел $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=\dfrac{2}{3}$ и правосторонний предел $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}=0$, но между собой они не равны. Значит, точка $x = 2$ является точкой разрыва 1 рода. Скачок функции равен $\left|\frac{2}{3} - 0\right| = \frac{2}{3}$.

Образец выполнения типового расчета № 2

Вариант № 1

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}$. б) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)tg\frac{\pi x}{6}$.

2. Найти производные следующих функций:

а) $y = 5x^3 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x}$ б) $y = \frac{\cos x}{x^3 + 9}$

в) $y = \sin\sqrt{1 - x^2}$ г) $y = \left(2arctgx + 3^x\right)\left(5\arcsin - \sqrt{3}\right)$

д) $y = x^{e^x}$

3. Найти производную y'_x от параметрически заданной функции:

$$\begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right), \\ y = arc\cos t. \end{cases}$$

4. Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2}{1+x}$ и построить ее график.

5. Найти производную неявной функции: $x^3 + 3y^3 - xy = 0$.

Решение

Задание 1

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 6x)'}{x'}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x}{1}=9.$$

б) $$\lim_{x\to 3}(2x-6)tg\frac{\pi x}{6}=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{ctg\frac{\pi x}{6}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(2x-6)'}{\left(ctg\frac{\pi x}{6}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2}{\frac{-1}{\sin^2\frac{\pi x}{6}}\cdot\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{\frac{-1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\pi}{6}}=-\frac{12}{\pi}.$$

Задание 2

а) $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}$

$$y'=\left(5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}\right)'=\left(5x^3-8x^{-2}+4x^{1/2}\right)'=$$

$$=5\cdot 3x^2-8\cdot(-2)x^{-3}+4\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}=$$

$$=15x^2+\frac{16}{x^3}+\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

б) $y=\dfrac{\cos x}{x^3+9}$.

$$y' = \left(\frac{\cos x}{x^3+9}\right)' = \frac{(\cos x)'(x^3+9) - \cos x(x^3+9)'}{(x^3+9)^2} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot (x^3+9) - 3x^2 \cos x}{(x^3+9)^2}.$$

в) $y = \sin\sqrt{1-x^2}$.

$$y' = \left(\sin\sqrt{1-x^2}\right)' = \cos\sqrt{1-x^2} \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)' =$$

$$= \cos\sqrt{1-x^2} \cdot \left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\right)' =$$

$$= \cos\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1-x^2\right)^{-1/2} \cdot \left(1-x^2\right)' =$$

$$= -2x \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1-x^2\right)^{-1/2} \cdot \cos\sqrt{1-x^2} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cos\sqrt{1-x^2}.$$

г) $y = \left(2arctgx + 3^x\right)\left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right)$

$$y' = \left(2arctgx + 3^x\right)' \cdot \left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right) +$$

$$+ \left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right)' \cdot \left(2arctgx + 3^x\right) =$$

$$=\left(2\cdot\frac{1}{1+x^2}+3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+$$

$$+\left(5\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-0\right)\cdot\left(2arctgx+3^x\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{1+x^2}+3^x\ln 3\right)\cdot\left(5\arcsin x-\sqrt{3}\right)+\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(2arctgx+3^x\right).$$

д) $y=x^{e^x}$

Пролагорифмируем обе части равенства: $\ln y=\ln(x^{e^x});\qquad \ln y=e^x\ln x.$

Продифференцируем обе части равенства: $\dfrac{y'}{y}=e^x\ln x+e^x\dfrac{1}{x};\qquad y'=y\left(e^x\ln x+\dfrac{e^x}{x}\right);$

$$y'=x^{e^x}\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right).$$

Задание 3

Найти производую y'_x функции $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=\arccos t \end{cases}$

Вычислим: x'_t и y'_t :

$$x'_t=\frac{1}{1+t^2}2t=\frac{2t}{1+t^2},\qquad y'_t=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x_t} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{2t\sqrt{1-t^2}}.$$

Задание 4

Провести полное исследование функции $y = \frac{x^2}{1+x}$ и построить ее график.

Решение.

1. Область определения функции - вся числовая ось, за исключением точки $x=-1$, т. е. $x \in (-\infty, -1) \bigcup (-1, +\infty)$.

2. Функция непериодическая.

3. Исследуем функцию на четность и нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x},$$

следовательно, данная функция ни четная и ни нечетная, т. е. функция общего вида.

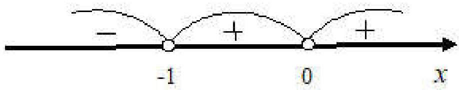
4. Найдем точки пересечения графика с осями координат:

- с осью Oy график пересекается при $x=0$, откуда $y(0)=0$, т. е. точка $(0, 0)$ – точка пересечения с осью Oy;

- с осью Ox график пересекается, если $y(x)=0$, т. е. $\frac{x^2}{1+x}=0$, откуда $x=0$. Таким образом, точка $(0, 0)$ – единственная точка пересечения графика с осями координат.

5. Находим интервалы знакопостоянства функции:

$$y(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{1+x} > 0$$



Итак, $y(x) > 0,$ если $x \in (-1, 0) \bigcup (0, +\infty)$,

$y(x) < 0,$ если $x \in (-\infty, -1)$.

6. Найдем вертикальные асимптоты графика функции:
$x = -1$ – точка разрыва функции, так как

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{-0} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1+0} \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{+0} = +\infty,$$

то прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота.

Наклонную асимптоту ищем в виде $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{(1+x)x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 + 1/x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x}{1+x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-1}{1/x + 1} = -1,$$

следовательно, прямая $y = x - 1$ – наклонная асимптота.

7. Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции, исследуя первую производную:

$$y'(x)=\left(\frac{x^2}{1+x}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'(1+x)-x^2(1+x)'}{(1+x)^2}=$$

$$=\frac{2x\cdot(1+x)-x^2\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{2x+x^2}{(1+x)^2},$$

$$y'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2x+x^2}{(1+x)^2}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x(2+x)}{(1+x)^2}=0,$$

$x=-2$, $x=0$ – критические точки первого рода, в точке $x=-1$ производная $y'(x)$ не существует, но в этой точке и сама функция не существует, поэтому эта точка не является критической.

Таким образом, функция возрастает при $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ и убывает при $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)$.

$x=-2$ – точка максимума, $x=0$ – точка минимума.

$$y_{\max}(-2)=\frac{(-2)^2}{1+(-2)}=\frac{4}{-1}=-4, \qquad y_{\min}(0)=\frac{0^2}{1+0}=0.$$

8. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции, исследуя вторую производную:

$$y''(x) = \left(\frac{2x + x^2}{(1+x)^2} \right)' = \frac{\left(2x + x^2\right)'(1+x)^2 - \left(2x + x^2\right)\left((1+x)^2\right)'}{(1+x)^4} =$$

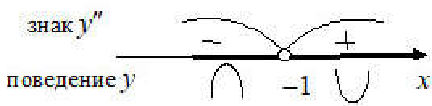
$$= \frac{(2+2x)(1+x)^2 - \left(2x + x^2\right)2(1+x)}{(1+x)^4} =$$

$$= \frac{2(1+x)\left((1+x)^2 - \left(2x + x^2\right)\right)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Приравнивая к нулю $y''(x) = 0$, получим уравнение:

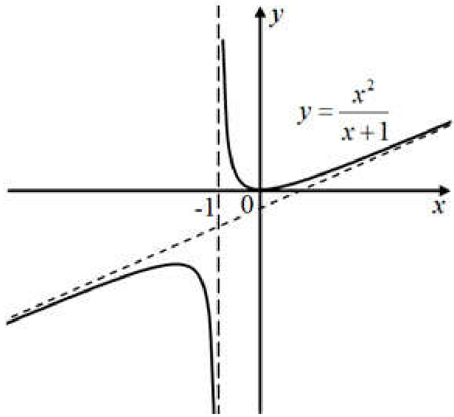
$$\frac{2}{(1+x)^3} = 0 .$$

В точке $x = -1$ производная $y''(x)$ не существует, но в этой точке и сама функция не существует, поэтому эта точка не является точкой подозрительной на перегиб.



Таким образом, функция выпуклая при $x \in (-\infty, -1)$ и вогнутая при $x \in (-1, +\infty)$.

9. Учитывая проведенное исследование, строим график



Задание 5

Найти производную функции: $x^3 + 3y^3 - xy = 0$

Продифференцируем по x равенство $x^3 + 3y^3 - xy = 0$:

$3x^2 + 3 \cdot 3y^2 \cdot y' - xy' - y = 0$.

Из полученного соотношения найдем y' :

$3x^2 - y = (-9y^2 + x)y'$,

$$y' = \frac{3x^2 - y}{x - 9y^2}.$$

Образец выполнения типового расчета № 3

Вариант №1

1. $\int \frac{3\sqrt[3]{x^2}-x^5 5^x-14}{x^5}dx$ 2. $\int \frac{dx}{2x-5}$ 3. $\int \frac{2x-1}{x^2+4}dx$

4. $\int \sin^3 x \cos x dx$ 5. $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$ 6. $\int x\sqrt{x+4}dx$

7. $\int (3x+2)\sin 2x\, dx$ 8. $\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$

9. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$

Решение

1. $$\int \frac{3\sqrt[3]{x^2}-x^5 5^x-14}{x^5}dx = \int\left(\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{x^5}-\frac{x^5 5^x}{x^5}-\frac{14}{x^5}\right)dx =$$

$$=\int\left(3x^{\frac{2}{3}-5}-5^x-14x^{-5}\right)dx =$$

$$=3\int x^{-\frac{13}{3}}dx-\int 5^x\,dx-14\int x^{-5}dx =$$

$$=3\frac{x^{-\frac{10}{3}}}{-\frac{10}{3}}-\frac{5^x}{\ln 5}-14\frac{x^{-4}}{-4}+C=-\frac{9}{10\sqrt[3]{x^{10}}}-\frac{5^x}{\ln 5}+\frac{7}{2x^4}+C.$$

2. $\int \frac{dx}{2x-5} = \left| \begin{array}{l} d(2x-5) = (2x-5)'\,dx = 2dx \Rightarrow \\ dx = \frac{1}{2}d(2x-5) \end{array} \right| =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-5)}{2x-5} = \left| \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \right| =$

$= \frac{1}{2}\ln|2x-5| + C$.

3. $\int \frac{2x-1}{x^2+4}dx = \int \left(\frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+4} \right)dx = \int \frac{2x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx$;

$\int \frac{2x}{x^2+4}dx = \left| d\left(x^2+4\right) = \left(x^2+4\right)'dx = 2xdx \right| =$

$= \int \frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4} = \left| \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \right| =$

$= \ln\left|x^2+4\right| + C$;

$\int \frac{1}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{x^2+2^2}dx = \left| \int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C \right| =$

$= \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + C.$

$\int \frac{2x-1}{x^2+4}dx = \ln\left|x^2+4\right| - \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2} + C$.

4. $\int \sin^3 x \cos x dx = \left| \cos x dx = d(\sin x) \right| =$

$= \int \sin^3 x\, d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

5. $\int \frac{dx}{x^2-6x+10} =$

$$\left| \begin{array}{l} \textit{выделим полный квадрат в знаменателе} \\ x^2-6x+10 = x^2-2\cdot 3x+3^2-3^2+10 = \left(x-3\right)^2+1 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dx}{\left(x-3\right)^2+1} = \int \frac{d\left(x-3\right)}{\left(x-3\right)^2+1} =$$

$$= \left| \int \frac{du}{u^2+1} = arctgu + C \right| = arctg\left(x-3\right)+C$$

6. $\int x\sqrt{x+4}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+4}=t, \quad x=t^2-4 \\ dx=(t^2-4)'dt=2tdt \end{array} \right| =$

$$= \int (t^2-4)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int (t^4-4t^2)dt =$$

$$= 2\frac{t^5}{5} - 8\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}\sqrt{\left(x+4\right)^5} - \frac{8}{3}\sqrt{\left(x+4\right)^3} + C.$$

7. $\int (3x+2)\sin 2xdx =$

$$= \left| \begin{array}{c} u=3x+2 \quad \Rightarrow \quad du=(3x+2)'dx=3dx \\ dv=\sin 2xdx \quad \Rightarrow \quad v=\int dv=\int \sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x\cdot 3dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2xdx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x+2)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C$$

8. $\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}=$

$$=\left| \begin{array}{c} tg\frac{x}{2}=t, \quad x=2arctgt \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right|$$

$$=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3+2\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{3+3t^2+4t+1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t^2+4t+4}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{t^2+2t+2}=$$

$$=\int \frac{dt}{(t+1)^2+1}=\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1}=arctg(t+1)+C=arctg(tg\frac{x}{2}+1)+C\ .$$

9. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$

Разложим знаменатель на множители:
$(x^2+2x-3)(x-4)=(x-1)(x+3)(x-4)$.

Дробь, стоящая под интегралом правильная. Разлагаем ее на простейшие:
$$\frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-4}\ .$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$2x^2 + 41x - 91 = A(x+3)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+3);$$

$$2x^2 + 41x - 91 = A(x^2 - x - 12) + B(x^2 - 5x + 4) + C(x^2 + 2x - 3);$$

$$2x^2 + 41x - 91 =$$

$$= (A + B + C)x^2 + (-A - 5B + 2C)x + (-12A + 4B - 3C).$$

Левая часть равенства должна быть тождественно равна правой. Это будет иметь место только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства будут равны между собой.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A + B + C = 2 \\ x & -A - 5B + 2C = 41 \\ x^0 & -12A + 4B - 3C = -91 \end{array}$$

Решив эту систему, получим: $A = 4$, $B = -7$, $C = 5$.

$$\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x^2 + 2x - 3)(x-4)}dx = \int \frac{4}{x-1}dx - \int \frac{7}{x+3}dx + \int \frac{5}{x-4}dx =$$

$$= 4\int \frac{d(x-1)}{x-1} - 7\int \frac{d(x+3)}{x+3} + 5\int \frac{d(x-4)}{x-4} =$$

$$= 4\ln|x-1| - 7\ln|x+3| + 5\ln|x-4| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{(x-1)^4 (x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C$$

2 семестр

Образец выполнения типового расчета №1

Вариант №1

1. Вычислить:

а) $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int_{1}^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$;

в) $\int_{1}^{2} x^2 \ln x dx$; г) $\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 5\sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $x = 5$ ($x \geq 5$).

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $r = 2\sin\varphi$, $r = 4\sin\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной системе координат: $y^2=(x+1)^3$, $-1\le x\le 4$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x=\dfrac{t^6}{6} \\ y=2-\dfrac{t^4}{4} \end{cases}$, $0\le t\le \sqrt[4]{8}$.

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r=2\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

8. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Решение

Задание 1

Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_e^{e^2}\dfrac{dx}{x\ln x}=\int\limits_e^{e^2}\dfrac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|\Big|_e^{e^2}=\ln\left|\ln e^2\right|-\ln\left|\ln e\right|=\ln 2-\ln 1=\ln 2$

(т. к. $\ln e^2=2$, $\ln 1=0$).

б) $$\int\limits_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}=\left|\begin{array}{c} \sqrt[6]{x}=t \quad\Rightarrow\quad x=t^6 \\ dx=6t^5dt \\ x=1 \quad\Rightarrow\quad t=\sqrt[6]{1}=1 \\ x=64 \quad\Rightarrow\quad t=\sqrt[6]{64}=2 \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_1^2\frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)}=6\int\limits_1^2\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int\limits_1^2\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=$$

$$=6\int_1^2 dt-6\int_1^2 \frac{1}{1+t^2}dt=6t\Big|_1^2-6arctg\,t\Big|_1^2=6(2-1)-6(arctg2-arctg1)=$$

$$=6-6\left(arctg2-\frac{\pi}{4}\right)=6+\frac{3\pi}{2}-6arctg2.$$

в) $\int_1^2 x^2\ln x dx$.

Разобьем подынтегральное выражение на части: $u=\ln x$, $dv=x^2dx$.

$$\int_1^2 x^2\ln x dx=\left|\begin{array}{c} u=\ln x \\ dv=x^2dx \\ du=(\ln x)'dx=\dfrac{dx}{x} \\ v=\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x^3}{3}\frac{dx}{x}=\frac{1}{3}\left(2^3\ln 2-\ln 1\right)-\frac{1}{3}\int_1^2 x^2dx=$$

$$=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{1}{9}\left(2^3-1^3\right)=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}=\frac{24\ln 2-7}{9}$$

г) $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \left| \begin{array}{ll} x = \sin t, & dx = \cos t dt, \\ t = \arcsin x & \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow & t_1 = \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4} \\ x = 1 \Rightarrow & t_2 = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| =$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt =$$

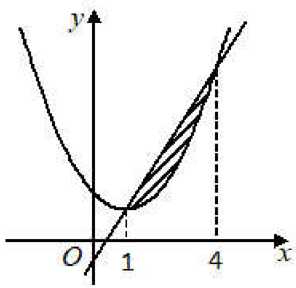
$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin^2 t} - \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dt = -ctgt\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} - t\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= -\left(ctg\frac{\pi}{2} - ctg\frac{\pi}{4} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = -(0-1) - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Задание 2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$.

Решение. Сделаем чертеж. Уравнению $y = x^2 - 2x + 3$ соответствует парабола с вершиной в точке $x = 1$, $y = 2$, т. к.



$$y = x^2 - 2x + 3 \quad \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2.$$

Уравнению $y = 3x - 1$ соответствует прямая.

Найдем точки пересечения заданных линий:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3, \\ y = 3x - 1. \end{cases}$$

$x^2 - 2x + 3 = 3x - 1$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Согласно формуле: $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$

$$\int\limits_1^4 (3x - 1 - (x^2 - 2x + 3))dx = \int\limits_1^4 (3x - 1 - x^2 + 2x - 3)dx =$$

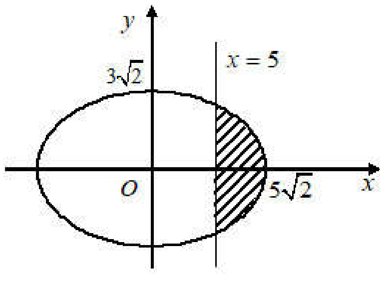
$$= \int\limits_1^4 (5x - 4 - x^2)dx = \frac{5x^2}{2}\Bigg|_1^4 - 4x\Big|_1^4 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^4 = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

Задание 3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 5\sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $x = 5$ $(x \geq 5)$.

Решение.

Сделаем чертеж. Уравнениям $\begin{cases} x = 5\sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ соответствует эллипс с полуосями $a = 5\sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$; уравнению $x = 5$ соответствует прямая, параллельная оси Oy (см. рисунок).



Найдем точки пересечения линий:

$$\begin{cases} x = 5\sqrt{2}\cos t \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad 5 = 5\sqrt{2}\cos t\,,$$

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ t = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

$$t_1 = -\frac{\pi}{4};\ t_2 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Вычислим:

$$\frac{S}{2} = \int\limits_{\pi/4}^{0} 3\sqrt{2}\sin t \cdot 5\sqrt{2}(-\sin t)dt = -30\int\limits_{\pi/4}^{0} \sin^2 t dt =$$

$$= -15\int\limits_{\pi/4}^{0}(1-\cos 2t)dt = -15\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{0} = \frac{15\pi}{4} - \frac{15}{2}.$$

Тогда площадь всей фигуры

$$S = 2\cdot\left(\frac{15\pi}{4} - \frac{15}{2}\right) = \frac{15\pi}{2} - 15 \text{ (кв. ед.).}$$

Задание 4

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2\sin\varphi,\ r = 4\sin\varphi$.

Решение. Уравнения линий заданы в полярной системе координат. Выясним, какая линия задается уравнением $r = 2\sin\varphi$.

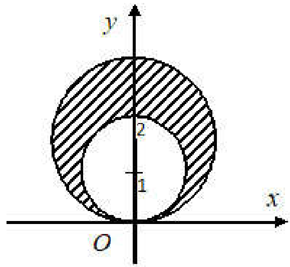
Зная, что $r^2 = x^2 + y^2$, а $r\sin\varphi = y$, и умножая обе части равенства $r = 2\sin\varphi$ на r, получим:

$$r^2 = 2r\sin\varphi,$$

$$x^2 + y^2 = 2y,$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0,$$

$x^2+(y-1)^2=1$ – это уравнение окружности с центром в точке (0; 1) и радиусом равным $R=1$. Аналогично, уравнению $r=4\sin\varphi$ соответствует окружность с центром в точке (0; 2) и радиусом равным 2. Угол φ меняется в пределах $0\le\varphi\le\pi$.



Площадь фигуры будет равна:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\left(4\sin\varphi\right)^2-\left(2\sin\varphi\right)^2\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}12\sin^2\varphi d\varphi=$$

$$=6\int_0^{\pi}\frac{1-\cos2\varphi}{2}d\varphi=3\int_0^{\pi}d\varphi-3\int_0^{\pi}\cos2\varphi d\varphi=3\varphi\Big|_0^{\pi}-\frac{3}{2}\sin2\varphi\Big|_0^{\pi}=$$

$$=3(\pi-0)-\frac{3}{2}\left(\sin2\pi-\sin0\right)=3\pi.$$

Задание 5

Вычислить длину дуги линии: $y^2=(x+1)^3$, $-1\le x\le4$, $y\ge0$.

Решение.

Уравнению $y^2=(x+1)^3$ или $y=\pm\sqrt{(x+1)^3}=\pm(x+1)^{\frac{3}{2}}$ соответствует полукубическая парабола.

$L=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+(y')^2}dx$. Возьмем: $y=(x+1)^{\frac{3}{2}}$, $y'=\frac{3}{2}\left(x+1\right)^{1/2}$.

Тогда,

$$L=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}(x+1)}dx=\int_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}x+\frac{9}{4}}dx=$$

$$=\int_{-1}^{4}\sqrt{\frac{9}{4}x+\frac{13}{4}}dx=\frac{1}{2\cdot 9}\int_{-1}^{4}(9x+13)^{\frac{1}{2}}d(9x+13)=\frac{2}{18}\frac{(9x+13)^{3/2}}{3}\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{1}{27}\left(\sqrt{49^3}-\sqrt{4^3}\right)=\frac{1}{27}(343-8)=\frac{1}{27}\cdot 335=\frac{335}{27}\text{ (лин. ед.).}$$

Задание 6

Вычислить длину дуги линии: $\begin{cases} x=\dfrac{t^6}{6} \\ y=2-\dfrac{t^4}{4} \end{cases}$, $0\le t\le\sqrt[4]{8}$.

Решение.

Длина дуги вычисляется по формуле: $L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t))^2}\,dt$.

Найдем: $x'_t=\left(\dfrac{t^6}{6}\right)'=t^5$, $y'_t=\left(2-\dfrac{t^4}{4}\right)'=-t^3$. Тогда,

$$L=\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{(t^5)^2+(-t^3))^2}dt=\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^{10}+t^6}dt=\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\sqrt[4]{8}}\left(t^4+1\right)^{\frac{1}{2}}d(t^4+1)=\frac{1\cdot 2}{4}\frac{(t^4+1)^{3/2}}{3}\Bigg|_{0}^{\sqrt[4]{8}}=\frac{1}{6}\sqrt{\left(t^4+1\right)^3}\Bigg|_{0}^{\sqrt[4]{8}}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(8+1)^3}-1\right)=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}\ \textbf{(}\text{лин. ед.)}$$

Задание 7

Вычислить длину дуги линии: $r=2\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

Решение.

Кривая задана в полярной системе координат.

$$L=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi .$$

Найдем: $r'=(2\sin\varphi)'=2\cos\varphi$. Следовательно,

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{4\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\pi}\sqrt{4(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}\,d\varphi=2\int_0^{\pi}d\varphi=2\varphi\Big|_0^{\pi}=$$

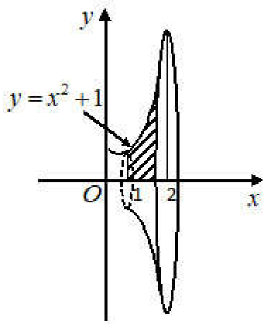
$$=2(\pi-0)=2\pi\ \text{(лин. ед.).}$$

Задание 8

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Решение.

Объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox, вычисляется по формуле $V_x=\pi\int_{x_1}^{x_2}y^2(x)dx.$



Сделаем чертеж.

$$V_x = \pi \int_1^2 (x^2+1)^2\,dx = \pi \int_1^2 x^4\,dx + 2\pi \int_1^2 x^2\,dx + \pi \int_1^2 dx =$$

$$= \pi \left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 + 2\pi \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 + \pi \left.x\right|_1^2 = \frac{178}{15}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Образец выполнения типового расчета № 2

Вариант № 1

1. Найти частные производные первого порядка функции двух переменных: $z = e^{x-2y}$.

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u = \ln(e^x + y^2 + z)$.

3. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

4. Найти производную сложной функции $z = x^2 + y^2 + xy$, если $x = a\sin t$, $y = a\cos t$.

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной неявно: $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 1$.

6. Вычислить $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в замкнутой области *D*, ограниченной линиями: $x + y + 5 = 0$ и осями координат.

Решение.

1. Найти частные производные первого порядка функции: $z = e^{x-2y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x-2y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2e^{x-2y}.$$

2. Найти частные производные первого порядка функции трех переменных: $u=\ln(e^x+y^2+z)$.

Решение. Функция $u=\ln(e^x+y^2+z)$ – функция трех независимых переменных: x, y и z. При определении частной производной по каждой из этих переменных две другие следует считать величинами постоянными. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\ln(e^x+y^2+z)\right)'_x=\frac{1}{e^x+y^2+z}\left(e^x+y^2+z\right)'_x=\frac{e^x}{e^x+y^2+z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\ln(e^x+y^2+z)\right)'_y=\frac{1}{e^x+y^2+z}\left(e^x+y^2+z\right)'_y=\frac{2y}{e^x+y^2+z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\ln(e^x+y^2+z)\right)'_z=\frac{1}{e^x+y^2+z}\left(e^x+y^2+z\right)'_z=\frac{1}{e^x+y^2+z}.$$

3. Исследовать на экстремум функцию: $z=x^3+y^3-3xy$.

Решение.

a) Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x.$$

Приравнивая их к нулю, получим, $3x^2-3y=0$, $3y^2-3x=0$.

b) Решаем систему:

$$\begin{cases}3x^2-3y=0,\\ 3y^2-3x=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y=0,\\ y^2-x=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x^2,\\ \left(x^2\right)^2-x=0,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x\left(x^3 - 1\right) = 0 \end{cases}$$

из последней системы, получим: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x^2, \\ x^3 - 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Следовательно, критические точки: $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$.

c) Находим частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x\,,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y\,,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3\,.$$

d) Вычисляем значения этих производных в каждой критической точке:

1) $M_1(0;0)$: $A_1 = 6 \cdot 0 = 0$; $B_1 = -3$; $C_1 = 6 \cdot 0 = 0$.

2) $M_2(1;1)$: $A_2 = 6 \cdot 1 = 6$; $B_2 = -3$; $C_2 = 6 \cdot 1 = 6$.

e) Проверяем в каждой точке выполнение достаточного условия:

1) $\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ – экстремума нет.

2) $\Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0$ – экстремум есть, причем $A_2 = 6 > 0$, следовательно, в точке M_2 минимум.

f) Находим экстремальное значение функции: $z_{\min} = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

Ответ: $z_{\min} = -1$.

4. Найти производную сложной функции $z = x^2 + y^2 + xy$, если $x = a\sin t$, $y = a\cos t$.

Решение. Применим формулу $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + x$, $\dfrac{dx}{dt} = a\cos t$, $\dfrac{dy}{dt} = -a\sin t$.

Составим соответствующую сумму произведений:

$$\frac{dz}{dt} = (2x + y)a\cos t + (2y + x)(-a\sin t).$$

Учитывая, что $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, получим:

$$\frac{dz}{dt} = (2a\sin t + a\cos t)a\cos t - (2a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) =$$

$$= 2a^2 \sin t\cos t + a^2 \cos^2 t - 2a^2 \cos t\sin t - a^2 \sin^2 t =$$

$$= a^2(\cos^2 t - \sin^2 t) = a^2 \cos 2t.$$

5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции, заданной неявно: $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 1$.

Решение. В данном случае $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 1$, поэтому

$$F_x' = 2x - 2z\,,\ F_y' = 2y\,,\ F_z' = 2z - 2x\,.$$

Следовательно, по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}:$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x-2z}{2z-2x} = 1,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z-2x} = \frac{y}{x-z}\,.$$

6. Вычислить $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, если $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$.

Решение. Последовательно находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3\,,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2ye^x + 6y^2\,.$$

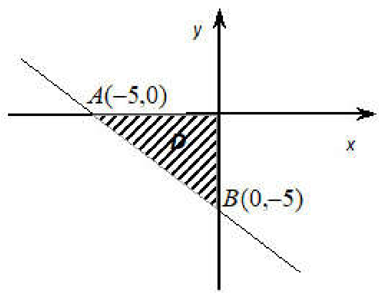
7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в замкнутой области *D*, ограниченной линиями: $x + y + 5 = 0$ и осями координат.

Решение.

1. Для определения критических точек внутри области находим частные производные функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y + 2\,.$$



Приравниваем их к нулю и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

Получим $x = -2$; $y = -1$. Итак, имеется одна внутренняя критическая точка $M_1(-2, -1)$, принадлежащая заданной области *D*.

2. Определяем значение функции в этой точке: $z(M_1) = (-2)^2 - (-2)(-1) + 2(-1)^2 + 3(-2) + 2(-1) + 1 = -3$.

3. Переходим к исследованию функции на границах области, которая состоит из отрезков ОА, ОВ и отрезка прямой АВ.

а) На отрезке ОА $y = 0$, а заданная функция принимает при $y = 0$ такой вид: $z = x^2 + 3x + 1$ $\left(-5 \le x \le 0\right)$.

Эта функция – функция одного переменного, должна быть рассмотрена на отрезке $\left[-5, 0\right]$ (см. рисунок). Так как на этом отрезке функция *z* непрерывна, то она достигает на нем как наибольшего, так и наименьшего своего значения. Это может произойти или в критических точках функции, лежащих внутри интервала, где $\dfrac{dz}{dx} = 0$, или на концах рассматриваемого отрезка.

Определим, прежде всего, критическую точку: $\dfrac{dz}{dx} = 2x + 3$; $2x + 3 = 0$; $x = -\dfrac{3}{2}$.

Определим значение функции при $x = -\dfrac{3}{2}$ и на концах отрезка $-5 \le x \le 0$:

$$z(-\frac{3}{2},0)=-\frac{5}{4}; \qquad z(-5,0)=11; \qquad z(0,0)=1.$$

Сравнение показывает, что $\left(z_{наиб}\right)_{OA}=11$; $\left(z_{наим}\right)_{OA}=-\frac{5}{4}$.

б) На отрезке ОВ $x=0$, а данная функция при $x=0$ принимает вид:

$$z=2y^2+2y+1\ \left(-5\le y\le 0\right).$$

Полученная функция одного переменного должна быть рассмотрена на отрезке $\left[-5,0\right]$ (см. рисунок) и в силу непрерывности на нем должны существовать наименьшее и наибольшее значения.

Определим, прежде всего, критическую точку:

$$\frac{dz}{dy}=4y+2;\ 4y+2=0;\ y=-\frac{1}{2}.$$

Определим значение функции при $y=-\frac{1}{2}$ и на концах рассматриваемого отрезка:

$$z(0,-\frac{1}{2})=\frac{1}{2};\ z(0,-5)=41;\ z(0,0)=1.$$

Сравнение показывает, что $\left(z_{наиб}\right)_{OB}=41$; $\left(z_{наим}\right)_{OB}=\frac{1}{2}$.

в) Исследуем функцию на отрезке АВ, принадлежащем границе области.

Уравнение АВ: $x+y+5=0$. Поэтому на ней $y=-x-5$.

Подставляя это значение y в заданную функцию, получаем:

$$z=4x^2+26x+41.$$

Наибольшее и наименьшее значения этой функции должны быть определены для значений $-5 \le x \le 0$:

$$\frac{dz}{dx} = 8x + 26\,;\ 8x + 26 = 0\,;\ x = -\frac{13}{4}\,.$$

Находим соответствующее значение y. Из $y = -x - 5$ следует, что

$$y = -\left(-\frac{13}{4}\right) - 5 = \frac{13}{4} - 5 = -\frac{7}{4}\,.$$

Итак, рассмотрению подлежит точка $\left(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right)$, так как она лежит в исследуемой области.

Определим значение функции в найденной точка и на концах рассматриваемого отрезка:

$$z(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}) = -\frac{5}{4}\,;\ z(0,-5) = 41\,;\ z(-5,0) = 11\,.$$

Сравним результаты и получим, что $\left(z_{наиб}\right)_{AB} = 41$; $\left(z_{наим}\right)_{AB} = -\frac{5}{4}$.

4. Сравним значения функции z во внутренней критической точке M_1 с наибольшими и наименьшими значениями на границе, составленной из отрезков ОА, ОВ, АВ, найденными в пунктах а, б и в.

Видим, что в заданной замкнутой области:

$$z_{наиб} = z(0,-5) = 41\,;$$

$$z_{наим} = z(-2,-1) = -3\,.$$

Таким образом, оказалось, что наименьшего своего значения функция достигла во внутренней критической точке $M_1(-2,-1)$, а наибольшего – на границе области, в точке $B(0,-5)$.

Ответ: $z_{наиб} = z(0,-5) = 41$, $z_{наим} = z(-2,-1) = -3$.

Образец выполнения типового расчета № 3 по разделу «Кратные и криволинейные интегралы»

Вариант № 1

1. Поменять порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)dx$.

2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x$, $x = 2 - y^2$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x,y) = 2y$.

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y = x^2$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 3$.

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{4y}{x} dl$, где L: парабола $y = \frac{1}{2}x^2$, от точки $A\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ до точки $B(2;\ 2)$.

5. Вычислить интеграл $\int\limits_L (2x - y)dx + (5y^2 - 4x)dy$, где L – парабола $y = x^2$, от точки $(0,0)$ до точки $(2,4)$.

Решение.

1. Поменять порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)dx$.

Решение. Построим область интегрирования:

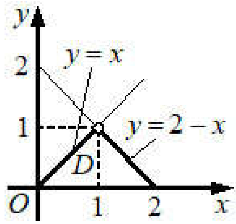


Рисунок 1

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)dx = \begin{vmatrix} 0 \le y \le 1 & 0 \le x \le 2 \\ x = y & y = x \\ x = 2-y & y = 2-x \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

2. Вычислить координаты центра тяжести неоднородной материальной пластины, ограниченной линиями $y = x$, $x = 2 - y^2$, $y = 0$, если поверхностная плотность равна $\rho(x, y) = 2y$.

Решение. Построим кривые, ограничивающие данную пластину:

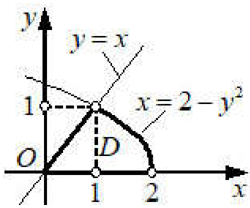


Рисунок 2

Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения параболы: $x=2-y^2$ и прямой $y=x$. Приравниваем:

$$y=2-y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2+y-2=0 \quad \Rightarrow \quad y_1=1,\ y_2=-2\left(\notin D\right).$$

Определим статические моменты пластины относительно осей *Ox* и *Oy* и массу пластины:

$$S_x=\iint\limits_D y\rho\left(x,y\right)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y^2} y\cdot 2ydx=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y^2} 2y^2dx=\int\limits_0^1 dy\cdot 2y^2\, x\Big|_y^{2-y^2}=\int\limits_0^1 dy\cdot 2y^2\left(2-y^2-y\right)=$$

$$=\int\limits_0^1\left(4y^2-2y^4-2y^3\right)dy=\left(4\frac{y^3}{3}-2\frac{y^5}{5}-2\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{40-12-15}{30}=\frac{13}{30}.$$

$$S_y=\iint\limits_D x\rho\left(x,y\right)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{2-y^2} x\cdot 2ydx=\int\limits_0^1 dy\cdot 2y\frac{x^2}{2}\Bigg|_y^{2-y^2}=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\cdot y\left(\left(2-y^2\right)^2-y^2\right)=\int\limits_0^1 y\left(4-4y^2+y^4-y^2\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(4y-5y^3+y^5\right)dy=\left(4\frac{y^2}{2}-5\frac{y^4}{4}+\frac{y^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=2-\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{24-15+2}{12}=\frac{11}{12}.$$

$$m=\iint\limits_{D}\rho\left(x,y\right)dxdy=\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{y}^{2-y^2}2ydx=\int\limits_{0}^{1}dy\cdot 2y\,x\Big|_{y}^{2-y^2}=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}dy\cdot 2y\left(2-y^2-y\right)=\int\limits_{0}^{1}\left(4y-2y^3-2y^2\right)dy=\left(4\frac{y^2}{2}-2\frac{y^4}{4}-2\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}=$$

$$=2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{12-3-4}{6}=\frac{5}{6}.$$

Тогда, координаты центра тяжести пластины x_c и y_c будут равны:

$$x_c=\frac{S_y}{m}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{6}}=\frac{11\cdot 6}{12\cdot 5}=\frac{11}{10}=1{,}1\,;$$

$$y_c=\frac{S_x}{m}=\frac{\frac{13}{30}}{\frac{5}{6}}=\frac{13\cdot 6}{30\cdot 5}=\frac{13}{25}=0{,}52.$$

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y=x^2$, $y=4$, $z=0$, $z=3$.

Решение. Построим поверхности, ограничивающие данное тело:

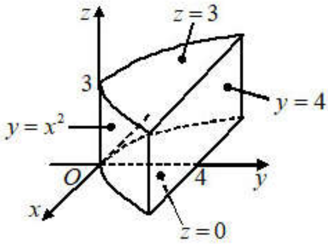


Рисунок 3

Для определения пределов интегрирования, спроектируем его на координатную плоскость *Oxy*.

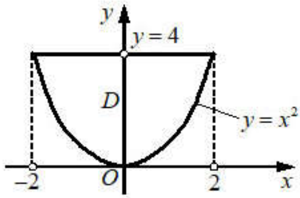


Рисунок 4

Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 4$:

$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$.

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy \int\limits_{0}^{3} dz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy \cdot z\Big|_0^3 = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy \cdot (3-0) =$$

$$= 3\int\limits_{-2}^{2} dx \cdot y\Big|_{x^2}^{4} = 3\int\limits_{-2}^{2} dx \cdot \left(4 - x^2\right) = 3\int\limits_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = 3\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(12x - x^3\right)\Big|_{-2}^{2} = (24-8) - (-24+8) = 16 - (-16) = 32 \text{ куб. ед.}$$

4. Вычислить криволинейный интеграл по длине дуги L $\int\limits_L \frac{4y}{x}dl$, где L: парабола $y=\frac{1}{2}x^2$ от точки $A\left(1;\quad \frac{1}{2}\right)$ до точки $B(2;\quad 2)$.

Решение. Так как кривая L задана в декартовой системе координат, то

$$dl=\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}dx=\sqrt{1+\left[\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\right]^2}dx=$$

$$=\sqrt{1+\left[\frac{1}{2}\cdot 2x\right]^2}dx=\sqrt{1+x^2}dx.$$

Тогда,

$$\int\limits_L \frac{4y}{x}dl=\int\limits_1^2 \frac{4\cdot\frac{1}{2}x^2}{x}\sqrt{1+x^2}dx=\int\limits_1^2 2x\sqrt{1+x^2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{заносим } 2x \textit{ под знак}\\ \textit{дифференциала}\end{matrix}\right|=\int\limits_1^2\sqrt{1+x^2}d\left(x^2\right)=\int\limits_1^2\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(x^2+1\right)=$$

$$=\left.\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2=\frac{2}{3}\left((1+4)^{\frac{3}{2}}-(1+1)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)=5,57$$

5. Вычислить интеграл: $\int\limits_L (2x-y)dx+\left(5y^2-4x\right)dy$, где L – парабола $y=x^2$, от точки $(0,0)$ до точки $(2,4)$.

Решение. Кривая L задана в декартовой системе координат, поэтому,

$$dy = \left(x^2\right)' dx = 2xdx .$$

Подставляя в заданный интеграл $y = x^2$, $dy = 2xdx$, имеем:

$$\int_L (2x - y)dx + \left(5y^2 - 4x\right)dy = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx + \left(5\left(x^2\right)^2 - 4x\right)2xdx =$$

$$= \int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx + \left(10x^5 - 8x^2\right)dx = \int_0^2 \left(2x - x^2 + 10x^5 - 8x^2\right)dx =$$

$$= \int_0^2 \left(2x - 9x^2 + 10x^5\right)dx = \left(2\frac{x^2}{2} - 9\frac{x^3}{3} + 10\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 4 - 3\cdot 8 + \frac{10}{6}\cdot 64 = 4 - 24 + \frac{320}{3} = \frac{320}{3} - 20 = \frac{320 - 60}{3} = \frac{260}{3}.$$

3 СЕМЕСТР

Образец выполнения типового расчета № 1 по разделу «Ряды»

Вариант № 1

1. Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 + 5n + 6}$.

2. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1}$.

3. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{2n}$.

4. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

5. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 4}$.

6. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 n}$.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n!}$.

8. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$.

9. Вычислить интеграл с точностью до 0,001 $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$.

10. Найти первые четыре ненулевые члена разложения решения дифференциального уравнения в степенной ряд: $y'' + 2xy' + 4y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = -1$.

11. Разложить в ряд Фурье функции и построить график суммы ряда:

а) $f(x) = \begin{cases} 5, & \text{при } -\pi \le x < 0, \\ -3, & \text{при } \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$ б) $f(x) = x^2,\quad -3 \le x \le 3$

12. Разложить $f(x)$ в ряд Фурье по синусам. Построить график суммы ряда:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2},\quad 0 < x < \pi$$

Решение.

Задание 1. Раскладываем общий член ряда на элементарные дроби, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, $u_n = \dfrac{6}{n^2 + 5n + 6} = \dfrac{6}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{A}{n+2} + \dfrac{B}{n+3}$. Приведем правую часть к общему знаменателю и, приравнивая числители, имеем: $6 = A(n+3) + B(n+2)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных, получим:

$$\begin{array}{l} n \;: \\ n^0 : \end{array}\left|\begin{cases} A + B = 0, \\ 3A + 2B = 6, \end{cases}\right. \Rightarrow \begin{cases} A = -B, \\ -3B + 2B = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 6, \\ B = -6. \end{cases}$$

Таким образом,

$$u_n=\frac{6}{n^2+5n+6}=\frac{6}{n+2}-\frac{6}{n+3}=6\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right).$$

Запишем n-ю частичную сумму:

$$S_n=6\left(\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{u_1}+\underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}_{u_2}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}_{u_3}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}}_{u_n}\right).$$

Уничтожив соответствующие слагаемые, получим: $S_n=6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)$. Вычисляем сумму ряда:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=6\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=2\quad.$$

Задание 2. Так как в числителе и знаменателе стоят многочлены, то для исследования на сходимость применим предельный признак сравнения. Выберем в качестве эталонного ряда ряд в виде отношения переменных в максимальной степени, стоящих в числителе и знаменателе, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, который является расходящимся. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{n^2+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1+0}{1+0}=1\quad(\neq 0\neq\infty).$$

Следовательно, ряды ведут себя одинаково и т.к. эталонный ряд расходится, то и исследуемый ряд тоже расходится.

Задание 3. Применим радикальный признак Коши. Находим:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}\right)^{2}=\left(\frac{2-0}{3+0}\right)^{2}=\frac{4}{9}<1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то исследуемый ряд сходится.

Задание 4. Общий член ряда содержит показательную функцию, поэтому для исследования его на сходимость применим признак Даламбера. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+2n+1\right)\cdot 3^n}{n^2\cdot 3^n\cdot 3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{3}(1+0+0)=\frac{1}{3}<1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то исследуемый ряд сходится.

Задание 5. Проверим выполнение необходимого условия сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{4}{n^2}}=\frac{5-0+0}{2+0}=\frac{5}{2}\neq 0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то необходимое условие сходимости не выполняется и исследуемый ряд расходится.

Задание 6. Введём в рассмотрение функцию $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^4 x}$.

Эта функция определена на [2; +∞), положительна и монотонно убывает в этом промежутке. Более того, при n>2 $f(n)=\dfrac{1}{n\ln^4 n}=u_n$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^4 n}$ и несобственный интеграл $\int\limits_2^{\infty}\dfrac{dx}{x\ln^4 x}$ ведут себя одинаково в смысле сходимости. Исследуем интеграл на сходимость:

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^4 x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{1}{x}\frac{dx}{\ln^4 x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln^4 x}=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{\ln^{-3}x}{-3}\right|_2^b=$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln^3 b}-\frac{1}{\ln^3 2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\ln^3 2}\right)=\frac{1}{3}\frac{1}{\ln^3 2}.$$

Видим, что несобственный интеграл сходится (равен конечному числу), следовательно, сходится и исследуемый ряд.

Задание 7. Данный ряд является знакочередующимся. Следовательно, применяем теорему Лейбница.

Члены ряда по абсолютной величине убывают:

$$\frac{2}{1}>\frac{2}{2!}=1>\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}>\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}>\ldots>\frac{2}{n!}>\ldots$$

(знаменатель монотонно возрастает, а дробь – убывает)

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n!}=\frac{2}{\infty}=0\ .$$

Так как оба условия теоремы выполняются, то ряд сходится. Выясним характер сходимости. Для этого составим ряд из модулей членов данного ряда, т. е. ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{2}{n!}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n!}$,

исследуем его на сходимость. Это знакоположительный ряд, общий член которого содержит факториал. Поэтому применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{(n+1)!}}{\frac{2}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{\infty}=0<1.$$

Так как величина предела меньше единицы, то ряд из модулей сходится, а следовательно, знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Задание 8. Данный ряд является полным степенным рядом, т. к. содержит все степени $x-3$, с коэффициентами $a_n=\frac{1}{n^2}$. Поэтому, для нахождения области сходимости можно воспользоваться радиусом сходимости в форме Даламбера:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=(1+0)^2=1.$$

Тогда интервал сходимости определится неравенством: $-R<x-3<R$, т. е. $-1<x-3<1$, $2<x<4$. Проверим граничные точки, для чего подставим $x=2$ и $x=4$ в исследуемый степенной ряд.

$x=2$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ – это знакочередующийся ряд.

По теореме Лейбница:

1) Члены ряда по абсолютной величине убывают:

$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}>\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}>\ldots>\frac{1}{n^2}>\ldots$$

(знаменатель монотонно возрастает, а дробь – убывает);

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\infty}=0$.

Так как оба условия теоремы выполняются, то ряд сходится (можно показать что абсолютно) и $x=2$ является точкой сходимости.

$x=4$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4-3)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – это обобщенный гармонический ряд, который сходится, т. к. показатель степени знаменателя $p=2>1$. Поэтому, $x=4$ также является точкой сходимости исследуемого степенного ряда.

Таким образом, область сходимости – это отрезок $x\in[2,4]$.

Задание 9. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена. Воспользуемся стандартным разложением функции e^x:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ , \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

Заменим в нем x на $-6x^2$:

$$e^{-6x^2}=1+\frac{-6x^2}{1!}+\frac{\left(-6x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(-6x^2\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\left(-6x^2\right)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=1-\frac{6x^2}{1!}+\frac{36x^4}{2!}-\frac{216x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n 6^n x^{2n}}{n!}+\ldots$$

Область сходимости этого ряда $x\in(-\infty,+\infty)$ содержит отрезок интегрирования $[0;0{,}1]$, поэтому применим свойство почленного интегрирования степенных рядов:

$$\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}dx=\int\limits_0^{0,1}\left(1-\frac{6x^2}{1!}+\frac{36x^4}{2!}-\frac{216x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n 6^n x^{2n}}{n!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{6}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{36}{2!}\frac{x^5}{5}-\frac{216}{3!}\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n 6^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,1}=$$

$$=0{,}1-\frac{6}{1!}\frac{0{,}1^3}{3}+\frac{36}{2!}\frac{0{,}1^5}{5}-\frac{216}{3!}\frac{0{,}1^7}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n 6^n}{n!}\frac{0{,}1^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

$$=0{,}1-0{,}002+0{,}000036-\ldots=$$

$$=\left|\textit{с учетом точности } \varepsilon=0{,}001\right|\approx 0{,}1-0{,}002=0{,}098.$$

Задание 10. Будем предполагать, что неизвестная функция, являющаяся решением дифференциального уравнения, представима степенным рядом:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots, \quad (*)$$

коэффициенты которого определяются путём последовательного дифференцирования исходного уравнения $y''=-2xy'-4y$ и подстановкой в него $x=0,\quad y(0),\quad y'(0)$ и найденных позже значений $y''(0),\quad y'''(0),\cdots$. Итак, имеем: $y(0)=0,\quad y'(0)=-1$,

$$y''(x)=-2xy'-4y\,,\ y''(0)=-2\cdot 0\cdot(-1)-4\cdot 0=0\,;$$

$$y'''(x)=(-2xy'-4y)'=-2y'-2xy''-4y'=-2xy''-6y'\,,$$

$$y'''(0)=6\,;$$

$$y^{(4)}(x)=(-2xy''-6y')'=-2y''-2xy'''-6y''=-2xy'''-8y''\,,$$

$$y^{(4)}(0)=0\,;$$

$$y^{(5)}(x)=(-2xy'''-8y'')'=-2xy^{(4)}-10y'''\,,\ y^{(5)}(0)=-60\,;$$

$$y^{(6)}(x)=(-2xy^{(4)}-10y''')'=-2xy^{(5)}-12y^{(4)}\,,\ y^{(6)}(0)=0;$$

$$y^{(7)}(x)=(-2xy^{(5)}-12y^{(4)})'=-2xy^{(6)}-14y^{(5)}\,,\ y^{(7)}(0)=840\,.$$

Подставляя найденные значения производных в ряд (*), получим:

$$y(x)=-x+\frac{6}{3!}x^3-\frac{60}{5!}x^5+\frac{840}{7!}x^7-\dots,$$

или

$$y(x)=-x+x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{x^7}{6}-\dots.$$

Задание 11. а) Продолжив эту функцию периодически с периодом 2π на всю ось, получим функцию, разложимую в ряд Фурье (рисунок 1).

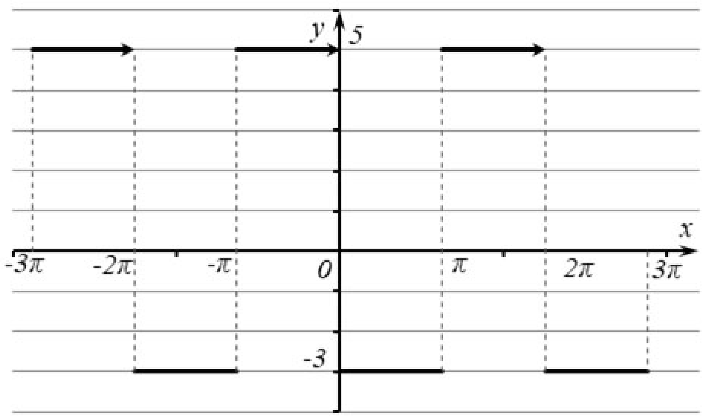


Рисунок 1

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 5dx + \int_{0}^{\pi}(-3)dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[5x\Big|_{-\pi}^{0} - 3x\Big|_{0}^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left(5\pi - 3\pi\right) = 2\,;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 5\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(-3)\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{5}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{3}{n}\sin nx\Bigg|_{0}^{\pi}\right] = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 5\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(-3)\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{5}{n}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{3}{n}\cos nx\Bigg|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{5}{n}\left(\cos 0 - \cos\left(-n\pi\right)\right) + \frac{3}{n}\left(\cos n\pi - \cos 0\right)\right] =$$

$$= \frac{8}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{16}{n\pi}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Значит,

$$f(x) = 1 - \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = 1 - \frac{16}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right).$$

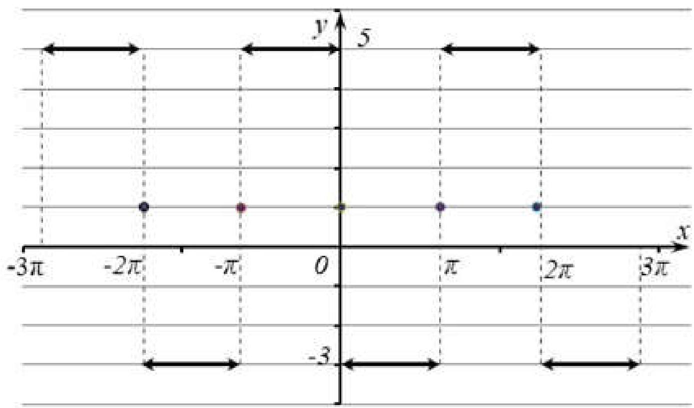
Точкой разрыва является точка $x = 0$. В ней сумма ряда равна:

$$\frac{f(-0) + f(0)}{2} = \frac{5-3}{2} = 1.$$

На концах отрезка сумма ряда равна:

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

Нарисуем график суммы ряда $S(x)$.



Итак, полученный ряд сходится к функции $f(x)$ во всех точках $x \in (-\pi;\pi)$, где функция $f(x)$ непрерывна. В точке $x=0$ $S(x)=0$.

Задание 11. б) Функция четная и поэтому разлагается в ряд Фурье по косинусам. График функции изображен на рисунке 2.

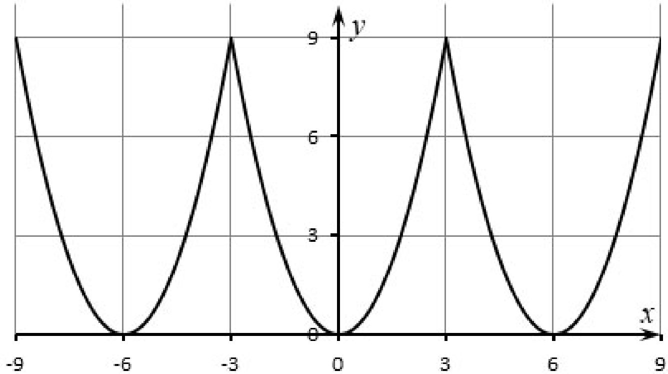


Рисунок 2

Данная функция имеет период $T=6$, т. е. $l=3$. Находим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^3 x^2 dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 6,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx = \frac{2}{3}\int_0^3 x^2\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx =$$

$$=\left(\begin{array}{c}\textit{интегрируем}\\ \textit{по частям}:\end{array}\left|\begin{array}{ll}u=x^2 & du=2xdx\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx & v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\end{array}\right|\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{3\cdot x^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3-\frac{6}{n\pi}\int_0^3 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right]=$$

$$=\left(\begin{array}{c}\textit{интегрируем}\\ \textit{по частям}:\end{array}\left|\begin{array}{ll}u=x & du=dx\\ dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx & v=-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\end{array}\right|\right)=$$

$$=\frac{-4}{n\pi}\left[-\frac{3x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3+\frac{3}{n\pi}\int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\right]=$$

$$=\frac{-4}{n\pi}\left[-\frac{9}{n\pi}\cos n\pi+\frac{9}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3\right]=$$

$$=\frac{36}{n^2\pi^2}(-1)^n\,.$$

Тогда ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)=3+\frac{36}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\,.$$

Данная функция непрерывна на всей числовой оси, следовательно, ряд Фурье сходится к этой функции при любом x, и график суммы ряда совпадает с графиком самой функции.

Задание 12. Продолжим данную функцию на интервал $(-\pi;0)$ нечетным образом (рисунок 3).

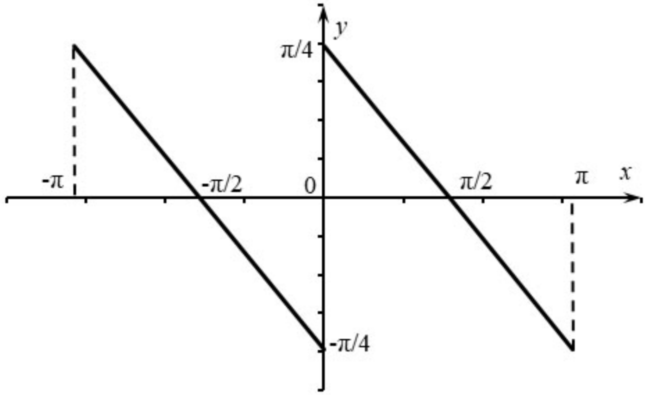


Рисунок 3

В результате получится нечетная функция, ряд которой содержит только синусы. Вычисляем коэффициент b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin nx\,dx =$$

$$= \left(\begin{matrix}\textit{интегрируем}\\ \textit{по частям}:\end{matrix}\left|\begin{matrix} u=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2} & du=-\frac{1}{2}dx \\ dv=\sin nx\,dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4n}\cos\pi n + \frac{\pi}{4n}\cos 0 + \frac{1}{2n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2n}\Big((-1)^n + 1\Big) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Итак, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}$.

В точках $x = \pm\pi$ сумма $S(x)$ ряда равна:

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{\pi/4 - \pi/4}{2} = 0.$$

В точке $x = 0$ сумма ряда $S(0) = 0$.

Образец выполнения типового расчета № 2 по разделу «Элементы теории поля»

Вариант №1

1. Найти производную скалярного поля $u = 2x^2 + 5z\cos y + 6z$ в точке $M_0(-1;0;-2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;1;0)$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = x^2 + 4x^3y + 5xz - z^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ и его модуль.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = 2y\overline{i} + (x+3y-2z)\overline{j} + (y+2z)\overline{k}$: а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $x + 3y + 6z = 6$ и координатными плоскостями по формуле Остроградского; б) через наклонную плоскость.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M) = y\overline{i} + (y+z)\overline{j} + (x-y)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости P: $x + y + z = 1$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = (x^2y - 3z)\overline{i} - x^2yz\,\overline{j} + (xy^3 + z)\overline{k}$.

6. Проверить, является ли векторное поле $\overline{a}(M) = (3x - 4yz)\overline{i} + (3y - 4xz)\overline{j} + (3z - 4xy)\overline{k}$ потенциальным

или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Решение.

1. Найти производную скалярного поля $u = 2x^2 + 5z\cos y + 6z$ в точке $M_0(-1;0;-2)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(1;1;0)$.

Решение.

Найдем вектор $\overline{M_0M_1}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{M_0M_1} = (2;1;2); \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}; \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3};$$

$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}.$$

Найдем частные производные функции и вычислим их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -5z\sin y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 5\cos y + 6;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 4\cdot(-1) = -4; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -5\cdot(-2)\cdot\sin 0 = 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 5\cdot\cos 0 + 6 = 11.$$

Теперь найдем производную по направлению по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \ ,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right|_{M_0} = -4\cdot\frac{2}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 11\cdot\frac{2}{3} = \frac{14}{3}\ .$$

Т.к. $\frac{\partial u}{\partial \lambda} > 0$, то функция в данном направлении возрастает.

2. Найти градиент скалярного поля $u = x^2 + 4x^3y + 5xz - z^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ и его модуль.

Решение. Найдем частные производные функции и вычисляем их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 12x^2y + 5z\ ; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 4x^3\ ; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 5x - 2z\ ;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 2\cdot 1 + 12\cdot 1^2\cdot 2 + 5\cdot(-1) = 21\ ; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 4\cdot 1^3 = 4\ ;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 5\cdot 1 - 2\cdot(-1) = 7\ .$$

Теперь найдем градиент по формуле:

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\ ;$$

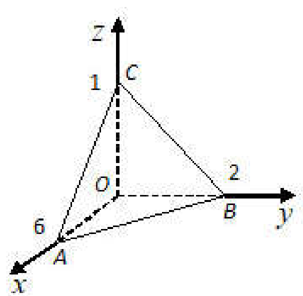
$$grad\, u\big|_{M_0} = 21\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}\ .$$

Наибольшая скорость возрастания функции равна: $\left| grad\, u\big|_{M_0} \right| = \sqrt{21^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{441 + 16 + 49} = \sqrt{506}$.

3. Вычислить поток векторного поля $\overline{a}(M) = 2y\overline{i} + (x + 3y - 2z)\overline{j} + (y + 2z)\overline{k}$: а) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью Р: $x + 3y + 6z = 6$

и координатными плоскостями по формуле Остроградского; б) через наклонную плоскость.

Решение. а) Поток поля через замкнутую поверхность $K = \oint\!\!\oint_S a_n ds$.



Согласно формуле Остроградского $\oint\!\!\oint_S a_n ds = \iiint_V div\overline{a} \cdot dv$.

$$div\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad .$$

По условию
$P = 2y$, $Q = x + 3y - 2z$, $R = y + 2z$.

$$div\vec{a}(M) = 0 + 3 + 2 = 5$$

$$K = \oint\!\!\oint_S a_n ds = \iiint_V 5dv = 5\iiint_V dv = 5 \cdot V_{пир} = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot h =$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot CO = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 = 10 .$$

б) Поток поля через наклонную грань: $K = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$.

Найдем:

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$: $\vec{n} = (1; 3; 6)$,

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{1+9+36} = \sqrt{46} ;$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{46}}, \quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{46}}, \quad \cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{46}} .$$

$$K = \iint\limits_S \left(2y\frac{1}{\sqrt{46}} + (x+3y-2z)\frac{3}{\sqrt{46}} + (y+2z)\frac{6}{\sqrt{46}} \right) ds = =$$

$$\frac{1}{\sqrt{46}}\iint\limits_S \left(2y+3x+9y-6z+6y+12z\right)ds = \frac{1}{\sqrt{46}}\iint\limits_S \left(3x+17y+6z\right)ds =$$

$$= \left| \begin{array}{c} z = \frac{1}{6}\left(6-x-3y\right) \\ z'_x = -\frac{1}{6}, \quad z'_y = -\frac{3}{6} \\ ds = \sqrt{1+\frac{1}{36}+\frac{9}{36}}dxdy = \frac{\sqrt{46}}{6}dxdy \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{46}}\iint\limits_S \left(3x+17y+6-x-3y\right)\frac{\sqrt{46}}{6}dxdy =$$

$$=\frac{1}{6}\iint_S (2x+14y+6)dxdy=\frac{1}{6}\int_0^2 dy\int_0^{6-3y}(2x+14y+6)\,dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^2 dy\left(x^2+14xy+6x\right)\Big|_0^{6-3y}=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^2\left((6-3y)^2+14(6-3y)y+6(6-3y)\right)dy=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^2\left(72+30y-33y^2\right)dy=$$

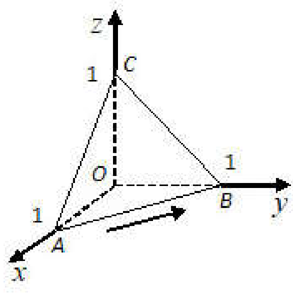
$$=\frac{1}{6}\left(72y+15y^2-11y^3\right)\Big|_0^2=\frac{116}{6}=19\frac{1}{3}.$$

4. Найти циркуляцию векторного поля $\overline{a}(M)=y\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(x-y)\overline{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости ***P:*** $x+y+z=1$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода.

Решение. Согласно определению

$$C=\oint_L ydx+(y+z)dy+(x-y)dz\ .$$

$$\oint_L=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}\ .$$



На отрезке AB: $z=0$, $x+y=1$, $y=1-x$, $dy=-dx$, $dz=0$, следовательно,

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_0^1 (1-x)dx + (1-x-0)(-dx) = \int\limits_0^1 0dx = 0 .$$

На отрезке ВС: $x=0$, $y+z=1$, $z=1-y$, $dz=-dy$, $dx=0$,

следовательно,

$$\int\limits_{BC} = \int\limits_1^0 (y+(1-y))dy + (0-y)(-dy) = \int\limits_1^0 (y+1)dy = \left.\left(\frac{y^2}{2}+y\right)\right|_1^0 = -\frac{3}{2} .$$

На отрезке СА: $y=0$, $x+z=1$, $z=1-x$, $dz=-dx$, $dy=0$,

следовательно,

$$\int\limits_{CA} = \int\limits_0^1 0+0+(x-0)(-dx) = \int\limits_0^1 (-x)dx = \left.\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1 = -\frac{1}{2} .$$

$$C = 0 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2 .$$

5. Вычислить ротор векторного поля: $\overline{a}(M) = (x^2y-3z)\overline{i} - x^2yz\,\overline{j} + (xy^3+z)\overline{k}$.

Решение.

$$rot\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} .$$

По условию: $P = x^2y - 3z$, $Q = -x^2yz$, $R = xy^3 + z$.

Найдем частные производные: $\frac{\partial R}{\partial y} = 3xy^2$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = -x^2y$,

$\frac{\partial P}{\partial z} = -3$, $\frac{\partial R}{\partial x} = y^3$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2xyz$, $\frac{\partial P}{\partial y} = x^2$.

$$rot\vec{a}(M)=\left(3xy^2+x^2y\right)\vec{i}+\left(-3-y^3\right)\vec{j}+\left(-2xyz-x^2\right)\vec{k}\ .$$

6. Проверить, является ли векторное поле $\overline{a}(M)=(3x-4yz)\overline{i}+(3y-4xz)\overline{j}+(3z-4xy)\overline{k}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\overline{a}(M)$ найти его потенциал.

Решение.

Вычислим дивергенцию поля по формуле: $div\vec{a}(M)=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$.

По условию $P=3x-4yz$, $Q=3y-4xz$, $R=3z-4xy$.

$div\vec{a}(M)=3+3+3=9\neq 0$, следовательно поле не соленоидальное.

Вычислим ротор поля, для этого найдем частные производные:

$$\frac{\partial R}{\partial y}=-4x\ ,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=-4x\ ,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=-4y\ ,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=-4y\ ,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-4z\ ,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-4z\ .$$

$rot\vec{a}(M)=\left(-4x+4x\right)\vec{i}+\left(-4y+4y\right)\vec{j}+\left(-4z+4z\right)\vec{k}=0$, следовательно поле потенциальное. Найдем потенциал поля, используя формулу:

$$U(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x} P(\chi,y_0,z_0)d\chi+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\xi,z_0)d\xi+\int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,\zeta)d\zeta+C.$$

В качестве фиксированной точки выберем начало кооринат: $x_0=y_0=z_0=0$ $P(\chi,y_0,z_0)=3\chi$,

$Q(x,\xi,z_0)=3\xi$, $R(x,y,\zeta)=3\zeta-4xy$.

$$U(x,y,z)=\int\limits_{0}^{x}3\chi d\chi+\int\limits_{0}^{y}3\xi d\xi+\int\limits_{0}^{z}(3\zeta-4xy)d\zeta+C=$$

$$=\frac{3\chi^2}{2}\Bigg|_0^x+\frac{3\xi^2}{2}\Bigg|_0^y+\left(\frac{3\zeta^2}{2}-4xy\zeta\right)\Bigg|_0^z+C=$$

$$=\frac{3x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}+\frac{3z^2}{2}-4xyz+C.$$

Приложение 6

Шкалы оценивания

Шкалы оценивания защиты типовых расчетов, контрольных работ и компьютерных контрольно-обучающих тестов (КОПТ)

Семестр 1

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Критерии оценивания	Типовой расчет № 1 **(мах 9 б)**	Типовой расчет № 2 **(мах 9 б)**	Типовой расчет № 3 **(мах 7 б)**
Правильно выполнил менее 35 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы	0–2,5	0–2,5	0–2
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы	2,5–5	2,5–5	2–4
Правильно выполнил от 60 до 84 % заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки Ответы на вопросы полные или частично полные	5–7,5	5–7,5	4–5,5
Правильно выполнил не менее 85 % заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений	7,5–9	7,5–9	5,5–7

Шкала оценивания контрольных работ

Критерии оценивания	Контрольная работа № 1 **(мах 10 б)**	Контрольная работа № 2 **(мах 10 б)**	Контрольная работа № 3 **(мах 10 б)**
Правильно выполнил менее 35 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки	0–2	0–2	0–2
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки	2–5	2–5	2–5
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки	5–7	5–7	5–7
Правильно выполнил не менее 85% заданий или при решении допущены незначительные ошибки	7–10	7–10	7–10

Шкала оценивания КОПТ

КОПТ «Пределы»: всего заданий в тесте 6, из них 4 задания с уровнем Уметь, 2 задания с уровнем Владеть. Каждое задание с уровнем Уметь оценивается в 1,5 балла, задания с уровнем владеть оценивается в 2 балла.

КОПТ «Дифференцирование функций одной переменной»: всего заданий в тесте 8, из них 6 заданий с уровнем Уметь, 2 задания с уровнем Владеть. Каждое задание с уровнем Уметь оценивается в 1 балл, задания с уровнем владеть оценивается в 2 балла.

КОПТ «Неопределенный интеграл»: каждое задание оценивается в 1 балл, всего заданий в тесте 10.

Семестр 2

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Критерии оценивания	Типовой расчет № 1 **(мах 8 б)**	Типовой расчет № 2 **(мах 7 б)**	Типовой расчет № 3 **(мах 15 б)**
Правильно выполнил менее 35 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы	0–2,5	0–2	0–4
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы	2,5–4	2–4	4–9
Правильно выполнил от 60 до 84 % заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки Ответы на вопросы полные или частично полные	4–6	4–5,5	9–13
Правильно выполнил не менее 85 % заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений	6–8	5,5–7	13–15

Шкала оценивания контрольных работ

Критерии оценивания	Контрольная работа № 1 **(мах 10 б)**	Контрольная работа № 2 **(мах 7 б)**	Контрольная работа № 3 **(мах 10 б)**
Правильно выполнил менее 35 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки	0–2	0–2	0–2
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки	2–5	2–5	2–5
Правильно выполнил от 60 до 84 % заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки	5–7	5–7	5–7
Правильно выполнил не менее 85 % заданий или при решении допущены незначительные ошибки	7–10	7–10	7–10

Шкала оценивания КОПТ

КОПТ «Определенные интегралы и их применения»: всего заданий в тесте 6, из них 4 задания с уровнем Уметь, 2 задания с уровнем Владеть. Каждое задание с уровнем Уметь оценивается в 1,5 балла, задания с уровнем владеть оценивается в 2 балла.

КОПТ «Функции нескольких переменных»: всего заданий в тесте 8, из них 6 заданий с уровнем Уметь, 2 задания с уровнем Владеть. Каждое задание с уровнем Уметь оценивается в 1 балл, задания с уровнем владеть оценивается в 2 балла.

КОПТ «Кратные и криволинейные интегралы»: каждое задание оценивается в 2 балла, всего заданий в тесте 5.

Семестр 3

Шкала оценивания защиты типовых расчетов

Критерии оценивания	Типовой расчет № 1 **(мах 18 б)**	Типовой расчет № 2 **(мах 10 б)**
Правильно выполнил менее 35 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Не может ответить на поставленные вопросы	0–5	0–2
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки. Отвечает только на элементарные вопросы	5–10	2–5
Правильно выполнил от 60 до 84 % заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки Ответы на вопросы полные или частично полные	10–15	5–7
Правильно выполнил не менее 85 % заданий или при решении допущены незначительные ошибки. Ответы на вопросы полные с приведением пояснений	15–18	7–10

Шкала оценивания контрольных работ

Критерии оценивания	Контрольная работа № 1 **(мах 15 б)**	Контрольная работа № 2 **(мах 12 б)**
Правильно выполнил менее 35 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки	0–4	0–3
Правильно выполнил от 35 до 59 % заданий, в остальных допущены грубые ошибки	4–9	3–6
Правильно выполнил от 60 до 84% заданий. В некоторых заданиях допущены арифметические ошибки	9–13	6–9
Правильно выполнил не менее 85 % заданий или при решении допущены незначительные ошибки	13–15	9–12

Шкала оценивания промежуточной аттестации

Оценка промежуточной аттестации:

- 10 баллов – Вопросы для проверки уровня обученности ЗНАТЬ ;

- 20 баллов – Задания для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ.

Критерии оценивания вопросов для проверки уровня обученности ЗНАТЬ

Баллы	Критерии
8–10	Глубоко и прочно усвоил теоретический материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, усвоил методы математического анализа проведения исследований и анализа их результатов
5–7	Понимает содержание основных методов математического анализа, грамотно излагает их суть, допуская незначительные неточности в формулировках определений и теорем
1–3	Допускает неточности в формулировках определений, теорем; недостаточно владеет теоретическим материалом
0	Не знает основных понятий и методов математического анализа

Критерии оценивания заданий для проверки уровней обученности УМЕТЬ и ВЛАДЕТЬ

Баллы	Критерии
20–16	Владеет математическими методами, разносторонними навыками и приемами решения практических задач, уверенно применяет теоретические положения на практике (в билете решено 85–100 % практических заданий)

15–11	Умеет применять математические методы, но допускает недочеты и ошибки при решении практических задач, недостаточно уверенно применяет теоретические положения на практике (в билете решено 50–85 % практических заданий)
10–6	Испытывает затруднения при решении практических заданий (в билете решено 30–50 % практических заданий)
5–0	Не владеет математическим инструментарием, допускает грубые ошибки при решении практических задач (в билете решено менее 30 % практических заданий)

Составители:
И.В. Гончарова, Н.М.Комарцов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методический комплекс

Редактор *И.С. Волоскова*
Компьютерная верстка *М.Р. Фазлыевой*

Подписано в печать 25.10.2020.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Офсетная печать.
Объем 17,25 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 49.

Издательство КРСУ
720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, г. Бишкек, ул. Анкара, 2а