ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей математики

Л.Г. Лелёвкина, А.К. Курманбаева

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИКУМЫ ПО РАЗДЕЛУ «ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ»

Бишкек 2023

УДК 517.521(042)
Л 43

Рецензенты:
А.Б. Байзаков, д-р физ.-мат. наук, профессор
Кыргызского национального университета им. Ж. Баласагына,
И.А. Усенов, канд. физ.-мат. наук, доцент КРСУ им. Б.Н. Ельцина

Рекомендовано к изданию Ученым советом
естественно-технического факультета КРСУ им. Б.Н. Ельцина

Лелёвкина Л.Г., Курманбаева А.К.
Л 43 КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИКУМЫ ПО РАЗДЕЛУ «ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ / Л.Г. Лелевкина, А.К. Курманбаева – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2023. – 109 с.

Конспект лекций написан на основе курса лекций, читаемых авторами в течение многих лет на кафедре «Высшая математика» ГОУВПО КРСУ. Основными принципами изложения теоретического материала являются простота, доступность, ясность и лаконичность, что способствует облегчению усвоения материала и соответствует требованиям подготовки бакалавров. Для активизации учебного процесса, организации эффективной аудиторной и самостоятельной работы включены типовые расчеты по 25 вариантам для закрепления алгоритмов и методов решения. В практикуме каждой главы детально рассмотрены и решены типовые задачи, а также предложены задания для самостоятельного решения. Содержание лекций и практикумов соответствует программе курса математического анализа и актуальным требованиям Государственного образовательного стандарта высшего образования для технических и экономических направлений бакалавриата.

В результате изучения теоретического материала по учебнику и решения приведенных заданий, студент получит необходимые знания, умения и навыки, соответствующие компетенциям бакалавриата по техническим и экономическим направлениям.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Понятие числового ряда возникает уже в школьном курсе математики. Например, при представлении действительного числа в виде десятичной дроби. Если дробь бесконечная, то

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

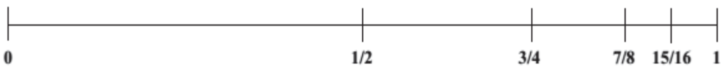
В средней школе рассматриваются так называемые бесконечные геометрические прогрессии-последовательности вида:

$$b + bq + bq^2 + bq^3 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots.$$

Понятие бесконечных сумм было известно уже ученым Древней Греции. Они применяли «метод исчерпывания» при вычислении площадей фигур и поверхностей, объемов тел, длин кривых и т. д. При этом разбивали исследуемую линию, фигуру или тело на счетное число частей с известными: длиной, площадью или объемом и находили сумму этих величин.

При определении ряда, естественно, возникают вопросы: 1. Что такое «сумма» бесконечной последовательности чисел? 2. Если сумма существует, то каковы ее свойства? Прежде чем ответить на эти вопросы, рассмотрим пример.

Пример. Отрезок $[0,1]$ разобьем пополам (на два равных отрезка).



Правую половину отрезка, то есть отрезок [1/2, 1], снова разделим пополам, затем разобьем пополам отрезок [3/4, 1] и т. д. Продолжая этот процесс до бесконечности, получим разбиение отрезка [0, 1] на бесконечное множество отрезков [0, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 7/8], [7/8, 15/16] … . Естественно считать, что «сумма» длин всех отрезков, на которые разбит отрезок [0, 1], равна длине отрезка, т. е. единице. Иными словами,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1. \qquad (*)$$

Это рассуждение было известно еще грекам, и философ Зенон[1], известный своими «парадоксами», оспаривал его законность. Один из парадоксов утверждал, что бегущий человек никогда не сможет достичь своей цели, поскольку он должен пробежать сначала половину требуемой дистанции, затем половину

[1] Зено́н Эле́йский (около 430 до н.э.) – древнегреческий философ, ученик Парменида, представитель Элейской школы.

оставшейся части дистанции и т. д.; таким образом, он должен пробежать бесконечное множество расстояний, а это будет продолжаться вечно.

Если бы мы попытались вычислить сумму (*), последовательно выполняя все указанные в ней сложения, то это, конечно, никогда бы не окончилось.

И все-таки равенство (*) в некотором смысле верно. В чем же заключается точный его смысл?

Для последовательности $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ найдем последовательность частичных сумм $\{S_n\}$:

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \ldots,$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Ясно, что $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 1$ является длиной отрезка.

Цель настоящей главы – получение знаний по теории числовых рядов.

В результате изучения материала главы 1 студент должен:

Знать

- определение ряда, его сходимости и расходимости, суммы ряда;
- необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости;
- признаки сравнения, «эталонные ряды»;
- достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: Даламбера и Коши;
- определение абсолютной и условной сходимости знакопеременных рядов;
- теорему Лейбница для исследования на сходимость знакочередующихся рядов.

Уметь

- исследовать числовой ряд на сходимость или расходимость по определению, в необходимых случаях находить сумму ряда;
- применять достаточный признак расходимости;
- применять признаки сравнения; признаки Даламбера и Коши;
- исследовать знакопеременные ряды на абсолютную и условную сходимость;
- применять теорему Лейбница для исследования сходимости знакочередующихся рядов.

Владеть

- практическими навыками применения рядов к вычислению значений функций и определенных интегралов.

1.1. Понятие числового ряда, частичных сумм и суммы ряда

Пусть задана бесконечная числовая последовательность $\{u_n\}: u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...,$ где $u_n = f(n)$ – числовая функция, определенная на множестве натуральных чисел N.

Составленная из этих чисел сумма

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

называется ***числовым рядом***; числа $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – членами ряда; u_n – его ***общим членом*** или n***-м членом ряда.***

Рассмотрим примеры рядов:

1) $1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^{n+1} + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1},$

2) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)},$

3) $\dfrac{3}{1} - \dfrac{4}{1 \cdot 2} + \dfrac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dfrac{6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n!}.$

Ряд можно задать с помощью общего члена, например, ряд с общим членом $u_n = \dfrac{1}{2n-1}$ имеет вид: $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + ... + \dfrac{1}{2n-1} + ...$

Заметим, что нумерацию членов ряда иногда начинают не с единицы, а с нуля или с какого-либо натурального числа. Например, если общий член ряда $u_n = \dfrac{1}{\ln n}$, то учитывая, что $\ln 1 = 0$, ряд запишется в виде $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$.

Складывая члены ряда (1), составим суммы следующего вида:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \; ..., \quad S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n.$$

Полученная числовая последовательность $\{S_n\}$ ***называется последовательностью частичных сумм ряда*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Сумма S_n конечного числа n первых членов ряда называется n-й ***частичной суммой ряда.***

Если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, то есть $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ***ряд называется сходящимся***, а число S – ***суммой ряда***. При этом записывают: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Число $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ...$ называется ***остатком ряда***. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называется ***расходящимся*** и такой ряд суммы не имеет.

Таким образом, вопрос о сходимости числового ряда (1) по определению равносилен вопросу о существовании конечного предела последовательности частичных сумм.

Например:

1. Ряд $0+0+0+...+0+...$ сходится, его сумма равна 0.

2. Ряд $1+1+1+...+1+...$ расходится, так как $S_n = n \to \infty$ при $n \to \infty$.

3. Ряд 1-1+1-1+1-1+… расходится, так как последовательность частичных сумм $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1,...$ не имеет предела, поскольку $S_n = 1$ при нечетном n (n=2k+1) и $S_n = 0$ при четном n (n=2k).

Пример 1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Решение. Легко видеть, что общий член ряда можно представить в виде: $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Найдем частичные суммы ряда:

$$S_1 = u_1 = 1 - \frac{1}{2};$$

$$S_2 = u_1 + u_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},$$

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, т. е. ряд сходится.

Не существует каких-либо общих методов нахождения сумм сходящихся рядов. Эту задачу удается решить только в отдельных частных случаях.

Одним из таких частных случаев являются ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n^2 + pn + q}$, где A, p, q – целые числа. Если корни знаменателя различаются на целое число, то члены последовательности частичных сумм легко найти, так как в выражении S_n многие слагаемые взаимно уничтожаются.

Пример 2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2 + 5n + 6}$.

Решение. Раскладываем общий член ряда на элементарные дроби, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов:

$$u_n = \frac{6}{n^2 + 5n + 6} = \frac{6}{(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю и, приравнивая числители, имеем:

$$6 = A(n+3) + B(n+2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных, получим:

$$\begin{array}{l} n\ : \\ n^0 : \end{array}\left|\begin{cases} A+B=0, \\ 3A+2B=6, \end{cases}\right. \Rightarrow \begin{cases} A=-B, \\ -3B+2B=6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=6, \\ B=-6. \end{cases}$$

Таким образом,

$$u_n = \frac{6}{n^2+5n+6} = \frac{6}{n+2} - \frac{6}{n+3} = 6\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Запишем n-ю частичную сумму:

$$S_n = 6\left(\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{u_1} + \underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}_{u_2} + \underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}_{u_3} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}}_{u_n}\right).$$

Уничтожив соответствующие слагаемые, получим: $S_n = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right)$. Вычисляем сумму ряда: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 6\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right) = 2.$

1.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Эталонные ряды

В качестве примеров числовых рядов можно также рассмотреть арифметическую и геометрическую прогрессии, известные из школьного курса математики.

1.2.1. Арифметическая прогрессия

Определение 1. Числовая последовательность, каждый член которой отличается от предыдущего на постоянное число d, называется ***арифметической прогрессией***. Число d называется ***разностью прогрессии***.

Любой член арифметической прогрессии вычисляется по формуле:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии вычисляется как:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Числовой ряд, члены которого представляют собой ***арифметическую прогрессию,*** является расходящимся рядом, так как

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(2a_1 + d(n-1)) \cdot n = \infty.$$

Пример 1. Рассмотрим ряд $1+2+3+4+...=\sum_{n=1}^{\infty} n.$

Для этого ряда составим последовательность частичных сумм:

$S_1=1,\quad S_2=1+2,\quad S_3=1+2+3,\ ...,\quad S_n=1+2+3+...+n$.

Применяя формулу суммы n первых слагаемых арифметической прогрессии, имеем: $S_n=\frac{1+n}{2}\cdot n$. Тогда $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}=+\infty$ и данный ряд расходится.

1.2.2. Геометрическая прогрессия

Еще одним примером числового ряда является ***геометрическая прогрессия*,** каждый член которой отличается от предыдущего в q раз:

$$b+bq+bq^2+bq^3+...+bq^{n-1}+... \qquad (1)$$

Таким образом, n-й член геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$b_n=bq^{n-1}.$$

Известно, что сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии определяется по формуле:

$$S_n=\frac{b-bq^n}{1-q} \text{ или } S_n=\frac{b}{1-q}-\frac{bq^n}{1-q}.$$

Возможны случаи:

1) Если $|q|<1$, члены ряда представляют ***бесконечно убывающую геометрическую прогрессию*** и для нее $q^n\to 0$ при $n\to\infty$ и

$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{1-q}-\frac{bq^n}{1-q}\right)=\frac{b}{1-q}$, ряд (1) сходится и его сумма равна:

$$S=\frac{b}{1-q}.$$

2) Если $|q|>1$, то $\lim_{n\to\infty} bq^n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$ и ряд расходится.

3) Если $|q|=1$, то при $q=1$ ряд (1) принимает вид:

$$b+b+...+b+... .$$

Так как $S_n=\underbrace{b+b+b+...+b}_{n\text{ раз}}=n\cdot b,$ то $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} n\cdot b=\infty$ и ряд расходится.

При $q=-1$ ряд принимает вид:

$$b-b+b+...+(-1)^n b+... .$$

и для него $S_n=\begin{cases} b, & \text{при } n-\text{нечетном} \quad (n=2k+1),\\ 0, & \text{при } n-\text{четном} \quad (n=2k).\end{cases}$

Очевидно, в этом случае последовательность частичных сумм S_n предела не имеет, ряд расходится.

Геометрическую прогрессию часто называют ***геометрическим рядом*** и используют как ***«эталонный»*** ряд.

Итак, геометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}: \begin{cases} \text{сходится,} & \text{при } |q|<1, \quad S=\dfrac{b}{1-q}, \\ \text{расходится,} & \text{при } |q| \geq 1. \end{cases}$$

Например, при $a=1$ и при:

$q=3$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} = 1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n+\ldots$, ряд расходится,

$q=\dfrac{1}{2}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots$, ряд сходится.

1.2.3. Гармонический ряд

Рассмотрим еще один «***эталонный» ряд***, который называется ***гармоническим рядом***[2]***:***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots. \tag{2}$$

Докажем, что этот ряд расходится**.** Запишем подробнее гармонический ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\frac{1}{17}+\ldots \tag{3}$$

Напишем далее вспомогательный ряд, представленный следующим образом:

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+ \\ &+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\ldots\end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим через S_n сумму n первых членов гармонического ряда (3) и через σ_n сумму n первых членов ряда (4). Так как каждый член ряда (3) больше соответствующего члена ряда (4) или равен ему, то для $n>2$

$$S_n > \sigma_n. \tag{5}$$

Посчитаем частичные суммы ряда (4) для значений $n = 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$:

$$\sigma_2 = 1+\frac{1}{2} = 1+1\cdot\frac{1}{2}, \quad \sigma_4 = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+2\cdot\frac{1}{2},$$

---

2 Ряд называется гармоническим, поскольку каждый член этого ряда, начиная со второго, является средним гармоническим соседних с ним членов.

$$\sigma_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$\sigma_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ слагаемых}} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2},$$

$$\sigma_{32} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) +$$
$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ слагаемых}} + \underbrace{\left(\frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{32}\right)}_{16 \text{ слагаемых}} = 1 + 5 \cdot \frac{1}{2}.$$

Точно так же подсчитывается, что $\sigma_{2^6} = 1 + 6 \cdot \frac{1}{2}$, $\sigma_{2^7} = 1 + 7 \cdot \frac{1}{2}$ и, вообще

$$\sigma_{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \infty$, но тогда из (5) следует, что и $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$, т. е. гармонический ряд (2) расходится.

Заметим, что гармонический ряд расходится очень «медленно». Л. Эйлер[3], например, вычислил, что $S_{1000} = 7,4849...$, $S_{10000} = 9,7875...$, $S_{1000000} \approx 14,3927....$

Замечание. Наряду с гармоническим рядом часто применяется и обобщенный гармонический ряд.

***Обобщенным гармоническим рядом* (*рядом Дирихле*)** называется ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha \in R). \tag{6}$$

При $\alpha = 1$ – это гармонический ряд, и его расходимость доказана.

Ниже будет доказано, что этот ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится также при $\alpha < 1$.

Таким образом, ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} : \begin{cases} \textit{сходится при } \alpha > 1, \\ \textit{расходится при } \alpha \le 1. \end{cases}$

[3] Леонард Эйлер (1707–1783) – швейцарский математик, физик, механик. Работал в Петербургской академии наук около 36 лет.

1.3. Свойства числовых рядов

1⁰. Если сходится ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

и его сумма равна S, то ряд

$$cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} cu_n, \qquad (2)$$

где c – произвольное число, также сходится и его сумма cS.

Доказательство. Пусть S_n и σ_n – частичные суммы соответственно рядов (1) и (2). Тогда

$$\sigma_n = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = cS_n.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS.$$

Итак, ряд (2) сходится и его сумма равна cS. ◆

2⁰. Если ряд (1) и ряд

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (3)$$

сходятся и их суммы соответственно равны S_1 и S_2, то и ряд

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \pm v_n\right), \qquad (4)$$

сходится и его сумма равна $S_1 \pm S_2$.

Доказательство. Пусть S_{1n}, S_{2n} и S_n – частичные суммы соответственно рядов (1), (3) и (4). Тогда

$$S_n = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) =$$
$$= (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = S_{1n} \pm S_{2n}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_{1n} \pm S_{2n}) = \lim_{n\to\infty} S_{1n} \pm \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S_1 \pm S_2.$$

Таким образом, ряд (4) сходится и его сумма равна $S_1 \pm S_2$. ◆

Замечание. Из свойства 2^0 вытекает, что сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

Сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

3^0. Исключение конечного числа слагаемых не влияет на сходимость ряда.

Доказательство. Пусть S_n – сумма n – первых членов ряда (1); c_k – сумма k – первых отброшенных членов; σ_{n-k} – сумма оставшихся членов ряда. Тогда имеем:

$$S_n = c_k + \sigma_{n-k},$$

где c_k – постоянное число, не зависящее от n. Из последнего следует, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{n-k}$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$; если существует $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{n-k}$, а это доказывает справедливость свойства **3^0**. ◆

Пример 1. Найдем сумму ряда: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots$.

Данный ряд можно представить как сумму двух рядов:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}.$$

Каждый из них является рядом геометрической прогрессии со знаменателями $q=\frac{1}{2}<1$ и $q=\frac{1}{3}<1$, потому они сходятся. Суммы первого и второго рядов равны:

$$S_1=\frac{1/2}{1-1/2}=1, \quad S_2=\frac{1/3}{1-1/3}=\frac{1}{2}.$$

Тогда по свойству **2^0** числовых рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

1.4. Необходимый признак сходимости

Важнейший вопрос, относящийся к любому ряду, заключается в выяснении его сходимости или расходимости. Нахождение n-й частичной суммы S_n и самой суммы ряда во многих случаях не является необходимой, так как чаще всего для применения достаточно выяснить только вопрос сходимости или расходимости ряда. Поэтому для выяснения сходимости ряда устанавливают ***специальные признаки сходимости***. Важным из них является необходимый признак сходимости.

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

сходится, то общий член u_n стремится к нулю, то есть $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится. Имеем $u_n = S_n - S_{n-1}$, откуда $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$

Из необходимого признака сходимости ряда логически сразу следует достаточный признак расходимости ряда. ◆

Достаточный признак расходимости ряда. Если общий член ряда (1) не стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Доказательство. Действительно, если бы ряд сходился, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Но это противоречит условию. Значит, ряд расходится.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n+1}$. ◆

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n+1}$ расходится, т. к. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2} \neq 0$, т. е. выполняется достаточное условие расходимости ряда.

Следует твердо помнить, что стремление n-го члена ряда к нулю не является достаточным для сходимости ряда. Например, гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, расходится, хотя $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Таким образом, если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0,$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ является расходящимся, но, если $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ может сходиться, а может и расходиться.

Алгоритм применения необходимого признака сходимости:
1. Записать n-й член ряда.
2. Вычислить предел n-го члена при $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} u_n = g$.
3. Сделать вывод: $g = 0$ или $g \neq 0$.

Пример 2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ на сходимость.

Решение. По алгоритму имеем:

1) Запишем n-й член ряда: $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

2) $g = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left[1^\infty\right] = e.$

3) Так как $g = e \neq 0$, то ряд расходится.

1.5. Знакоположительный ряд. Признаки сравнения рядов

Определение. ***Знакоположительным рядом называется ряд*, **члены которого неотрицательны.

Знакоотрицательный ряд переходит в знакоположительный путем умножения его на (–1), что, как известно, не влияет на сходимость ряда.

Рассмотрим необходимые и достаточные условия сходимости знакоположительных рядов.

Как было доказано в параграфе 1.4, если ряд сходится, то выполняется необходимый признак сходимости, но он не дает возможности судить о том, сходится ли данный ряд или нет. Для этого необходимы ***достаточные признаки.***

Наиболее простыми являются ***признаки сравнения.***

Теорема 1 (признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots . \qquad (2)$$

Если, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство

$$u_n \le v_n, \qquad (3)$$

то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Другими словами, если «больший» ряд сходится, то будет сходиться и «меньший» ряд, если «меньший» ряд расходится, то будет расходиться и «больший» ряд.

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n соответственно частичную сумму первого и второго рядов: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, $\quad \sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$.

Из условия (3) следует, что

$$S_n \le \sigma_n. \qquad (4)$$

Так как ряд (2) сходится, то существует предел σ его частичной суммы $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma.$ Из того, что члены рядов (1) и (2) положительны, следует, что $\sigma_n < \sigma$ и тогда в силу неравенства (4), $S_n \le \sigma.$

Таким образом, последовательность $\{S_n\}$ монотонно возрастает $(u_n > 0)$ и ограничена сверху числом σ. По признаку существования предела, последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,$ т. е. ряд (1) сходится.

Пусть теперь ряд (1) расходится. Так как члены ряда неотрицательны, в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty.$ Тогда с учетом неравенства (4), получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \infty,$ т. е. ряд (2) расходится. ◆

Замечание 1. Ряд (2) является ***мажорантным*** по отношению к ряду (1), его часто называют ***мажорантой*.**

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливают путём сравнения его с одним из «эталонных» рядов (геометрическим, гармоническим, обобщенным гармоническим рядом), о котором известно, сходится он или нет.

Нестандартность применения признака сравнения заключается в том, что надо не только подобрать соответствующий «эталонный» ряд, но и доказать неравенство, для чего часто требуется преобразование рядов (например, отбрасывание или приписывание конечного числа членов, умножение на определенные числа и т. п.). В ряде случаев более простым оказывается предельный признак сравнения.

Теорема 2 (Предельный признак сравнения). Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1). Таким образом, при $0 < A < \infty$, оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A.$ Из определения предела последовательности для всех $n > N$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство:

$\left|\frac{u_n}{v_n} - A\right| < \varepsilon$, или

$$(A-\varepsilon)v_n < u_n < (A+\varepsilon)v_n. \qquad (5)$$

Если ряд (1) сходится, то из левого неравенства (5) и по признаку сравнения вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A-\varepsilon)v_n$ также сходится. Но тогда, согласно свойству $\mathbf{1^0}$ числовых рядов, в котором $c = (A-\varepsilon)$, ряд (2) сходится.

Если ряд (1) расходится, то из правого неравенства (5), по признаку сравнения, свойства $\mathbf{1^0}$ вытекает, что и ряд (2) расходится.

Аналогично, если ряд (2) сходится (расходится), то сходящимся (расходящимся) будет и ряд (1). ◆

Суть использования признака сравнения состоит в том, что нужно для данного ряда подобрать ему эквивалентный ряд, любой из «эталонных» рядов, и сделать вывод о его сходимости. Чтобы привести данный ряд к эквивалентному ряду вида $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$ ***или*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$***, можно, например, заменить бесконечно малые (бесконечно большие) величины эквивалентными.***

Для этого необходимо применить таблицу эквивалентностей (таблица 1) бесконечно малых величин при $\alpha \to 0$ (см. [11], § 2.5).

Таблица 1 – Таблица эквивалентностей

1.	$\sin\alpha \sim \alpha$	**6.**	$\left((1+\alpha)^m - 1\right) \sim m\alpha$
2.	$\arcsin\alpha \sim \alpha$	**7.**	$\left(a^{\alpha} - 1\right) \sim \alpha \ln a$
3.	$tg\alpha \sim \alpha$	**8.**	$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$
4.	$arctg\alpha \sim \alpha$	**9.**	$\left(1-\cos\alpha\right) \sim \alpha^2 / 2$
5.	$\left(e^{\alpha} - 1\right) \sim \alpha$	**10.**	$\log_a(1+\alpha) \sim \alpha / \ln a$

Замечание 2. Если общим членом ряда является отношение двух многочленов, то в качестве ряда для сравнения рекомендуется брать ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, где α равно разности старших степеней многочленов, стоящих в знаменателе и в числителе. Очевидно, что если степень числителя больше, либо равна степени знаменателя, то $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ и ряд расходится по необходимому признаку.

Алгоритм применения признаков сравнения

1. Проверить необходимый признак сходимости $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

2. Подобрать соответствующий эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

3. Применить либо признак сравнения, либо предельный признак сравнения. Сделать вывод.

Замечание 3. Для оценки общего члена ряда рекомендуем использовать следующие неравенства:

$-1 \le \cos n \le 1$, $-1 \le \sin n \le 1$, $1 \le \ln n \le n^p$ $(\forall p > 0)$, $\dfrac{\pi}{4} \le arctg\, n \le \dfrac{\pi}{2}$ и т. п.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+3)^4}$ с помощью признака сравнения.

Решение. Используем предложенный алгоритм.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+3)^4} = 0$, т. е. необходимое условие сходимости ряда выполнено.

2. Поскольку $0 < \dfrac{1}{(n+3)^4} < \dfrac{1}{n^4}$ для любого $n \in N$, то в качестве вспомогательного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ можно взять числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

3. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$ – обобщенный гармонический с $\alpha = 4$, то он сходится. Согласно первому признаку сравнения, сходимость большего ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$ влечёт за собой сходимость заданного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+3)^4}$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^3}(2+\cos^2 n)}$ с помощью признака сравнения.

Решение. По алгоритму имеем:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^3}(2+\cos^2 n)} = 0$;

2. Поскольку $\cos^2 n \le 1$, то $2 + \cos^2 n \le 3$, значит, $\sqrt[5]{n^3}(2+\cos^2 n) \le 3\sqrt[5]{n^3}$, поэтому $\dfrac{1}{\sqrt[5]{n^3}(2+\cos^2 n)} \ge \dfrac{1}{3\sqrt[5]{n^3}} = v_n$.

3. Так как ряд числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^3}}$ является обобщенным гармоническим рядом с $\alpha = \dfrac{3}{5} < 1$, то он расходится. Значит, по первому признаку сравнения числовых рядов числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n^3}(2+\cos^2 n)}$ также расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3n^2+2}$ с помощью предельного признака сравнения.

Решение. Следуя алгоритму, имеем:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3n^2+2}=0$.

2. Так как степень многочлена числителя $\frac{1}{2}$, а степень многочлена знаменателя равна 2, поэтому $\alpha=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, то для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3n^2+2}$ в качестве вспомогательного ряда возьмём ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$. Имеем: $u_n=\frac{\sqrt{n}}{3n^2+2}$, $v_n=\frac{1}{n^{3/2}}$.

3. Применим предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot n^{3/2}}{3n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2(3+\frac{2}{n^2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{3}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{3}$ – конечное, отличное от нуля число, то по предельному признаку сходимости ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3n^2+2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ ведут себя одинаково в смысле сходимости. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ – сходящийся ряд Дирихле $(\alpha=\frac{3}{2}>1)$, следовательно, сходится и исследуемый ряд.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ с помощью предельного признака сравнения**.**

Решение. 1. Найдем предел общего члена**:** $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=0$.

Необходимый признак сходимости выполнен.

2. Из таблицы эквивалентностей имеем: $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n^2}$ $\left(n\to\infty\right)$. Для сравнения возьмём ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который является сходящимся обобщенным гармоническим рядом, так как для него $\alpha=2>1$.

3. Применим предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1.$$

Условия предельного признака сравнения выполнены ($\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$ – конечное, отличное от нуля число), следовательно, ряды ведут себя одинаково. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то и данный ряд сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$ с помощью предельного признака сравнения.

Решение. По алгоритму имеем:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$. Необходимый признак сходимости выполняется.

2. Из таблицы эквивалентностей имеем: $\sin\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi}{n}$ при $n\to\infty$. Поэтому для сравнения возьмём гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

3. Применим предельный признак сравнения, использовав первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\pi.$$

Так как гармонический ряд является расходящимся, то по предельному признаку исследуемый ряд также расходится.

Проблема применения признаков сравнения состоит чаще всего в сложности подбора вспомогательного ряда. Поэтому при исследовании рядов в большинстве случаев применяются следующие достаточные признаки: признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши.

1.6. Признак Даламбера[4]

Теорема. Пусть дан числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

с положительными членами. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то

- при $l < 1$ – ряд сходится,
- при $l > 1$ – ряд расходится,
- при $l = 1$ – вопрос о сходимости ряда по признаку Даламбера не решается.

Доказательство. В силу определения предела для любого $\varepsilon > 0$ и $n > N$ выполняется неравенство:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon \quad \text{или } l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon. \qquad (2)$$

Из правой части неравенства (2) при $l + \varepsilon = q < 1$, имеем $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$, или $u_{n+1} < u_n q$, для $n > N$. Давая номеру $n = 1, 2, 3, \ldots$ эти значения, из последнего неравенства имеем:

$$u_2 < u_1 q,$$
$$u_3 < u_2 \cdot q < u_1 q^2,$$
$$u_4 < u_3 \cdot q < u_1 q^3.$$

Суммируя левые и правые части этих неравенств, получаем, что члены ряда $u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$ меньше соответствующих членов ряда $u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 + \ldots$, который сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$. Тогда по признаку сравнения ряд $u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$ сходится, следовательно, сходится и исходный ряд (1).

Пусть $l > 1$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$. Отсюда вытекает, что, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или $u_{n+1} > u_n$, т. е. члены ряда возрастают с увеличением номера, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Следовательно, согласно достаточному признаку расходимости ряд (1) расходится. ◆

Замечание 1. Для составления $(n+1)$-го члена ряда u_{n+1} вместо n в общий член ряда u_n подставляется $(n+1)$.

---

4 Жан Лерон Д`Аламбер (1717–1783) – французский математик, физик, механик. Признак Даламбера доказан им в 1768 г.

Замечание 2. Если расходимость установлена с помощью признака Даламбера, то общий член ряда не стремится к нулю. Поэтому в этом случае можно не проверять выполнение необходимого признака.

Замечание 3. Признак Даламбера рационально использовать, когда общий член ряда содержит ***показательную зависимость, фактроиал некоторого выражения или бесконечные произведения.***

Напомним, что ***факториал натурального числа n*** определяется как произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Двойной факториал числа n обозначается ***n***!! и определяется как произведение всех натуральных чисел в отрезке $[1,n]$, имеющих ту же четность что и n. Таким образом,

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n; \quad (2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1).$$

Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5; \quad 5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5.$

Алгоритм применения признака Даламбера

1. Выписать n-й член ряда u_n.

2. Найти $(n+1)$-й член ряда u_{n+1}.

3. Записать отношение $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ и упростить полученное выражение.

4. Вычислить предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

5. Сравнить l с единицей и сделать вывод о поведении заданного ряда.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{4^n}$.

Решение. Применим предложенный алгоритм:

1. Выпишем n-й член ряда $u_n = \dfrac{n^2}{4^n}$.

2. Найдем $(n+1)$-й член ряда $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{4^{n+1}}$.

3. Запишем отношение и упростим полученное выражение:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 4^n}{n^2 \cdot 4^{n+1}} = \frac{(n+1)^2 \cdot 4^n}{n^2 \cdot 4^n \cdot 4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2.$$

4. Вычислим предел $l = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

5. Так как $l = \dfrac{1}{4} < 1$, то, согласно признаку Даламбера, ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$.

Решение. Исследование проводится аналогично приведенному алгоритму. В данном случае:

1) $u_n = \frac{8^n}{n!}$,

2) $u_{n+1} = \frac{8^{n+1}}{(n+1)!}$,

3) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{8^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 8^n} = \frac{8^n\cdot 8\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot 8^n} = \frac{8}{(n+1)}$,

4) $l = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 8\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)} = 8\cdot 0 = 0$.

Так как $l = 0 < 1$, то по признаку Даламбера ряд сходится.

Пример 3. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}$.

Решение. Поступая аналогично, имеем:

1) $u_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}$,

2) $u_{n+1} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)(3(n+1)-2)}{2^{(n+1)+1}\cdot(n+1)!} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)(3n+1)}{2^{n+2}\cdot(n+1)!}$,

3) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)(3n+1)\cdot 2^{n+1}n!}{2^{n+2}(n+1)!\cdot 1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)} = \frac{(3n+1)\cdot 2^n\cdot 2^1 n!}{2^n\cdot 2^2 n!(n+1)} = \frac{3n+1}{2(n+1)}$,

4) $l = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2(n+1)} = \frac{3}{2} > 1$,

следовательно, исходный ряд расходится.

1.7. Радикальный признак Коши[5]

Теорема. Пусть для числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, тогда:

- при $l < 1$ – ряд сходится,
- при $l > 1$ – ряд расходится,
- при $l = 1$ – вопрос о сходимости ряда по признаку Коши не решается.

Доказательство теоремы аналогично доказательству признака Даламбера.

Замечание 1. Радикальный признак Коши применяется для решения вопроса о сходимости рядов, ***общий член которых представляет собой*** n***-ю степень какого-либо выражения или кратную*** n***-й степени.***

Замечание 2. При применении признака Коши часто используются

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1,$$

полученные по правилу Лопиталя (см. [11], § 4.2).

Алгоритм применения радикального признака Коши

1. Выписать n-й член ряда u_n.
2. Записать $\sqrt[n]{u_n}$ и упростить полученное выражение.
3. Вычислить предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.
4. Сравнить l с единицей и сделать вывод о поведении заданного ряда.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{4n-3}\right)^{2n+3}$ с помощью радикального признака Коши.

Решение. Исследование проведем по алгоритму:

1. $u_n = \left(\frac{3n+4}{4n-3}\right)^{2n+3}$;

2. $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n+4}{4n-3}\right)^{2n+3}} = \left(\frac{3n+4}{4n-3}\right)^{\frac{2n+3}{n}} = \left(\frac{3n+4}{4n-3}\right)^{2+\frac{3}{n}}$;

---

[5] Огюстен Луи Коши (1789–1857) – известный французский математик, в 1821 г. доказал радикальный признак сходимости.

3. $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{4n-3}\right)^{2+\frac{3}{n}}==\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+\dfrac{4}{n}}{4-\dfrac{3}{n}}\right)^{2+\frac{3}{n}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}.$

4. Так как $l=\dfrac{9}{16}<1$, то согласно радикальному признаку Коши ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{n+1}\right)^n$ с помощью радикального признака Коши.

Решение. По алгоритму имеем:

1) $u_n=\left(\dfrac{2n-1}{n+1}\right)^n$,

2) $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\left(\dfrac{2n-1}{n+1}\right)^n}=\dfrac{2n-1}{n+1}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+1}=2$.

4) этот ряд расходится по радикальному признаку Коши, так как $l=2>1$.

Пример 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+2}\right)^{n^2}$ с помощью радикального признака Коши.

Решение. В этом случае

1. $u_n=\left(\dfrac{2n-1}{2n+2}\right)^{n^2}$.

2. $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\left(\dfrac{2n-1}{2n+2}\right)^{n^2}}=\left(\dfrac{2n-1}{2n+2}\right)^n$.

3. $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+2}\right)^n=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2n+2}\right)^n=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{2n+2}\right)^{-\frac{2n+2}{3}}\right]^{\frac{-3}{2n+2}\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3n}{2n+2}}=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{e\sqrt{e}}.$$

4. Так как $l=\dfrac{1}{e\sqrt{e}}<1$, то этот ряд сходится.

1.8. Интегральный признак Коши[6]

В тех случаях, когда нельзя применить признаки сравнения, Даламбера и Коши, применяется так называемый интегральный признак Коши, который, в отличие от радикального, выражается в интегральной форме.

Напомним (см. [12], § 2.7), что по определению интеграл с бесконечным верхним пределом $\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)dx$ называется ***несобственным интегралом первого рода,*** который равен:

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{x_0}^{b} f(x)dx.$$

Если предел в правой части конечный, то интеграл называется ***сходящимся,*** если предел не существует или бесконечный, то интеграл называется ***расходящимся.***

Теорема. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого положительны и не возрастают, т. е. $u_1 \ge u_2 \ge \ldots \ge u_n \ge \ldots$ и пусть $f(x)$ – такая непрерывная невозрастающая функция, что при $x = 1, 2, 3, \ldots, n.$ выполняются равенства:

$$f(1) = u_1, \quad f(2) = u_2, \ldots, f(n) = u_n.$$

Тогда:

1) если несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;

2) если указанный интеграл расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, основанием которой служит отрезок оси Ox от $x = 1$ до $x = n$ (рисунок 1). Впишем в эту трапецию и опишем около нее две ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников, основаниями которых служат отрезки $[1;2], [2,3], \ldots$.

[6] В некоторой литературе этот признак носит название интегральный признак Коши–Маклорена, так как был открыт Маклореном в 1742 г., а затем вновь изобретен Коши, благодаря которому и стал широко известен. Маклорен Колин (1698–1476) – шотландский математик.

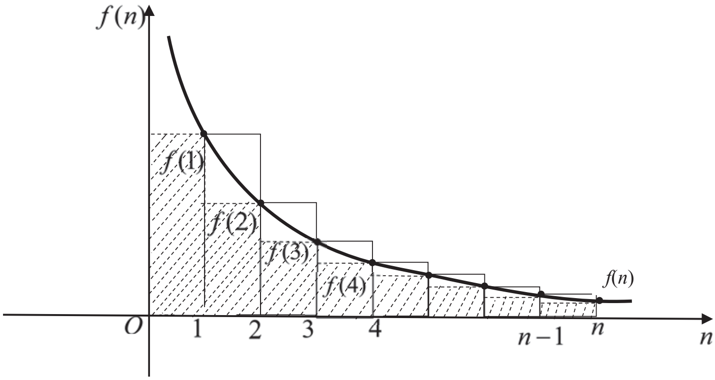


Рисунок 1

Найдем площадь ступенчатой фигуры, образованной описанными прямоугольниками, высоты которых определяются значениями функции при $x=1,2,3,...,n-1,$ а длина каждого из них равна 1 (рисунок 1):

$S_2 = f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + ... + f(n-1)\cdot 1.$

Аналогично найдем площадь ступенчатой фигуры, образованной вписанными прямоугольниками, высоты которых определяются значениями функции при $x=2,3,...,n,$ а длина каждого из них равна 1 (рисунок 1):

$S_1 = f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + ... + f(n)\cdot 1.$

Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла, имеем:

$$S_1 < \int_1^{\infty} f(x)dx < S_2,$$

или

$$f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + ... + f(n)\cdot 1 < \int_1^{\infty} f(x)dx < f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + ... + f(n-1)\cdot 1.$$

Учитывая, что $f(1)=u_1, \quad f(2)=u_2, ..., f(n-1)=u_{n-1}, f(n)=u_n,$ получим:

$$u_2 + u_3 + ... + u_n < \int_1^{\infty} f(x)dx < u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}.$$

Так как $S_1 = S_n - u_1, \quad S_2 = S_n - u_n$, где S_n – n-ая частичная сумма, то

$$S_n - u_1 < \int_1^{\infty} f(x)dx < S_n - u_n. \qquad (1)$$

Случай 1. Если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, т. е. $\int_1^{\infty} f(x)dx = A,$ тогда с учетом неравенства (1) имеем: $S_n - u_1 < A$ или $S_n < u_1 + A$, т. е. последовательность частичных сумм возрастает и ограничена сверху, следовательно, имеет предел и ряд сходится.

Случай 2. Если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, т. е. $\int_1^{\infty} f(x)dx=\infty$, тогда, учитывая, что $S_n>\int_1^{\infty} f(x)dx+u_n$, получаем, что $S_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Следовательно, ряд расходится. ◆

Использование данного признака связано с исследованием на сходимость несобственного интеграла, что не всегда является простой задачей. Поэтому признак используется только в тех случаях, когда общий член ряда при замене *n* на *x* представляет собой интегрируемую функцию.

Алгоритм применения интегрального признака Коши.

1. Выписать общий член $u_n=f(n)$ заданного ряда.
2. Записать функцию $f(x)$, заменив в общем члене ряда n на x.
3. Исследовать несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ и сделать вывод о поведении заданного ряда.

Пример 1. Исследовать на сходимость гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Решение.

1. Выпишем общий член заданного ряда $u_n=\frac{1}{n}$.

2. Запишем функцию $f(x)=\frac{1}{x}$, заменив в общем члене ряда n на x.

3. Исследуем несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^b\right)=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty.$$

Так как интеграл расходится, то и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ тоже является расходящимся.

Пример 2. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Решение.

1. Выпишем общий член заданного ряда $u_n=\frac{1}{n^{\alpha}}$.

2. Запишем функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$.

3. Исследуем несобственный интеграл при $\alpha \neq 1$:

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\left(\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{1}^{b}\right)=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty}(b^{1-\alpha}-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1;\\ +\infty, & \alpha<1.\end{cases}$$

Следовательно, при $\alpha>1$ интеграл сходится, а при $\alpha<1$ интеграл расходится. Таким образом, из интегрального признака Коши следует, что обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$, и расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$.

Решение. Следуя алгоритму, имеем:

1. $u_n=\dfrac{1}{n\ln n}$.

2. Введём в рассмотрение функцию $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$.

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ и несобственный интеграл $\int\limits_{2}^{\infty}\dfrac{dx}{x\ln x}$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

3. Исследуем интеграл на сходимость:

$$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\ln(\ln x)\Big|_{2}^{b}=\lim_{b\to+\infty}(\ln\ln b-\ln\ln 2)=+\infty .$$

Видим, что несобственный интеграл расходится, следовательно, расходится и исследуемый ряд.

Пример 4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+4n+13}$.

Решение.

1. Выпишем общий член заданного ряда $u_n=\dfrac{1}{n^2+4n+13}$.

2. Запишем функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+13}$.

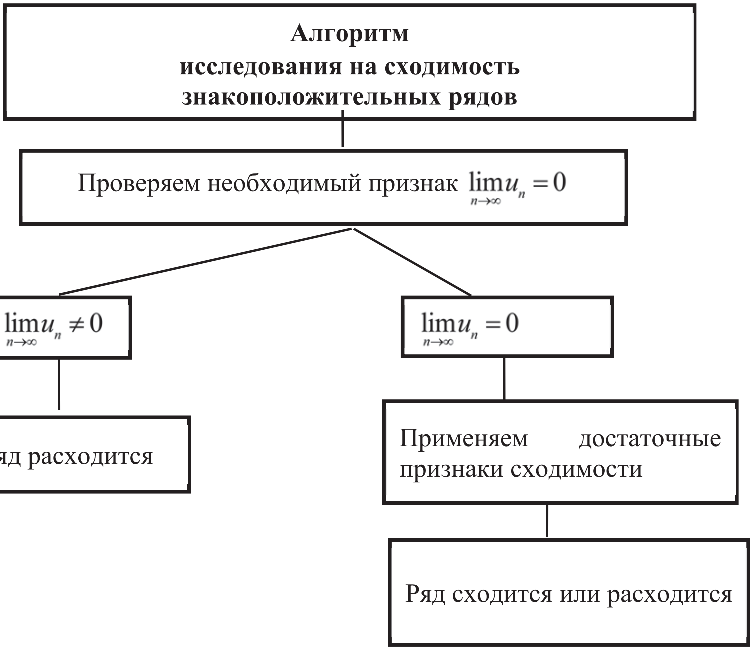
3. Исследуем несобственный интеграл на сходимость:

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{(x+2)^2+9}=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}arctg\left.\frac{x+2}{3}\right|_{1}^{b}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(arctg\frac{b+2}{3}-arctg1\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{12}.$$

Видим, что несобственный интеграл сходится, следовательно, сходится и исследуемый ряд.

Таким образом, чтобы исследовать ряд на сходимость, необходимо провести следующие операции по приведенному ниже алгоритму.



1.9. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды

1.9.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Определение 1. ***Знакочередующимся рядом*** называют ряд, в котором любые два сосоедних члена имеют разные знаки. Таким образом, знакочередующийся ряд – это ряд вида:

$$u_1 - u_2 + u_3 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \qquad (1)$$

или

$$-u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^n u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \qquad (2)$$

где все u_n – положительные действительные числа ($u_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$).

Для знакочередующихся рядов имеет место ***достаточный признак сходимости*** Лейбница[7].

Теорема 1. ***(Признак Лейбница).*** Знакочередующийся ряд (1) сходится, если выполняются два условия:

1. Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т. е.

$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots;$

2. Общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

При этом сумма S ряда удовлетворяет неравенству $S < u_1$, т. е. не превышает первого члена ряда.

Доказательство. Докажем теорему 1 для ряда (1). Рассмотрим частичную сумму четного числа членов ряда (1), объединив их следующим образом:

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m} = \\ = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}). \tag{3}$$

Выражение в каждой скобке (3), согласно первому условию теоремы, положительно. Следовательно, $S_{2m} > 0$ и последовательность частичных сумм $\{S_{2m}\}$ будет монотонно возрастающей.

С другой стороны, сгруппировав их иначе, получим:

$$S_{2m} = u_1 - \left[(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots + (u_{2m-2} - u_{2m-1}) + u_{2m}\right]. \tag{4}$$

Из (4) видно, с учетом условия 1 теоремы, что выражение в квадратной скобке будет положительным, а тогда очевидно, что $S_{2m} < u_1$, т. е. $\{S_{2m}\}$ ограничена. Следовательно, эта последовательность имеет предел:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S, \tag{5}$$

причем $S < u_1$.

Рассмотрим теперь частичные суммы нечетного числа $(2m+1)$ членов ряда (1). Очевидно, что $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Отсюда следует, что

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + 0 = S, \tag{6}$$

т. к. $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$ в силу второго условия теоремы. Из (5) и (6) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т. е. ряд (1) сходится, причем $S < u_1$. ◆

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд:

[7] Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646–1716) – немецкий математик, физик и изобретатель, юрист, историк, философ-идеалист.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots .$$

Решение. Это знакочередующийся ряд, поэтому исследуем его по признаку Лейбница. Очевидно, что

1) $\frac{1}{2}>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{2^3}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0,$

следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ согласно теореме Лейбница сходится.

1.9.2. Знакопеременные ряды

Абсолютная и условная сходимость

Определение 2. ***Знакопеременным*** называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, содержащий как положительные, так и отрицательные члены ряда.

Например,

1) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots;$

2) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{3}{7}-\frac{4}{9}+\frac{5}{11}+\ldots;$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{32}+\frac{1}{50}+\ldots .$

В частности, знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Для знакопеременных рядов имеет место следующий ***общий достаточный признак сходимости:***

Теорема 2. Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots . \tag{7}$$

Если сходится ряд, составленный из модулей членов данного ряда

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots, \tag{8}$$

то сходится и сам знакопеременный ряд.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (7) и (8):

$$\frac{u_1+|u_1|}{2}+\frac{u_2+|u_2|}{2}+\frac{u_3+|u_3|}{2}+\ldots+\frac{u_n+|u_n|}{2}+\ldots . \tag{9}$$

Имеем:

при $u_n>0$ $u_n=|u_n|$ и $\frac{u_n+|u_n|}{2}=\frac{|u_n|+|u_n|}{2}=|u_n|$;

при $u_n<0$ $|u_n|=-u_n$ и $\frac{u_n+|u_n|}{2}=\frac{u_n+(-u_n)}{2}=0.$

Таким образом, члены ряда (9) либо равны членам сходящегося ряда (8), либо меньше их. Поэтому ряд (9) сходится на основании признака сравнения.

Умножив все члены сходящегося ряда (7) на $\frac{1}{2}$, получим сходящийся ряд (по свойству 1^0 числовых рядов):

$$\frac{|u_1|}{2}+\frac{|u_2|}{2}+\frac{|u_3|}{2}+\ldots+\frac{|u_n|}{2}+\ldots . \tag{10}$$

Рассмотрим теперь ряд, являющийся разностью сходящихся рядов (9) и (10):

$$\left(\frac{u_1+|u_1|}{2}-\frac{|u_1|}{2}\right)+\left(\frac{u_2+|u_2|}{2}-\frac{|u_2|}{2}\right)+\left(\frac{u_3+|u_3|}{2}-\frac{|u_3|}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{u_n+|u_n|}{2}-\frac{|u_n|}{2}\right)+\ldots .$$

Этот ряд сходится на основании свойства 2^0 числовых рядов.

Но ряд (7) получается из последнего ряда умножением всех его членов на 2:

$$2\cdot\left(\frac{u_n+|u_n|}{2}-\frac{|u_n|}{2}\right)=2\cdot\frac{u_n}{2}=u_n.$$

Следовательно, ряд (7) также сходится.

Пример 2. Исследовать знакопеременный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{32}+\frac{1}{50}+\ldots .$

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|. \tag{11}$$

К ряду (11) применим признак сравнения:

$$\frac{1}{n^2}\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|\le\frac{1}{n^2},$$

учитывая, что $\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|\le 1$. Так как $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\alpha=2>1)$ сходится, то сходится и ряд (11), следовательно, исходный ряд тоже сходится.

Определение 3. Знакопеременный ряд называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Замечание 1. Всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Определение 4. Знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся***, если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Для исследования рядов на абсолютную сходимость применяются признаки сходимости знакоположительных рядов.

Например, ряд, рассмотренный в примере 1, сходится абсолютно, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots.$$

А это есть ряд геометрической прогрессии вида $\sum_{n=1}^{\infty} bq^n$, где $q=\frac{1}{2}<1$.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают следующими свойствами:

1^0. Абсолютно сходящийся ряд остается сходящимся и не меняет величины суммы ряда при любой перестановке его членов (теорема Дирихле).

2^0. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S=S_1+S_2$ (или соответственно $S=S_1-S_2$).

3^0. Абсолютно сходящиеся ряды, в отличие от условно сходящихся, можно перемножать. Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого $S=S_1\cdot S_2$.

Замечание 2. Для условно сходящихся рядов соответствующие свойства, вообще говоря, не имеют места.

Так, в условно сходящемся ряде, изменяя порядок следования членов, можно сделать сумму ряда равной любому наперед заданному числу или даже сделать ряд расходящимся (теорема Римана[8]).

Возьмем в качестве примера условно сходящийся ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$. Переставим члены местами и сгруппируем их следующим образом:

$$\left(\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{1/2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}_{1/6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}_{1/10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots.$$

Перепишем ряд в виде:

[8] Риман Георг Фридрих Бернгард (1826–1866) – немецкий математик.

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right),$$

т. е. от перестановки членов ряда сумма его уменьшилась в два раза.

Алгоритм исследования знакочередующегося ряда

1. Проверить выполнение условий признака Лейбница.
2. Если ряд (1) сходится, то следует уточнить абсолютно или условно.
3. Если хотя бы одно из условий признака Лейбница не выполняется, то ряд (1) расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 4^n}=\frac{1}{1\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}-\frac{1}{4\cdot 4^4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 4^n}+\ldots\ . \qquad (12)$$

Решение. Данный ряд знакочередующийся.

1. Проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) $\frac{1}{1\cdot 4}>\frac{1}{2\cdot 4^2}>\frac{1}{3\cdot 4^3}>\frac{1}{4\cdot 4^4}>\ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}=0.$

Так как условия признака Лейбница выполняются, то ряд сходится.

2. Выясним характер сходимости ряда. Для этого составим ряд из абсолютных величин членов ряда (12):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 4^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}. \qquad (13)$$

К ряду (13) применим признак Даламбера:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}:\frac{1}{n\cdot 4^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 4^n}{(n+1)\cdot 4^n\cdot 4}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}=\frac{1}{4}<1.$$

Так как $l<1$, то ряд (13) сходится. Следовательно, ряд (12) сходится абсолютно.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}=\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-\frac{1}{5\ln 5}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n\ln n}+\ldots \qquad (14)$$

Решение.

1. Проверим выполнение условий признака Лейбница:

1. $\frac{1}{2\ln 2}>\frac{1}{3\ln 3}>\frac{1}{4\ln 4}>\frac{1}{5\ln 5}>\ldots\ .$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}=0.$

Так как условия признака Лейбница выполняются, то ряд (14) сходится.

2. Выясним характер сходимости ряда.

Исследуем на сходимость ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (14):

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n\ln n}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}. \qquad (15)$$

Воспользуемся интегральным признаком Коши:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{b\to\infty}\ln\left|\ln x\right|\Big|_2^b=\lim_{b\to\infty}\left[\ln\ln b-\ln\ln 2\right]=\infty.$$

Так как несобственный интеграл расходится, то согласно интегральному признаку Коши расходится и ряд (15). Следовательно, ряд (14) сходится условно.

Пример 5. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{2^n+n^3}$.

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2}{2^n\left(1+\frac{n^3}{2^n}\right)}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{n^3}{2^n}}=2\cdot\frac{1}{1+0}=2\neq 0,$$

то общий член ряда не стремится к нулю. Необходимое условие сходимости ряда не выполнено и поэтому исходный ряд расходится.

Замечание 3. В некоторых задачах проверка одного из условий сходимости ряда по признаку Лейбница может представлять существенные сложности. Тогда следует попробовать сразу исследовать ряд из абсолютных величин на сходимость с помощью изученных ранее признаков сходимости знакоположительных рядов. Если окажется, что полученный ряд сходится, то исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$.

Решение. Ряд знакочередующийся и по теореме Лейбница необходимо вычислить предел $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$, что является довольно сложной задачей. Поэтому переходим к исследованию ряда из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$.

Применим признак Даламбера и найдем отношение последующего члена к предыдущему:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}}{(n+2)!}:\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot 3\cdot(n+1)!}{(n+1)!(n+2)\cdot 3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(n+2)}=0.$$

Так как предел меньше 1, то ряд из модулей сходится и, следовательно, исходный ряд сходится ***абсолютно.***

Практикум к главе 1. Числовые ряды

Сумма ряда. Необходимый признак сходимости

1.1. Записать первых пять членов ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{(n+1)!}$.

Решение. Подставляя в общий член ряда последовательно значения 1,2,3,4,5, получим:

а) $u_1=\dfrac{1}{1\cdot 3}$; $u_2=\dfrac{1}{2\cdot 4}$; $u_3=\dfrac{1}{3\cdot 5}$; $u_4=\dfrac{1}{4\cdot 6}$; $u_5=\dfrac{1}{5\cdot 7}$.

Итак, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots$.

б) Аналогично имеем:

$$u_1=\frac{(-1)^1}{1^2}=-1;\quad u_2=\frac{(-1)^2}{2^2}=\frac{1}{2^2};\quad u_3=\frac{(-1)^3}{3^2}=-\frac{1}{3^2};$$

$$u_4=\frac{(-1)^4}{4^2}=\frac{1}{4^2};\quad u_5=\frac{(-1)^5}{5^2}=-\frac{1}{5^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\ldots\ .$$

в) $u_1=\dfrac{1}{2!}$; $u_2=\dfrac{3}{3!}$; $u_3=\dfrac{5}{4!}$; $u_4=\dfrac{7}{5!}$; $u_5=\dfrac{9}{6!}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n+1)!}=\frac{1}{2!}+\frac{3}{3!}+\frac{5}{4!}+\frac{7}{5!}+\frac{9}{6!}+\ldots\ .$$

1.2. Найти частичную сумму ряда S_n : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Решение. Разложим общий член ряда на элементарные дроби, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов:

$$u_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю и, приравнивая числители, имеем:

$1=A(n+2)+B(n+1)$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных, получим:

$$\begin{array}{l} n\ : \\ n^0 : \end{array}\left|\begin{cases} A+B=0, \\ 2A+B=1, \end{cases}\right.\Rightarrow\begin{cases} A=-B, \\ -2B+B=1, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=1, \\ B=-1. \end{cases}$$

Таким образом, $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

Запишем n -ю частичную сумму:

$$S_n = \left(\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{u_1} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{u_2} + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}_{u_3} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}_{u_n} \right).$$

Уничтожив соответствующие слагаемые, получим: $S_n = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2} \right)$.

1.3. Найти: а) частичную сумму S_n и сумму ряда; б) доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{n^2 + 5n + 4}$.

Решение.

а) Разложим общий член ряда на элементарные дроби, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов:

$$u_n = \frac{3}{n^2+5n+4} = \frac{3}{(n+1)(n+4)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+4}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю и, приравнивая числители, имеем:

$3 = A(n+4) + B(n+1)$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных, получим:

$$\begin{array}{l} n \ : \\ n^0 : \end{array}\left|\begin{cases} A + B = 0, \\ 4A + B = 3, \end{cases}\right. \Rightarrow \begin{cases} A = -B, \\ -4B + B = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -1. \end{cases}$$

Таким образом, $u_n = \dfrac{3}{n^2 + 5n + 4} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+4}$.

Запишем n -ю частичную сумму:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \ldots + u_{n-4} + u_{n-3} + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}_{u_1} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{u_2} + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{7}}_{u_3} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{8}}_{u_4} + \underbrace{\frac{1}{6} - \frac{1}{9}}_{u_5} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{10}}_{u_6} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n}}_{u_{n-4}} + \underbrace{\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1}}_{u_{n-3}} + .$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}}_{u_{n-2}} + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}}_{u_{n-1}} + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4}}_{u_n}.$$

Уничтожив соответствующие слагаемые, получим:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}..$$

б) Вычислим сумму ряда:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)=\frac{13}{12}.$$

Так как предел последовательности частичных сумм существует и конечен, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+5n+4}$ сходится.

1.4. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{6^n}$, доказать сходимость.

Решение. Перепишем ряд в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{6^n}+\frac{5^n}{6^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Найдем сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Это ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{3}$. Его сумма равна:

$$S_1=\frac{b}{1-q}=\frac{1/3}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Аналогично найдем сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$, который также образует ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{5}{6}$:

$$S_2=\frac{b}{1-q}=\frac{5/6}{1-\frac{5}{6}}=5.$$

Тогда, согласно свойству 2^0 числовых рядов, сумма исходного ряда равна:

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}+5=\frac{11}{2}.$$

Так как сумма ряда равна конечному числу, то ряд сходится.

1.5. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+8n}{9n^2-1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{\ln(n+1)}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}}$;

Решение.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)$.

1. Запишем общий член ряда $u_n=(2n+1)$.

2. Найдем предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(2n+1) = \infty \neq 0.$

3. Так как необходимый признак сходимости не выполняется, ряд расходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$.

1. Запишем n -й член ряда $u_n = \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$.

2. Найдем предел общего члена ряда:

$$g = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+2}{n+1}-1\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+2-n-1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+1}\cdot n} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}} = e^1 = e \neq 0.$$

3. Так как $g = e \neq 0$, то ряд расходится.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^2+8n}{9n^2-1}$.

1. Запишем n -й член ряда $u_n = \dfrac{3n^2+8n}{9n^2-1}$.

2. Найдем предел общего члена ряда:

$$g = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+8n}{9n^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n^2}{n^2}+\dfrac{8n}{n^2}}{\dfrac{9n^2}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{8}{n}}{9-\dfrac{1}{n^2}} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

3. Так как $g = \dfrac{1}{3} \neq 0$, то ряд расходится.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+4}{\ln(n+1)}$.

1. Запишем n -й член ряда $u_n = \dfrac{n+4}{\ln(n+1)}$.

2. Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{\ln(n+1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left|\begin{matrix}\textit{применим}\\ \textit{правило}\quad\textit{Лопиталя}\end{matrix}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)'}{(\ln(n+1))'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \neq 0.$$

3. Так как $g = \infty \neq 0$, то ряд расходится.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}}$.

1. Запишем n -й член ряда $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}}$.

2. Найдем предел общего члена ряда: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}} = 0$.

3. Необходимый признак сходимости выполняется, ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся, т. е. ряд следует исследовать дополнительно, используя достаточные признаки сходимости.

Исследование сходимости рядов с помощью признаков сравнения

1.6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n-2)}}$, применяя признак сравнения.

Решение. Следуя алгоритму, имеем:

1. Найдем предел общего члена: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n-2)}} = 0$, т. е. необходимое условие сходимости выполнено.

2. Так как в знаменателе общего члена данного ряда $\dfrac{1}{\sqrt{n^2}} = \dfrac{1}{n^1}$ старшая степень равна 1, то в качестве эталонного ряда возьмем расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

3. Так как $\dfrac{1}{\sqrt{n(n-2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-2n}} > \dfrac{1}{n}$ для всех членов, начиная с $n = 3$, т. е. члены исследуемого ряда больше соответствующих членов расходящегося ряда, то по первому признаку сравнения из расходимости меньшего ряда следует расходимость большего ряда. Поэтому исследуемый ряд также расходится.

1.7. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3+7}}$, применяя признак сравнения.

Решение. Следуя алгоритму, имеем:

1. Найдем предел общего члена. Так как $|\sin n| \le 1$, то $|\sin^2 n| \le 1$, т.е. $\sin^2 n$ – ограниченная функция, а $\dfrac{1}{\sqrt{n^3+7}}$ – бесконечно малая при $n \to \infty$. Тогда по свойству 2^0 бесконечно малых функций (см. [11], § 2.2) произведение ограниченной функции на бесконечно малую, есть функция бесконечно малая, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3+7}} = 0$. Необходимое условие выполнено.

2. Так как в знаменателе общего члена данного ряда старшая степень переменной равна $\frac{3}{2}$, то в качестве эталонного ряда возьмем сходящийся гармонический ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ $(\alpha=\frac{3}{2}>1)$.

3. Тогда $\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n^3+7}}\le\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, т. е. члены исследуемого ряда меньше соответствующих членов сходящегося ряда, значит, и данный ряд тоже сходится.

1.8. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2n+1)}$, применяя признак сравнения.

Решение.

1. Найдем предел общего члена:

$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(2n+1)}=0,$ так как $\lim_{n\to\infty}\ln(2n+1)=\ln\infty=\infty$. Необходимое условие выполнено.

2. В качестве эталонного ряда возьмем расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

3. Сравним общий член ряда $\frac{1}{\ln(2n+1)}$ с общим членом гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$\frac{1}{\ln(2n+1)}>\frac{1}{n}$ для всех членов, начиная с $n=2$. Так как члены исследуемого ряда больше соответствующих членов расходящегося гармонического ряда, то по первому признаку сравнения исходный ряд также расходится.

1.9. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n^2-3}{5n^3(n-1)}$, применяя признак сравнения.

Решение. Используя алгоритм, предложенный в § 1.5, имеем:

1. Найдем предел общего члена:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3}{5n^3(n-1)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^4}-\frac{3}{n^4}}{\frac{5n^4}{n^4}-\frac{5n^3}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^4}}{5-\frac{5}{n}}=0,$$

т. е. необходимое условие сходимости выполнено.

2. Так как старшая степень многочлена числителя 2, а старшая степень многочлена знаменателя равна 4, поэтому, $\alpha=4-2=2$. Таким образом, наш ряд

нужно сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который является сходящимся обобщенным гармоническим рядом, так как для него $\alpha=2>1$.

3. Применим предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3}{5n^3(n-1)}:\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4-3n^2}{5n^4-5n^3}=\frac{2}{5}\neq 0.$$

Получили отличный от нуля предел, следовательно, по предельному признаку исходный ряд сходится.

1.10. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{(3n^2+1)^5}}$, применяя предельный признак сравнения.

Решение.

1. Найдем предел общего члена:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{(3n^2+1)^5}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{array}{l}\textit{применим}\\ \textit{правило Лопиталя}\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n'}{\left(\sqrt[3]{(3n^2+1)^5}\right)'}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{30n\sqrt[3]{(3n^2+1)^2}}=0.$$

Необходимое условие выполнено.

2. Выберем «эталонный» ряд для сравнения. Старшая степень знаменателя: $\left(\left(n^2\right)^5\right)^{\frac{1}{3}}=n^{\frac{10}{3}}$. Старшая степень числителя 1. Из старшей степени знаменателя вычитаем старшую степень числителя: $\frac{10}{3}-1=\frac{7}{3}$. Таким образом, наш ряд нужно сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{7}{3}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^7}}$, который является сходящимся обобщенным гармоническим рядом, так как для него $\alpha=\frac{7}{3}>1$.

3. Применим предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{\sqrt[3]{(3n^2+1)^5}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^7}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^3\cdot n^7}{(3n^2+1)^5}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^{10}}{(3n^2+1)^5}}=\sqrt[3]{\frac{1}{3^5}}\neq 0.$$

Данный ряд сходится.

1.11. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^2\frac{1}{\sqrt{n}}$, применяя предельный признак сравнения.

Решение.

1. Найдем предел общего члена: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \arcsin^2 \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Необходимый признак сходимости выполняется.

2. Из таблицы эквивалентностей (см. § 1.5) имеем: $arc\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$. Тогда, $arc\sin^2\frac{1}{\sqrt{n}} = \left(arc\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \sim \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n}$.

Поэтому для сравнения возьмём расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

3. Применим предельный признак сравнения, использовав первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{arc\sin\alpha}{\alpha} = 1$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{arc\sin^2\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{arc\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^2 = 1 \neq 0.$$

Так как гармонический ряд является расходящимся, то по предельному признаку исследуемый ряд так же расходится.

1.12. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$, применяя предельный признак сравнения.

Решение. По алгоритму имеем:

1. $$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n} = (\infty\cdot 0) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Здесь использована эквивалентность $\sin\alpha \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$. Необходимый признак сходимости выполняется.

2. Выберем эталонный ряд для сравнения. Так как $2^n \sin\frac{1}{3^n} \sim 2^n\cdot\frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, то для сравнения возьмём сходящийся ряд геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(q = \frac{2}{3} < 1\right).$$

3. Применим предельный признак сравнения, использовав первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{1}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{1}{3^n}}{2^n\cdot\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}}=1\neq 0.$$

Так как ряд геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ – сходящийся, то по предельному признаку сравнения исходный ряд также сходится.

Исследование сходимости рядов с помощью признака Даламбера

1.13. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$, используя признак Даламбера.

Решение. Применим предложенный алгоритм:

1. Выпишем n-й член ряда: $u_n=\frac{n^3}{(n+1)!}$.

2. Найдем $(n+1)$-й член ряда: $u_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{(n+2)!}=\frac{(n+1)^3}{(n+1)!(n+2)}$.

3. Запишем отношение и упростим полученное выражение:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^3\cdot(n+1)!}{(n+1)!\cdot(n+2)\cdot n^3}=\frac{(n+1)^3}{n^3(n+2)}=\frac{(n+1)^3}{n^4+2n^3}.$$

4. Вычислим предел:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^4+2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^4+2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{n^4}+\frac{3n^2}{n^4}+\frac{3n}{n^4}+\frac{1}{n^4}}{\frac{n^4}{n^4}+\frac{2n^3}{n^4}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{2}{n}}=0.$$

5. Так как $l=0<1$, то, согласно признаку Даламбера, ряд сходится.

1.14. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, используя признак Даламбера.

Решение. Применим предложенный алгоритм:

1. Выпишем n-й член ряда: $u_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

2. Найдем $(n+1)$-й член ряда:

$$u_{n+1}=\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2(n+1))!}=\frac{\left((n!)(n+1)\right)^2}{(2n+2)!}=\frac{(n!)^2(n+1)^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}.$$

3. Запишем отношение и упростим полученное выражение:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n!)^2(n+1)^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}:\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{(n!)^2(n+1)^2(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}.$$

4. Вычислим предел, используя правило раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (см. [11], § 2.6):

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}.$$

5. Так как $l=\frac{1}{4}<1$, то, согласно признаку Даламбера, ряд сходится.

1.15. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2\cdot7\cdot12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$, используя признак Даламбера.

Решение. Применим предложенный алгоритм:

1. Выпишем n-й член ряда: $u_n=\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2\cdot7\cdot12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$.

2. Найдем $(n+1)$-й член ряда: $u_{n+1}=\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot(3n+1)}{2\cdot7\cdot12\cdot\ldots\cdot(5n-3)\cdot(5n+2)}$.

3. Запишем отношение и упростим полученное выражение:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot(3n+1)\cdot}{2\cdot7\cdot12\cdot\ldots\cdot(5n-3)\cdot(5n+2)\cdot}\frac{2\cdot7\cdot12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}=\frac{(3n+1)}{(5n+2)}.$$

4. Вычислим предел: $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+1)}{(5n+2)}=\frac{3}{5}$.

5. Так как $l=\frac{3}{5}<1$, то, согласно признаку Даламбера, ряд сходится.

1.16. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$, используя признак Даламбера.

Решение. Применим предложенный алгоритм:

1. Выпишем n-й член ряда: $u_n=\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

2. Найдем $(n+1)$-й член ряда: $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{2^n\cdot2\cdot n!\cdot(n+1)}{(n+1)^n\cdot(n+1)}$.

3. Запишем отношение и упростим полученное выражение:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^n\cdot 2\cdot n!\cdot(n+1)}{(n+1)^n\cdot(n+1)}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}=\frac{2n^n}{(n+1)^n}=2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

4. Вычислим предел, используя второй замечательный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ (см. [11], § 2.4):

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n+1}-1\right)^n=2\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{1}{n+1}\cdot n}=$$

$$=2\cdot e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}}=2\cdot e^{-1}=\frac{2}{e}.$$

5. Так как $l=\frac{2}{e}<1$, то, согласно признаку Даламбера, ряд сходится.

1.17. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n^2+n+1}$, используя признак Даламбера.

Решение. Применим предложенный алгоритм:

1. Выпишем n-й член ряда: $u_n=\frac{(n-1)!}{n^2+n+1}$.

2. Найдем $(n+1)$-й член ряда: $u_{n+1}=\frac{n!}{(n+1)^2+n+2}=\frac{n!}{n^2+3n+3}$.

3. Запишем отношение и упростим полученное выражение:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n!}{n^2+3n+3}:\frac{(n-1)!}{n^2+n+1}=\frac{(n-1)!\cdot n}{n^2+3n+3}\cdot\frac{n^2+n+1}{(n-1)!}=\frac{n^3+n^2+n}{n^2+3n+3}.$$

4. Вычислим предел:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+n}{n^2+3n+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{n^3}+\frac{n^2}{n^3}+\frac{n}{n^3}}{\frac{n^2}{n^3}+3\frac{n}{n^3}+\frac{3}{n^3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

5. Так как $l=\infty$, то, согласно признаку Даламбера, ряд расходится.

Исследование сходимости рядов с помощью радикального признака Коши

1.18. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$, используя радикальный признак Коши.

Решение. По алгоритму имеем:

1. $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^n}$.

2. $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{(\ln n)^n}} = \dfrac{1}{\ln n}$.

3. $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n} = \dfrac{1}{\infty} = 0$.

4. Этот ряд сходится по радикальному признаку Коши, так как $l = 0 < 1$.

1.19. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n$, используя радикальный признак Коши.

Решение. По алгоритму имеем:

1. $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n$.

2. $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^n} = \dfrac{n+1}{2n+3}$.

3. $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{1}{2}$.

4. Этот ряд сходится по радикальному признаку Коши, так как $l = \dfrac{1}{2} < 1$.

1.20. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\dfrac{2n}{3n+5}\right)^n$, используя радикальный признак Коши.

Решение. По алгоритму имеем:

1. $u_n = 4^n \left(\dfrac{2n}{3n+5}\right)^n$.

2. $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{4^n \left(\dfrac{2n}{3n+5}\right)^n} = 4 \cdot \dfrac{2n}{3n+5}$.

3. $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 4 \cdot \dfrac{2n}{3n+5} = 4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{3n+5} = 4 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$.

4. Этот ряд расходится по радикальному признаку Коши, так как $l = \dfrac{8}{3} > 1$.

1.21. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-4}\right)^{3n^3}$, используя радикальный признак Коши.

Решение. По алгоритму имеем (см. § 1.7):

1. $u_n=\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-4}\right)^{3n^3}$.

2. $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-4}\right)^{3n^3}}=\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-4}\right)^{3n^2}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-4}\right)^{3n^2}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2n^2+1}{2n^2-4}-1\right)^{3n^2}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{2n^2-4}\right)^{\frac{2n^2-4}{5}}\right]^{\frac{5}{2n^2-4}\cdot 3n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15n^2}{2n^2-4}}=e^{\frac{15}{2}}.$$

4. Этот ряд расходится по радикальному признаку Коши, так как $l=e^{\frac{15}{2}}>1$.

1.22. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\dfrac{1}{n}$, используя радикальный признак Коши.

Решение. По алгоритму имеем:

1. $u_n=\arcsin^n\dfrac{1}{n}$;

2. $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\arcsin^n\dfrac{1}{n}}=\arcsin\dfrac{1}{n}$;

3. $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\arcsin\dfrac{1}{n}=0$.

4. Этот ряд сходится по радикальному признаку Коши, так как $l=0<1$.

Исследование сходимости рядов с помощью интегрального признака Коши

1.23. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$.

Решение. Следуя алгоритму (см. §1.8), имеем:

1. $u_n=\dfrac{1}{2n-1}$.

2. Введём в рассмотрение функцию $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$. Функция $f(x)$ на промежутке $[1;+\infty)$ является непрерывной, положительной и убывающей.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ и несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\dfrac{dx}{2x-1}$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

3. Исследуем интеграл на сходимость:

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{2x-1}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{2x-1}=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\frac{d(2x-1)}{2x-1}=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln|2x-1|\Big|_1^b=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(\ln(2b-1)-\ln 1)=+\infty\,.$$

Видим, что несобственный интеграл расходится, следовательно, расходится и исследуемый ряд.

1.24. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$.

Решение. 1. Выпишем общий член: $u_n=\frac{1}{n(n+3)}$;

2. Введём в рассмотрение функцию $f(x)=\frac{1}{x(x+3)}$. Как видно, функция $f(x)$ на промежутке $[1;\,+\infty)$ является непрерывной, положительной и убывающей.

3. Рассмотрим соответствующий несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x(x+3)}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x(x+3)}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\int\limits_2^{b}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\Big[\ln|x|-\ln|x+3|\Big]\Big|_1^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{x}{x+3}\right]\Bigg|_1^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{b}{b+3}-\ln\frac{1}{4}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[\ln 1-\ln\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{3}\ln 4=\ln\sqrt[3]{4}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то по интегральному признаку Коши сходится и исследуемый ряд.

1.25. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Решение. Следуя алгоритму, имеем:

1. $u_n=\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

2. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

3. Найдем соответствующий несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}=-2\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}e^{-\sqrt{x}}d(-\sqrt{x})=-2\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-\sqrt{x}}\right)\Big|_1^b=-2\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{e^{\sqrt{b}}}-\frac{1}{e}\right]=\frac{2}{e}.$$

Как видим, несобственный интеграл сходится, следовательно, по интегральному признаку Коши сходится и исследуемый ряд.

1.26. Исследовать на сходимость числовой ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Решение. Следуя алгоритму, имеем:

1. $u_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

2. Рассмотрим функцию: $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$.

3. Найдем соответствующий несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \ln^{-2}(x+1)d(\ln(x+1)) =$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(x+1)}\Bigg|_1^b = -\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln(b+1)} - \frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится, следовательно, по интегральному признаку Коши сходится и исследуемый ряд.

1.27. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^4+1}$.

Решение. Следуя алгоритму, имеем:

1. $u_n = \dfrac{n}{n^4+1}$.

2. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x}{x^4+1}$.

3. Найдем соответствующий несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{xdx}{x^4+1} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\int_1^b \frac{d(x^2)}{\left(x^2\right)^2+1} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} arctgx^2\Big|_1^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[arctgb^2 - arctg1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{8}.$$

Как видим, несобственный интеграл сходится, следовательно, по интегральному признаку Коши сходится и исследуемый ряд.

Исследование сходимости знакочередующихся и знакопеременных рядов

1.28. Исследовать сходимость ряда^ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{2n+1}}$.

Решение. Распишем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{2n+1}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2\sqrt{5}} - \dfrac{1}{3\sqrt{7}} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{2n+1}} + \ldots$

Это ряд знакочередующийся, поэтому начнем с признака Лейбница.

По алгоритму (см. § 1.9), имеем:

1. 1) $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2\sqrt{5}} > \frac{1}{3\sqrt{7}} > ... > \frac{1}{n\sqrt{2n+1}} > ...$ (абсолютные величины членов ряда монотонно убывают); 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{2n+1}} = 0$.

Так как условия признака Лейбница выполняются, то ряд сходится.

2. Выясним характер сходимости ряда. Для этого составим ряд из абсолютных величин членов ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n\sqrt{2n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{2n+1}}.$$

К этому ряду применим признак сравнения. Возьмем эталонный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, который является сходящимся обобщенным гармоническим рядом, так как для него $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

Так как $\frac{1}{n\sqrt{2n+1}} \le \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, т. е. члены исследуемого ряда меньше соответствующих членов сходящегося ряда, то данный ряд тоже сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{2n+1}}$ сходится абсолютно.

1.29. Исследовать на сходимость ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n+2}{7n+1}$.

Решение. Нетрудно показать, что для данного ряда не выполнен необходимый признак сходимости. В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{7n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{7n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{7+\frac{1}{n}} = \frac{3}{7} \ne 0.$$

Следовательно, ряд расходится.

1.30. Исследовать сходимость ряда:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+....+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}+... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Решение. Это знакочередующийся ряд. По алгоритму имеем:

1. Проверим условия признака Лейбница:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{6}} > .... > \frac{1}{\sqrt{n+1}} > ...$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Оба условия признака Лейбница выполняются. Ряд сходится по признаку Лейбница.

2. Выясним характер сходимости ряда. Для этого составим ряд из абсолютных величин членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

К этому ряду применим предельный признак сравнения. Для сравнения возьмем эталонный ряд $v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, который является расходящимся обобщенным гармоническим рядом, так как для него $\alpha=\frac{1}{2}<1$. Найдем предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}:\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=1\neq 0.$$

Получили отличный от нуля предел. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ сходится условно.

1.31. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^n$.

Решение. Соответствующим данному ряду рядом с положительными членами является ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^n$. Проверим его сходимость с помощью радикального признака Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n-1}=\frac{2}{3}<1.$$

Так как предел меньше 1, то ряд из модулей сходится и, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

1.32. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{\sqrt[4]{n^5+1}}$.

Решение. Данный ряд знакопеременный. Исследуем его на абсолютную сходимость.

Составим ряд из абсолютных величин членов ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin 2n}{\sqrt[4]{n^5+1}}\right|$.

Так как $|\sin 2n| \le 1$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin 2n}{\sqrt[4]{n^5+1}}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5+1}}$. К ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5+1}}$ применим признак сравнения. Сравним его со сходящимся обобщенным гармоническим рядом: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}(\alpha = \frac{5}{4} > 1)$. Так как $\frac{1}{\sqrt[4]{n^5+1}} \le \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$, то первому признаку сравнения следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5+1}}$, а следовательно, и ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{\sqrt[4]{n^5+1}}$.

1.33. Исследовать сходимость ряда:

$$-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}-...+(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{3^n}+... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{3^n}.$$

Решение. В данном ряде за двумя отрицательными членами следуют два положительных. Данный ряд – также знакочередующийся.

1. Выясним, выполняются ли условия признака Лейбница:

1) $\frac{1}{3} > \frac{2}{9} > \frac{3}{27} > \frac{4}{81} > ... > \frac{n}{3^n} > ....$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left|\begin{matrix}\textit{применим правило}\\ \textit{Лопиталя}\end{matrix}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n)'}{(3^n)'} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n\ln 3} = 0.$

Оба условия признака Лейбница выполняются. Ряд сходится по признаку Лейбница.

2. Выясним характер сходимости ряда. Для этого составим ряд из абсолютных величин членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{3^n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}.$$

К этому ряду применим признак Даламбера:

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ сходится по признаку Даламбера. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Задания для самостоятельного решения к главе 1

1.34. Пользуясь непосредственно определением, исследовать сходимость ряда и найти его сумму, если ряд сходится:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{3}\right)^{n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{7^{n}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{8^{n}}$.

1.35. Исследовать сходимость рядов, применяя необходимый признак сходимости:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5n-4}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}\sin\frac{1}{n^{2}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{2n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{n}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{n^{2}+1}{n+3}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10-n^{2}}{2n-5n^{2}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{3n+1}\right)^{n}$.

1.36. Исследовать сходимость рядов, применяя признаки сравнения:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n-1}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n}+n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n}}{n+5^{2n}}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^{3}}{n^{5}+4}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^{n}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{n(1+3^{n})}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\sqrt{n^{2}+1}}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3^{n}}{3^{n}}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^{n}+n^{2}}$;

12) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+2}{(n^{3}-1)^{2}}$; 13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^{2}}{n^{4}+3n^{2}+2}$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{\sqrt{n^{3}+2n^{2}+6}}$;; 15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^{6}+2n-2}}$; 16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\ln\frac{n+1}{n}$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin n}{n}$.

1.36. Исследовать сходимость рядов, применяя признак Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^{n}(2n-1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4}}{5^{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{n}}{n^{7}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{3^{n}n!}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{2^{n}n!}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3^{n}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{n!}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{5}}{4^{n+1}}$. 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}3^{n}}$; 11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(3n+4)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n+3)}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$.

1.37. Исследовать сходимость рядов, применяя признак Коши:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{2}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+4}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{n+\sqrt{n}+5}\right)^{n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^{2}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^{2}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^{n}\frac{1}{n}$;

7) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{5^{n}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^{2}}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{2}\right)^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{(2n+1)^{n}}$.

1.38. Исследовать сходимость рядов, применяя интегральный признак Коши:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10}{3+n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+5}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$.

1.39. Исследовать сходимость рядов. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n^3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{7^n\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+2^n}$;) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3^n+1)}{n\cdot 3^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{e^{n+1}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{5n+1}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3+2}}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)^3}{3^{n-1}}$; 10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{n!\cdot 4^n}$;

11) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln n}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{2^n}$.

Глава 2
СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенные ряды, благодаря их простоте и замечательным свойствам, нашли применение во всех разделах математики, физики и других наук.

Степенной ряд дает возможность представить любую аналитическую функцию в виде бесконечной суммы простых функций, что часто является единственной возможностью при решении дифференциальных уравнений.

Часто бывает удобно разложить ту или иную функцию в степенной ряд.

Нередко ставится такая задача: пусть дана функция $f(x)$. Найти такой степенной ряд, сумма которого есть функция $f(x)$.

В 1676 г. в письме И. Ньютона к секретарю Лондонского Королевского Общества появилась формула, которая известна как формула бинома Ньютона. Развивая его идею, английский математик Брук Тейлор[9] (1685–1731) в 1715 г. доказал, что любой функции, имеющей в точке x_0 производные всех порядков, можно сопоставить ряд. Колин Маклорен (1698–1746) в работе «Трактат о флюксиях» (1742) установил, что степенной ряд, выражающий функцию, – единственный, и это будет ряд Тейлора, порожденный такой функцией.

Целью настоящей главы является изложение теории степенных рядов, их применения в доступной и краткой форме для студентов бакалавриата.

В результате изучения материала главы 2 студент должен:

Знать

- понятие степенных рядов;
- свойства степенных рядов;
- определение интервала сходимости;
- нахождение радиуса сходимости;
- ряды Тейлора и Маклорена;
- разложения основных элементарных функций в ряды Маклорена.

Уметь

- находить интервал и радиус сходимости степенных рядов;
- исследовать сходимость на концах интервала;
- разлагать функции в ряды Тейлора и Маклорена;
- применять свойства степенных рядов для разложения функций в ряды Тейлора и Маклорена;
- применять ряды к приближенному вычислению определенных интегралов.

---

[9] Брук Тейлор (1685–1731) – английский математик.

Владеть

- навыками по разложению функций в степенные ряды;
- инструментарием нахождения интервалов сходимости степенных рядов;
- практическими навыками применения степенных рядов к вычислению определенных интегралов.

2.1. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Перейдем к изучению рядов, членами которых являются не числа, а функции, зависящие от переменной x:

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x). \tag{1}$$

Например, $\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+\ldots+\frac{1}{n}\cos nx+\ldots$

Такие ряды называются ***функциональными.*** Придавая x числовое значение x_0 из области определения функций $u_n(x)$, получим числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots, \tag{2}$$

который может быть, как сходящимся, так и расходящимся. Если он сходится, то точка x_0 называется ***точкой сходимости*** функционального ряда (1). Если при $x=x_0$ ряд (2) расходится, то точка x_0 называется ***точкой расходимости*** функционального ряда.

Таким образом, придавая x различные числовые значения, получим соответствующие числовые ряды. Исследуя каждый из них на сходимость с помощью признаков, данных в главе 1, установим те точки, в которых эти ряды сходятся, т. е. точки их сходимости.

Определение 1. Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется ***его областью сходимости***.

Частным случаем функциональных рядов являются степенные ряды.

Определение 2. ***Степенным рядом*** называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots, \tag{3}$$

где $C_0,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n,\ldots$ – постоянные вещественные числа, называемые ***коэффициентами ряда.*** Говорят, что ряд (3) расположен по степеням x.

Выясним вопрос о сходимости степенного ряда (3). Область сходимости степенного ряда (3) содержит, по крайней мере, одну точку $x=0$, так как при $x=0$ получается числовой ряд: $C_0+0+0+\ldots+0+\ldots$.

Об области сходимости степенного ряда (3) можно судить исходя из следующей теоремы:

Теорема Абеля.[1] Если степенной ряд (3) сходится в точке $x = x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

Доказательство. По условию ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x_0^n$ сходится. Следовательно, по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} C_n x_0^n = 0$. Отсюда по определению предела следует, что для любого $M > 0$, начиная с некоторого $n > N$, выполняется неравенство: $\left|C_n x_0^n\right| \leq M$.

Пусть $|x| < |x_0|$, обозначим $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right|$ и тогда $q < 1$.

Преобразуем общий член ряда следующим образом, учитывая наши обозначения: $\left|C_n x^n\right| = \left|C_n x_0^n\right| \cdot \left|\dfrac{x^n}{x_0^n}\right| \leq M \cdot q^n, \quad n = 0,1,2,...$,

т. е. модуль каждого члена ряда (3) не превосходит соответствующего члена сходящегося $(q < 1)$ ряда геометрической прогрессии. Поэтому по признаку сравнения при $|x| < |x_0|$ ряд (3) будет абсолютно сходящимся.

Следствие 1. Если степенной ряд расходится при некотором значении $x = x_1$, то он расходится и при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

Доказательство. Действительно, если допустить сходимость ряда в точке x_2, для которой $|x_2| > |x_1|$, то по теореме Абеля ряд сходится при всех x, для которых $|x| < |x_2|$, и, в частности, в точке x_1, что противоречит условию.

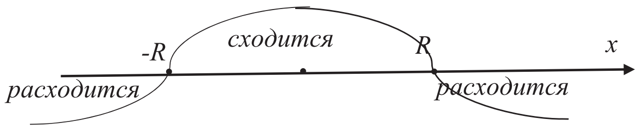
Из теоремы Абеля следует, что если $x_0 \neq 0$ – точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|;|x_0|)$ весь состоит из точек сходимости данного ряда; при всех значениях x вне этого интервала ряд (3) расходится.

Определение 3. Интервал $(-|x_0|;|x_0|)$ называют ***интервалом сходимости*** степенного ряда.

[1] Абель Нильс Генрик (1802–1829) – норвежский математик.

Если положить $|x_0| = R$, то интервал сходимости можно записать в виде $(-R;R)$.

Определение 4. Число R называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда, т. е. $R > 0$ – это такое число, что для всех x, для которых $|x| < R$, степенной ряд (3) абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.



Замечание 2. В частности, радиус сходимости может быть равен нулю, и тогда ряд сходится только в одной точке.

Замечание 3. При неограниченно большом радиусе $R = \infty$ ряд сходится на всей числовой оси.

При определении интервала сходимости обязательно необходимо проверить конечные точки интервала сходимости: $x = R$, $x = -R$.

Здесь могут возникнуть различные возможности: ряд может сходиться в обеих точках, или только в одной из них, или ни в одной. Вопрос о сходимости или расходимости на концах интервала решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

2.2. Нахождение радиуса сходимости степенного ряда

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (3) составим ряд из абсолютных величин его членов:

$$|C_0| + |C_1x| + |C_2x^2| + \ldots + |C_nx^n| + \ldots \tag{1}$$

и применим к нему признак Даламбера. Допустим, что существует предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|C_{n+1}x^{n+1}|}{|C_nx^n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|\cdot|x| = L\cdot|x|, \quad \text{где} \quad L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|.$$

По признаку Даламбера ряд сходится, если $L|x| < 1$, т. е. ряд сходится при тех значениях x, для которых $|x| < \frac{1}{L}$. Обозначим $\frac{1}{L} = R$.

Значит радиусом сходимости ряда (3) является число:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|. \tag{2}$$

Таким образом, для нахождения радиуса сходимости ряда (1) по признаку Даламбера необходимо применить формулу (2).

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}}. \tag{3}$$

Алгоритм нахождения интервала сходимости степенного ряда
1. Найти радиус сходимости, пользуясь признаками Даламбера или Коши по соответствующим формулам (2), (3).
2. Проверить сходимость ряда на конце интервала сходимости при $x = -R$.
3. Проверить сходимость ряда на конце интервала сходимости при $x = R$.

Замечание. Если степенной ряд содержит не все степени x, то интервал сходимости ряда находят, непосредственно применяя признак Даламбера или признак Коши к степенному ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда.

Пример 1. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 5^n}$.

Решение.

1. Найдем радиус сходимости по формуле (2):

$$C_n = \frac{1}{n\cdot 5^n}; \quad C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot 5^{n+1}};$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 5^n} : \frac{1}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 5^n\cdot 5}{n\cdot 5^n}\right| = 5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n} = 5.$$

Интервалом сходимости будет интервал $(-5;5)$.

2. Проверим сходимость ряда на конце интервала сходимости при $x = -5$:

При $x = -5$ получим ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n\cdot 5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^n}{n\cdot 5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку Лейбница.

3. При $x = 5$ получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\cdot 5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, который расходится.

Итак, областью сходимости будет интервал $[-5;5)$.

Пример 2. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение.

1. Найдем радиус сходимости, используя формулу Даламбера (2):

$$C_n=\frac{1}{n!},\ C_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!},\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty .$$

Так как $R=\infty$, то степенной ряд сходится на всей числовой оси.

Пример 3. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)!x^n$.

Решение.

1. Для нахождения интервала сходимости найдем радиус сходимости по формуле (2):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0.$$

Так как $R=0$, то степенной ряд сходится лишь в одной точке $x=0$. .

Пример 4. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$.

Решение. Следуя алгоритму, имеем:

1. Радиус сходимости найдем по формуле Коши (3):

$$C_n=\frac{1}{2^n},\ R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|}}=2.$$

Интервалом сходимости будет интервал $(-2;2)$.

2. Проверим сходимость ряда на конце интервала сходимости при $x=-2$:

При $x=-2$ получим ряд: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-2)^n}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}1^n$, который расходится.

3. При $x=2$ получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, который также расходится.

Итак, областью сходимости будет интервал $(-2;2)$.

2.3. Степенные ряды по степеням $(x-x_0)$

Рассмотрим степенной ряд, расположенный по степеням $(x-x_0)$, т. е. ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\ldots+C_n(x-x_0)^n+\ldots, \qquad (1)$$

где x_0 – некоторое постоянное число.

Ряд (1) легко приводится к виду (3) параграфа 2.1, если положить $(x-x_0)=z$, тогда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots + C_n z^n + \ldots, \tag{2}$$

Поэтому при изучении степенных рядов можем ограничиться рассмотрением степенных рядов вида (2).

Соответственно, интервал сходимости степенного ряда (1) будет находиться из неравенства $|x - x_0| < R$, и примет вид: $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Сведем в таблицу 2 случаи нахождения интервала сходимости в зависимости от его радиуса.

Таблица 2 – Нахождение интервала сходимости

Значение радиуса	Интервал сходимости для ряда	
	$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$
$R = 0$	$x = 0$	$x = x_0$
$R > 0$	$(-R; R)$	$(x_0 - R; x_0 + R)$
$R = \infty$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$

Пример 1. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n}$.

Решение. Преобразуем общий член ряда: $u_n = \frac{(2x-1)^n}{5^n} = \frac{2^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^n}{5^n}$.

Следуя алгоритму, имеем:

1. Найдем радиус сходимости по формуле Коши:

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2}{5}\right)^n\right|}} = \frac{5}{2}.$$

Интервал сходимости находим по формуле $(x_0 - R; x_0 + R)$ (см. таблицу 2). Имеем: $\frac{1}{2} - \frac{5}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{5}{2}$ или $-2 < x < 3$ – интервал сходимости.

2. Исследуем ряд точке $x = -2$:

При $x = -2$ получаем знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \left(-2 - \frac{1}{2}\right)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Этот ряд расходится, так как последовательность частичных сумм $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, \ldots$ не имеет предела. При нечетном n (n=2k+1) мы получаем $S_n = 1$ и $S_n = 0$, при четном – n (n = 2k).

3. Исследуем ряд в точке $x=3$:

При $x=3$ получаем ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\left(3-\dfrac{1}{2}\right)^n}{5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1^n$. Ряд расходится, так как $S_n=n\to\infty$ при $n\to\infty$.

Итак, интервал сходимости – (–2; 3).

Пример 2. Найти интервал сходимости ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)!(x+1)^n$.

Решение. Для нахождения радиуса сходимости используем формулу Даламбера:

$C_n=(n+2)!$, $C_{n+1}=(n+3)!$,

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)!}{(n+3)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+2)!(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}=0.$$

Следовательно, данный степенной ряд сходится в одной точке $x=x_0=-1$.

Пример 3. Найти интервал сходимости ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n!}(x-3)^n$.

Решение. Следуя алгоритму, имеем:

1. Радиус сходимости найдем по формуле Даламбера:

$$C_n=\frac{(n+1)^2}{n!};\quad C_{n+1}=\frac{(n+2)^2}{(n+1)!},$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2\cdot(n+1)!}{n!(n+2)^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot n!\cdot(n+1)}{n!(n+2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{(n+2)^2}=\infty.$$

Так как $R=\infty$, то степенной ряд сходится на всей числовой оси (см. таблицу 2).

2.4. Свойства степенных рядов

1⁰. Степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости полученных рядов равен наименьшему из чисел R_1 и R_2

2⁰. Сумма $S(x)$ степенного ряда является непрерывной функцией внутри интервала сходимости этого ряда.

3⁰. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать; при этом для ряда

$$S(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots+C_nx^n+\ldots \qquad (1)$$

при $-R<x<R$ выполняется равенство:

$$S'(x)=C_1+2C_2x+3C_3x^2+\ldots+nC_nx^{n-1}+\ldots \qquad (2)$$

4⁰. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости; при этом для ряда $\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$ при $-R<a<x<R$ выполняется равенство:

$$\int_a^x S(t)dt=\int_a^x C_0dt+\int_a^x C_1tdt+\int_a^x C_2t^2dt+\int_a^x C_3t^3dt+\ldots+\int_a^x C_nt^ndt+\ldots\ . \qquad (3)$$

Ряды (2) и (3) имеют тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд.

Перечисленные свойства справедливы и для степенных рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(x-x_0\right)^n$.

Используя свойства степенных рядов, можно найти сумму степенного ряда.

Пример 1. Найти сумму ряда:

$$S(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots,\quad x\in(-1;1).$$

Решение. Дифференцируем данный ряд:

$S'(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+\ldots$ – это геометрический ряд, который сходится при $|x|<1$, причем сумма этого ряда равна: $S=\dfrac{b}{1-q}=\dfrac{1}{1-x}$, т. е.

$$S'(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+\ldots=\frac{1}{1-x}.$$

Интегрируем полученную функцию:

$$\int\frac{1}{1-x}dx=-\ln|1-x|+C.$$

Учитывая, что $S(0)=0,$ имеем: $C=0$.

В результате $S(x)=-\ln|1-x|$.

Пример 2. Применяя почленное интегрирование, найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ в интервале $(-1;1)$.

Решение. Введем обозначение: $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$.

Интегрируя это равенство на отрезке $[0;x]\in(-1;1)$, получим:

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n+1}\Big|_0^x=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}$ представляет собой геометрический ряд.

Используя формулу для вычисления суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}.$$

Так как $S(x)=\left(\int_0^x S(t)dt\right)'$, то дифференцируя последнее равенство по x, имеем:

$$S(x)=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}=\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}.$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{x(2-x)}{(1-x)^2},\quad x\in(-1;1)$.

2.5. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора, Маклорена

Как известно (см. [11], § 4.3), для любой функции $f(x)$, определенной в окрестности точки $x=x_0$, и имеющей в ней производные до (n+1)-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{1}$$

где

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)],\qquad 0<\theta<1 \text{ –} \tag{2}$$

остаточный член в форме Лагранжа. Формулу (1) кратко можно записать в виде:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x), \tag{3}$$

где $P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ – многочлен Тейлора.

Если функция $f(x)$ имеет производные любых порядков в окрестности точки x_0, то по формуле Тейлора получается разложение функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$.

При $n\to\infty$ и при условии, что остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю $(\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0)$, из многочлена Тейлора получается ряд, который называется ***рядом Тейлора***:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+... \quad . \quad (4)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0=0$, то получим частный случай ряда Тейлора, который называют ***рядом Маклорена:***

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad . \quad (5)$$

Ряд Тейлора можно формально построить для любой функции, имеющей в окрестности точки x_0 производные любого порядка.

Алгоритм разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена

Для разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена (5) нужно:

1) найти производные $f'(x), f''(x),..., f^{(n)}(x),...$;

2) вычислить значения производных в точке $x=0$;

3) написать ряд (5) для заданной функции;

4) найти его интервал сходимости.

2.6. Разложение в степенные ряды основных элементарных функций

1. **Разложение функции $f(x)=e^x$ в степенной ряд.**

Согласно алгоритму, приведённому в параграфе 2.5, имеем:

1) Найдем производные $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x,..., f^{(n)}(x)=e^x,...$;

2) Вычислим значения производных в точке $x=0$:

$f(0)=1, f'(0)=1, ..., f^{(n)}(0)=1,...$;

3) Напишем ряд (5) для заданной функции:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots; \qquad (1)$$

4) Найдем его интервал сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

т. е. ряд сходится в интервале $(-\infty;+\infty)$.

Если в разложении (1) заменить x на $(-x)$, то получаем:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (2)$$

2. **Разложение функции $f(x) = \sin x$ в степенной ряд**

1. Найдем производные: $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$;

$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$; $f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\frac{\pi}{2})$; **…,**

$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$;

2. $f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 0,2,4,6,\dots, \\ -1, & n = 3,7,11,\dots, \\ 1, & n = 1,5,9,\dots; \end{cases}$

3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$. (3)

4. Найдем его интервал сходимости, для этого воспользуемся формулой Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}(2n+3)!}\right| = |x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} = |x|^2\cdot 0 = 0 < 1$$

при любых $x \in (-\infty;+\infty)$.

Следовательно, ряд сходится в интервале $(-\infty;+\infty)$.

3. **Разложение функции $f(x) = \cos x$ в степенной ряд.** Разложение функции $\cos x$ можно было бы получить приемом, аналогичным тому, с помощью которого было получено разложение в ряд функции $\sin x$. Однако проще получить разложение функции $\cos x$, если почленно продифференцировать разложение $\sin x$:

$$(\sin x)' = (x)' - \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^5}{5!}\right)' - \left(\frac{x^7}{7!}\right)' + \cdots + \left((-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' + \cdots .$$

Следовательно,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \,. \qquad (4)$$

Это разложение справедливо на всей числовой оси.

4. Разложение функции $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, где $\alpha \in R$ в степенной ряд.

1. Дифференцируя, имеем:

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$

$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},$

....,

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, ...$

2. При $x = 0$ получаем:

$f(0) = 1, \quad f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \quad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), ...,$

$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1).$

3. Подставляя в формулу (5) параграфа 2.5, получим ряд Маклорена для функции $(1+x)^{\alpha}$:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + $$

$$+ \dots + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots \,. \qquad (5)$$

Этот ряд называется ***биномиальным***.

4. Найдем его интервал сходимости. Применим признак Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))\cdot(n+1)!}{n!\cdot\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))\cdot(\alpha-n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{(\alpha-n)}\right| = 1,$$

т. е. ряд сходится в интервале $(-1;1)$.

Выделим следующие частные случаи биномиального ряда:

1) при $\alpha = -1$, применяя формулу (5), получим:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \qquad x \in (-1;1).; \qquad (6)$$

2) при $\alpha = 1/2$ имеем:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}x}{1!} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3}{3!} + \dots$$

$$\dots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)x^n}{n!} + \dots,$$

или, после упрощений имеем:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2\cdot 1!} - \frac{1\cdot x^2}{2^2\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3x^3}{2^3\cdot 3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)x^n}{2^n\cdot n!} + \dots, \qquad (7)$$

$x \in [-1;1]$. ;

3) при $\alpha = -1/2$ аналогично получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1 \cdot x}{2 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^3}{2^3 \cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)x^n}{2^n \cdot n!} + \ldots, \qquad (8)$$

$x \in (-1;1]$.

5. Разложение функции $f(x) = \ln(1+x)$ в степенной ряд. Рассмотрим следующее тождество: $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$. Разложим подынтегральную функцию $\frac{1}{1+t}$ по формуле (6) в степенной ряд:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots ,$$

который сходится для всех значений $t \in (-1;1)$. Используя свойство 4^0 степенных рядов, проинтегрируем данный ряд на отрезке $[0;x]$, $x \in (-1;1)$:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x dt - \int_0^x t dt + \int_0^x t^2 dt - \int_0^x t^3 dt + \ldots + (-1)^n \int_0^x t^n dt + \ldots$$

или

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \ . \qquad (9)$$

Можно показать, что это равенство справедливо и для $x = 1$.

Заменяя в формуле (9) x на $(-x)$, получим:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \ldots \qquad (10)$$

6. Разложение функции $f(x) = arc\sin x$ в степенной ряд. Рассмотрим тождество $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Заменив в формуле (7) x на $(-x^2)$, разложим подынтегральную функцию $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ в степенной ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} t^6 + \ldots, \qquad t \in [-1;1] \ .$$

Тогда

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x dt + \int_0^x \frac{t^2}{2} dt + \int_0^x \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} t^4 dt + \int_0^x \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} t^6 dt + \ldots,$$

$$= t\Big|_0^x + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_0^x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{t^5}{5}\Big|_0^x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{t^7}{7}\Big|_0^x + \ldots = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Итак,

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,\ x\in[-1;1]\,. \qquad (11)$$

7. Разложение функции $f(x) = arctgx$ в степенной ряд. Рассмотрим тождество $arctgx = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. Разложим подынтегральную функцию $\frac{1}{1+t^2}$ в степенной ряд, воспользовавшись формулой (6):

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \ldots\,.$$

Этот ряд сходится для всех значений $t\in(-1;1)$. Следовательно,

$$arctgx = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots)dt =$$

$$= t\Big|_0^x - \frac{t^3}{3}\Big|_0^x + \frac{t^5}{5}\Big|_0^x - \frac{t^7}{7}\Big|_0^x + \ldots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\,.$$

Это разложение справедливо для всех значений $x\in(-1;1)$. Можно показать, что оно остается в силе и на концах интервала.

Итак, имеет место равенство:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,\ x\in[-1;1]\,. \qquad (12)$$

8. Разложение функций $f(x) = shx$ **и** $f(x) = chx$ **в степенной ряд**

Известны формулы (см [11], § 3.7):

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Разложение этих функций легко получается путем вычитания и сложения рядов (1) и (2) и деления на два.

Итак,

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots -\infty < x < +\infty \qquad (13)$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots -\infty < x < +\infty\,. \qquad (14)$$

Приведем конкретные разложения элементарных функций в ряд Маклорена в таблице 3:

Таблица 3 – Разложения некоторых элементарных функций в ряд Маклорена

№	Разложение функций	Область сходимости
1.	$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$	$-\infty < x < +\infty$
2.	$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	$-\infty < x < +\infty$
3.	$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	$-\infty < x < +\infty$
4.	$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+$ $+\cdots+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$	$-1 \le x \le 1,\ \alpha \ge 0,$ $-1 < x \le 1,\ -1 < \alpha < 0,$ $-1 < x < 1,\ \alpha \le -1$
5.	$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$	$-1 < x < 1$
6.	$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$	$-1 < x \le 1$
7.	$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$	$-1 \le x \le 1$
8.	$arctgx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$	$-1 \le x \le 1$
9.	$shx = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	$-\infty < x < +\infty$
10.	$chx = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$	$-\infty < x < +\infty$

Используя эти разложения, можно находить разложения других функций.

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\sin 3x$, используя разложения основных элементарных функций.

Решение. Заменив в формуле (3) разложения в ряд Маклорена функции $\sin x$ аргумент x на аргумент $3x$, получим искомое разложение:

$$\sin 3x = 3x-\frac{3^3x^3}{3!}+\frac{3^5x^5}{5!}-\frac{3^7x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots, -\infty < x < +\infty .$$

Пример 2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. Так как $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$, то используя формулы (9) и (10), получаем:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{n+1}+...\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...-\frac{x^{n+1}}{n+1}-...\right)=$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...\right).$$

Итак,

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...\right),\qquad x\in(-1;1).$$

2.7. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям определенных интегралов

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, для которого первообразная не выражается в элементарных функциях. Если подынтегральная функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд, а отрезок интегрирования $[a;b]$ принадлежит области сходимости этого ряда, то, по свойству 4^0 об интегрировании сходящегося степенного ряда, можно проинтегрировать почленно полученный сходящийся ряд в указанных пределах. А затем найти сумму нескольких первых членов, удовлетворяя заданной точности вычислений.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}dx,$ оставив три члена в разложении $\sin x.$

Решение. Интеграл вида $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}dx$ называют ***«интегральным синусом»***.

Используя разложение в ряд $\sin x,$ находим:

$$\frac{1}{x}\sin x=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...\right)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+...\ .$$

Поэтому,

$$\int\limits_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3!\cdot 3}+\frac{x^5}{5!\cdot 5}-\frac{x^7}{7!\cdot 7}+\cdots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3!\cdot 3}+\frac{1}{5!\cdot 5}-\frac{1}{7!\cdot 7}+\cdots\ .$$

Оставив три слагаемых, получим:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600} \approx 0,9461..$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, оставив три члена в разложении e^x.

Решение. Используем разложение в ряд функции e^x, и заменим x на $(-x^2)$. Запишем ряд Маклорена для нашей подынтегральной функции:

$$e^{-x^2} = 1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots,$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots\right)dx = \left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\cdots\right)\Bigg|_0^1 =$$

Оставив три слагаемых, получим:

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!\cdot 5} = 1-0,333+0,1 = 0,767.$$

Практикум к главе 2
Нахождение интервала сходимости рядов с помощью признака Даламбера

2.1. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^n}{\sqrt[3]{n+3}}$.

Решение.

1. Найдем радиус сходимости по формуле (2) параграфа 2.2:

$$C_n = \frac{4^n}{\sqrt[3]{n+3}}, \quad C_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{\sqrt[3]{n+4}},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^n}{\sqrt[3]{n+3}} : \frac{4^{n+1}}{\sqrt[3]{n+4}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^n}{\sqrt[3]{n+3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{n+4}}{4\cdot 4^n}\right| = \frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[3]{\frac{n+4}{n+3}}\right| = \frac{1}{4}.$$

Интервалом сходимости будет интервал $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

2. При $x=-\frac{1}{4}$ получим ряд: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{\sqrt[3]{n+3}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(-1)^n\frac{1}{4^n}}{\sqrt[3]{n+3}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+3}}$.. Это знакочередующийся ряд. Запишем его в развернутом виде:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}-...+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+3}}+...$$

Применим признак Лейбница:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}>\frac{1}{\sqrt[3]{5}}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+3}}=0.$

Признак Лейбница выполняется, следовательно, ряд сходится.

3. При $x=\frac{1}{4}$ получим ряд: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n\,\frac{1}{4^n}}{\sqrt[3]{n+3}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+3}}.$ Применим к этому ряду предельный признак сравнения, сравнив его с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+3}}:\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n+3}}=1\neq 0\,.$$

Получили конечный, отличный от нуля предел, следовательно, ряды ведут себя одинаково. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ расходится $\left(\alpha=\frac{1}{3}<1\right)$, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+3}}$. Следовательно, интервалом сходимости является интервал $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

2.2. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)\cdot 6^{n-2}}$.

Решение.

1. Найдем радиус сходимости по формуле Даламбера:

$$C_n=\frac{1}{(n+1)\cdot 6^{n-2}};\quad C_{n+1}=\frac{1}{(n+2)\cdot 6^{n-1}}=\frac{1}{(n+2)\cdot 6^{n-2}\cdot 6}\,,$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 6^{n-2}}:\frac{1}{(n+2)\cdot 6^{n-2}\cdot 6}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot 6^{n-2}\cdot 6}{(n+1)\cdot 6^{n-2}}=6\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{(n+1)}=6.$$

Интервал сходимости находим по формуле $(x_0-R;x_0+R)$ (см. таблицу 2 параграфа 2.3). Имеем: $-3-6<x<-3+6$ или $-9<x<3$ – интервал сходимости.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

2. При $x=-9$ получим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-9+3)^n}{(n+1)\cdot 6^{n-2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-6)^n}{(n+1)\cdot 6^{n-2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 6^n}{(n+1)\cdot 6^{n-2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 36}{n+1}=36\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Получили знакочередующийся ряд. Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ на сходимость, используя признак Лейбница:

1) $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots>\frac{1}{n+1}>\ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

Оба условия признака Лейбница выполнены, значит, данный ряд сходится.

3. Проверим сходимость ряда на конце интервала сходимости при $x=3$:

Имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+3)^n}{(n+1)\cdot 6^{n-2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(n+1)\cdot 6^{n-2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{36}{n+1}=36\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}.$$

Исследуем этот ряд на сходимость, применяя признак сравнения. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится.

По предельному признаку сравнения, имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)}:\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$. Получили конечный, отличный от нуля предел.

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}$ также расходится.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда является отрезок $[-9;3)$.

2.3. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x-7)^n}{3^{n-1}}$.

Решение. Для нахождения радиуса сходимости используем формулу Даламбера:

$$C_n=\frac{n!}{3^{n-1}};\quad C_{n+1}=\frac{(n+1)!}{3^{n+1-1}}=\frac{n!(n+1)}{3^{n-1}\cdot 3},\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{3^{n-1}}:\frac{n!(n+1)}{3^{n-1}\cdot 3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{3^{n-1}}\frac{3^{n-1}\cdot 3}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(n+1)}=0.$$

Следовательно, данный степенной ряд сходится в одной точке $x=x_0=7$.

2.4. Найти интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x+1)^n}{n!}$.

Решение. Для нахождения интервала сходимости найдем радиус сходимости по формуле Даламбера:

$$C_n=\frac{5^n}{n!};\quad C_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{5^n\cdot 5}{n!(n+1)},$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!}:\frac{5^n\cdot 5}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!}\cdot\frac{n!(n+1)}{5^n\cdot 5}=$$
$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Так как $R=\infty$, то интервалом сходимости степенного ряда является множество всех действительных чисел: $x\in(-\infty;+\infty)$.

Нахождение интервала сходимости рядов с помощью признака Коши

2.5. Найти интервал сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n(x+1)^n$.

Решение. Следуя алгоритму, имеем:

1. Найдем радиус сходимости по формуле Коши (3) (см. параграф 2.2):

$$C_n=\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n,\quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}=1.$$

Интервал сходимости находим по формуле $(x_0-R;x_0+R)$. Имеем: $-1-1<x<-1+1$ или $-2<x<0$ – интервал сходимости.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

2. При $x=-2$ получим ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n(-2+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$, который является знакочередующимся.

Этот ряд расходится, так как предел общего члена не равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n=\left(1^\infty\right)=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]}_{e}{}^{\frac{1}{2}}=e^{1/2}\neq 0.$$

3. При $x=0$ получим ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n(0+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$, который также расходится (по необходимому признаку сходимости).

Итак, интервалом сходимости будет $(-2;0)$.

2.6. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$.

Решение. Для нахождения радиуса сходимости используем формулу Коши:

$$C_n=n^n;,\quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Следовательно, данный степенной ряд сходится в одной точке $x = 0$.

2.7. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (x-1)^n}{(n+3)^n}$.

Решение. Для нахождения радиуса сходимости, используем формулу Коши:

$$C_n = \frac{2^n}{(n+3)^n};, \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{2^n}{(n+3)^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2} = \infty.$$

Так как $R = \infty$, то интервалом сходимости степенного ряда является множество всех действительных чисел: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

2.8. Найти сумму степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{4n}$ в интервале $(-1;1)$.

Решение. Обозначим $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{4n}$. Представим этот ряд в виде суммы двух рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{4n} + 3\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}.$$

Обозначим:

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{4n} = x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{4n-1}, \qquad S_2(x) = 3\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}.$$

1. Найдем сумму $S_1(x)$. Для этого проинтегрируем сумму $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{4n-1}$ на отрезке $[0;x] \subset (-1;1)$:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} nt^{4n-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x nt^{4n-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{4n}}{4n}\Bigg|_0^x = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + x^4 + \left(x^4\right)^2 + \left(x^4\right)^3 + \ldots + \left(x^4\right)^n + \ldots\right).$$

Получили ряд геометрической прогрессии. Используя формулу для вычисления суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеем:

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{4(1-x^4)}.$$

Продифференцируем обе части этого равенства по x:

$$\left(\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}\right)' = \left(\frac{1}{4(1-x^4)}\right)' \quad \text{отсюда} \quad \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} 4nx^{4n-1} = -\frac{(1-x^4)'}{4(1-x^4)^2}$$

или $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{4n-1} = \dfrac{x^3}{(1-x^4)^2}$.

Таким образом, $S_1(x) = x \cdot \dfrac{x^3}{(1-x^4)^2} = \dfrac{x^4}{(1-x^4)^2}$.

2. Найдем сумму $S_2(x)$:

$$S_2(x) = 3\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = 3\left(1 + x^4 + (x^4)^2 + \ldots + (x^4)^n + \ldots\right) = \frac{3}{1-x^4}.$$

Итак, в результате получаем:

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x) = \frac{x^4}{(1-x^4)^2} + \frac{3}{(1-x^4)} = \frac{3-2x^4}{(1-x^4)^2}.$$

2.9. Найти сумму ряда: $S(x) = x + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots, \quad x \in (-1;1).$

Решение. Продифференцируем данный ряд:

$S'(x) = 1 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots + x^{4n} + \ldots$ –

это геометрический ряд, сходящийся при $|x| < 1$, причем, $S(x) = \dfrac{b}{1-q} = \dfrac{1}{1-x^4}$, т. е.

$$S'(x) = 1 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots + x^{4n} + \ldots = \frac{1}{1-x^4}.$$

Проинтегрируем полученную функцию:

$$\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{2}arctgx + C.$$

Учитывая, что $S(0) = 0$, имеем $C = 0$.

В результате получим: $S(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + \dfrac{1}{2}arctgx.$

Разложение функций в ряд Маклорена

Пример 2.10. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\arccos x$.

Решение. Известно, что $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$. Отсюда, с учетом формулы разложения функции $\arcsin x$ в степенной ряд (см. таблицу 3), получим разложение функции $f(x)=\arccos x$ в ряд Маклорена:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \right), \qquad x \in [-1;1] \ .$$

2.11. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{2}{3+x}$.

Решение. Представим $f(x)$ в виде:

$$f(x)=\frac{2}{3+x}=\frac{2}{3\left(1+\frac{x}{3}\right)}=\frac{2}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{x}{3}\right)}.$$

Воспользуемся формулой:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots\ , \qquad -1<x<1,$$

Заменим в этой формуле x на $\dfrac{x}{3}$, тогда получим:

$$f(x)=\frac{2}{3+x}=\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{3}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^n+\ldots\right);$$

или

$$\frac{2}{3+x}=\frac{2}{3}-\frac{2\cdot x}{3^2}+\frac{2\cdot x^2}{3^3}-\frac{2\cdot x^3}{3^4}+\ldots+(-1)^n\frac{2\cdot x^n}{3^{n+1}}+\ldots,$$

где $-1<\dfrac{x}{3}<1$, т. е. $-3<x<3$.

2.12. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\sin^2 x$.

Решение. Воспользуемся формулой понижения степени и запишем $\sin^2 x$ в виде:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$

Заменим $\cos 2x$ его разложением в степенной ряд:

$$\cos 2x = 1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Тогда получим:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{2^2 \cdot x^2}{2!} - \frac{2^4 \cdot x^4}{4!} + \frac{2^6 \cdot x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; +\infty).$$

2.13. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Решение. Воспользуемся разложением функции e^x в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Имеем:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots - 1\right) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \ldots .$$

Используемый нами ряд сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$, следовательно, полученный ряд также будет сходиться при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Применение степенных рядов к приближенным вычислениям определенных интегралов

2.13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,25} \ln(1 + \sqrt{x})dx$, оставив три члена в разложении $\ln(1 + x)$.

Решение. Используем разложение в ряд Маклорена функции $\ln(1 + x)$:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots .$$

Заменив в этой формуле x на $\sqrt{x}$, получим:

$$\ln(1 + \sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2} + \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{n+1}}{n+1} + \cdots .$$

Поэтому,

$$\int\limits_0^{0,25} \ln(1 + \sqrt{x})dx = \int\limits_0^{0,25} \left(\sqrt{x} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2} + \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^4}{4} + \cdots\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{2\sqrt{x^5}}{15} - \frac{x^3}{12} + \ldots\right)\Bigg|_0^{0,25} = \frac{2\sqrt{0,25^3}}{3} - \frac{0,25^2}{4} + \frac{2\sqrt{0,25^5}}{15} - \frac{0,25^3}{12} + \ldots =$$

Оставив три слагаемых, получим:

$$\int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})dx \approx 0,0833 - 0,0156 + 0,0042 = 0,0719.$$

2.14. Вычислить интеграл $\int_0^{0,5} \frac{arctgx}{x}dx$, оставив три члена в разложении $arctgx$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, для этого воспользуемся разложением функции $arctgx$ в ряд Маклорена:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$\frac{arctgx}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n+1} + \ldots \ .$$

Тогда,

$$\int_0^{0,5} \frac{arctgx}{x}dx = \int_0^{0,5}\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n+1} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \ldots\right)\Bigg|_0^{0,5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^5 \cdot 5^2} - \frac{1}{2^7 \cdot 7^2} + \ldots \ .$$

Оставив три слагаемых, получим:

$$\int_0^{0,5} \frac{arctgx}{x}dx \approx 0,5 - 0,0139 + 0,00125 \approx 0,487.$$

2.15. Вычислить интеграл $\int_0^1 \sin x^2 dx$, оставив три члена в разложении $\sin x$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, для этого воспользуемся разложением функции $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Заменим x на x^2:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{\left(x^2\right)^3}{3!} + \frac{\left(x^2\right)^5}{5!} - \frac{\left(x^2\right)^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{\left(x^2\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots =$$

$$= x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ldots \ .$$

Тогда,

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots\right)dx =$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{3!7}+\frac{x^{11}}{5!11}-\frac{x^{15}}{7!15}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{3!7}+\frac{1}{5!11}-\frac{1}{7!15}+\ldots$$

Оставив три слагаемых, получим:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx 0,333-0,023+0,00076=0,31076.$$

Задания для самостоятельной работы к главе 2

2.17. Найти интервал сходимости степенных рядов, применяя признак Даламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 4^n}$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n-2}$ 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)\sqrt{2n+1}}$ 6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot\ln n}$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+2)^n}{5^n}$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$ 9) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{3^{n+1}\cdot n\ln^3 n}$

2.18. Найти интервал сходимости степенных рядов, применяя признак Коши:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^n}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}(x+1)^n}{n^n}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3^n}$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{5^n}$ 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3x)^n$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}\frac{(x+3)^n}{4^n}$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-2)^n}{3^n}$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n^n}$ 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}\frac{x^n}{3^n}$

2.19. Применяя почленное дифференцирование и интегрирование, найти суммы следующих рядов в интервале (–1,1):

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+5)x^{n-1}$; 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{5n}$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{n-1}$.

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{3n+3}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+4)x^{n-1}$.

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{4n}$; 8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{6n}$.

2.20. Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+8}$

2) $f(x)=\dfrac{1}{3-2x}$

3) $f(x)=\cos^2 x$

4) $f(x)=\dfrac{\sin 5x}{x}$

5) $f(x)=\ln(5+x)$

6) $f(x)=(1+x^2)arctgx$

7) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

8) $f(x)=ch^2x+sh^2x$

2.21. Вычислить приближенное значение определенных интегралов, взяв три члена разложения подынтегральной функции в ряд:

1) $\int\limits_{0,5}^{1}\dfrac{e^x}{x}dx$

2) $\int\limits_{0}^{1/2}\dfrac{dx}{1+x^4}$

3) $\int\limits_{0}^{1}\cos x^2 dx$

4) $\int\limits_{0}^{1/2}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

5) $\int\limits_{0}^{0,1}\dfrac{1-e^{-2x}}{x}dx$

6) $\int\limits_{0}^{0,5}\sin(4x^2)dx$

7) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{5}\right)}{x}dx$

8) $\int\limits_{0}^{2,5}\dfrac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$

ПРИЛОЖЕНИЕ
Типовой расчет «Числовые ряды»

Вариант № 1

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2-3n+1}{2n^2+4}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{2n}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n!}$.

В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 2

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n+2}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-1}{2n^4+n}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n+1}\right)^n$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$., применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$.

В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 3

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^4+2n-1}{5n^2+2}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+100}{100n^2-2}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{3n}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3+\ln n)^3}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+3}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 4

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n+2}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4n}{2n^4-1}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2n!}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{2n^2+2}\right)^n$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(7+5\ln n)}$., применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-1}{100n^2+1}$.

В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 5

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5n+6}{10n+101}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{n^5-3n+2}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-2}{n+1}\right)^n$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{\sqrt{n^5+5}}$.
В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 6

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6+2}{3n^6-1}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{4n^3-3}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n(n+2)}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{3+2\ln(n+1)}}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{3n^4+5}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 7

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+5)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{2n+3}{3n+2}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\sqrt{n}+5}{n+4}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n \cdot n!}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2+2}{3n-1}\right)^n$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\sqrt{5+3\ln(n+2)}}$ применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{2n!}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 8

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n-1)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-1}{2n^2+2}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{2}{3^n}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n-1)}{2^n(n+1)}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n-2}\right)^{2n}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n+3)(2+3\ln(n+3))}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5n}{6n^2-1}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 9

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)n}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+n^2-1}{3n^2+4n-5}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{1+3^n}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n}{2^n\cdot\left(3n+2\right)}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n^2-2}{4n^2+5}\right)^{2n}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\left(n+3\right)\left(9+\ln^2\left(n+3\right)\right)}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 10

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n+1)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+3}{3n^4-n}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{3n^3+2}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n^2\cdot 3^n}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n-2}{6n+5}\right)^{2n}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+4\right)\left(4+\ln^2\left(n+4\right)\right)}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+2}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость .

Вариант № 11

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^4}{1+n^4}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3-2}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+3}\right)^{3n}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{(2n+3)\sqrt[4]{(\ln(2n+3))^3}}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 12

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5\sqrt{n}}{2n+1}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{2n^3-1}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3n!}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(3n+2)\sqrt[7]{5+6\ln(3n+2)}}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{100n+1}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 13

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n(n-3)}$.

2. Проверить для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n+1}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+2}{3n^6-1}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{4n}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(3n+4)\sqrt[4]{8+5\ln(3n+4)}}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n}{3n+1}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

.

Вариант № 14

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+2)}$.

2. Проверить для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n/2}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(5n+3)\left(9+2\ln(5n+3)\right)^4}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 15

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+3)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3}{1+n^3}$, выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{n\cdot 3^n}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{3^n}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+1)}$., применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n!}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 16

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n+1)(n+3)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[5]{n^2}+\sqrt[3]{n}}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{1}{n+1}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n!}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n/2}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+3)\sqrt[3]{(\ln(n+3))^4}}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 17

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+2)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{n\cdot 5^n}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n+1}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n+3)\sqrt[3]{(\ln(2n+3))^2}}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+5}{n+2}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость

Вариант № 18

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+3)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+1}{5n^4+n^2+2}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2n)!}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n/2}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{\ln^4 n}}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{6n}{7n+2}$.

Вариант № 19

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(n+2)(n+4)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5\sqrt{n}}{2n+1}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{3n+1}{4n+2}\right)^{4n}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(3n-1)\sqrt[4]{(\ln(3n-1))^3}}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 20

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{6}{(n-1)(n+1)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{2n+1}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$, , применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{4n}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(3n+2)\sqrt[4]{\left(\ln(3n+2)\right)^5}}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+3)}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 21

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(n+2)(n+3)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2n+3}$, , применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2n-1)!}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+3}\right)^{-n^2}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(4n+1)\sqrt[3]{\left(\ln(4n+1)\right)^2}}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{2n-1}}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 22

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+4)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+\sqrt{n}}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+3n+3}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{5n!}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+5)\ln^5(2n+5)}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 23

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(n-1)(n+3)}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+13}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{(2n-1)}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{3n+2}\right)^{n+2}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\ln^4(5n-2)}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{3n-2}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 24

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{7^n}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{3n-1}}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+16}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n!}{(3n-1)}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{4n+2}\right)^{n+1}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)\ln^3(3n-2)}$, применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n+9}}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Вариант № 25

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{2^n}$.

2. Проверить для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{8n+3}$ выполнение необходимого признака сходимости.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^2+2}$, применяя признаки сравнения.

4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$, применяя признак Даламбера.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{n^n}$, применяя радикальный признак Коши.

6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)\ln^5(5n+1)}$., применяя интегральный признак Коши.

7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{3n+5}}$. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

Типовой расчет № 2

Вариант № 1

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$.

2. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x}}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^{0,5} e^{-\frac{1}{5}x^2}dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 2

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)\cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$.

2. Разложить функцию $f(x)=xe^{2x^2}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{2+x^3}}$, оставив три члена разложения.

Вариант № 3

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 9^n}$.

2. Разложить функцию $f(x)=2xe^{-3x}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^{1/3} \frac{arctgx^2}{x}dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 4

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(3n+1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^3}$.

2. Разложить функцию $f(x) = \frac{3}{2+x}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^{\sqrt{3}/3} x^2 arctgxdx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 5

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^n}$.

2. Разложить функцию $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^{0,25} \sin x^2 dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 6

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)\cdot 3^n}$.

2. Разложить функцию $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 7

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)x^n}{5n-3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+1\right)^n}{\sqrt{n}\cdot 2^{n-1}}$.

2. Разложить функцию $f(x)=\sqrt{1+x^3}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^{0,5}\frac{\sin(2x^2)}{x}dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 8

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+3\right)^{n-1}}{n\cdot(2n+3)}$.

2. Разложить функцию $f(x)=\frac{1-e^{-2x}}{x}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$, оставив три члена разложения.

Вариант № 9

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+5\right)^n}{3n}$.

2. Разложить функцию $f(x)=\frac{x}{5+x^2}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_{0,25}^{0,5}\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 10

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \cdot n!$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+6)^n \cdot 2n}{(3n)^4}$.

2. Разложить функцию $f(x) = e^{-3x^2}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_{e}^{e^2} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 11

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+3)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-7)^{n+1}}{3n}$.

2. Разложить функцию $f(x) = x \cdot \ln(1+x^2)$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_{0}^{0,25} e^{-x^2}dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 12

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n (n+2)!$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{(5n-2)\cdot 3^n}$.

2. Разложить функцию $f(x) = \sin 2x - x \cdot \cos 4x$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_{0}^{1} \cos x^2 dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 13

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n^2 \cdot x^n}{3^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-5)^n}{(5n+7)\cdot 3^n}$.

2. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 2x$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^2 \frac{e^x}{x} dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 14

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x-1\right)^{n-1}}{2n-1}$.

2. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{4-x^4}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_{0,25}^{0,5} \cos\frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x^2}$, оставив три члена разложения.

Вариант № 15

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^n}{(3n-1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(4x-3\right)^n}{11^n \cdot n}$.

2. Разложить функцию $f(x) = 3xe^{-3x}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^{0,25} \sin x^2 dx$, оставив три члена разложения .

Вариант №16

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x-2\right)^n}{4^{n+2} \cdot \sqrt{n-3}}$.

2. Разложить функцию $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^{0,5} \frac{arctgx}{x} dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 17

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(2n-1)}{(3n-1)n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3n \cdot 2^n}$.

2. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 18

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{5n}$.

2. Разложить функцию $f(x) = \frac{x}{2-x^2}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int_2^{4} e^{1/x} dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 19

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{3n^3+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-5)^n$.

2. Разложить функцию $f(x) = x \cdot arctgx^2$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^{1} x \cdot \cos x dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 20

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^4}$.

2. Разложить функцию $f(x)=\sqrt{3+x}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_{5}^{10}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 21

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2x^n}{5n\cdot 8^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n+5}$.

2. Разложить функцию $f(x)=\frac{5}{3+x}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_{0}^{0,5}\frac{\sin 3x}{2x}dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 22

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n\cdot 5^n}$.

2. Разложить функцию $f(x)=e^{-x^4}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_{0}^{1}\cos\sqrt{x}\,dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 23

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n^2+2)\cdot 3^n}$.

2. Разложить функцию $f(x)=x\cdot\cos\sqrt{x}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 24

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5n\cdot 8^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2n+5}$.

2. Разложить функцию $f(x)=\sqrt{9+x}$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 \sin x^2\,dx$, оставив три члена разложения.

Вариант № 25

1. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{(7n+4)^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n^2-1)\cdot 5^n}$.

2. Разложить функцию $f(x)=\cos^2 2x$ в ряд Маклорена по степеням x, используя известные разложения, и указать область сходимости.

3. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$, оставив три члена разложения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баврин И.И.* Математический анализ: учебник и практикум для академического бакалавриата / И.И. Баврин. – М.: Изд-во Юрайт, 2017. – 327 с.

2. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. Часть 2 / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-прес, 2017. – 256 с.

3. *Ильин В.А.* Основы математического анализа: учебник для вузов: в 2 ч. Ч. 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Физматлит, 2014. – 648 с.

4. *Натансон И.П.* Краткий курс высшей математики / И.П. Натансон. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. 736 с.

5. Высшая математика для экономических специальностей: учебник и практикум / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшее образование, 2008. – 893 с.

6. *Бермант А.Ф.* Краткий курс математического анализа: учебник для вузов / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – СПб.: Изд-во «Лань», 2006. – 736 с.

7. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. 2 / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2005. – 544 с.

8. *Запорожец Г.И.* Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – СПб.: Изд-во «Лань», 2010. – 464 с.

9. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айриспресс, 2008. – 576 с.

10. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие / Г.Н. Берман. – СПб.: Профессия, 2005. – 432 с.

11. *Лелёвкина Л.Г.* Математический анализ: Дифференциальное исчисление. Часть 1 / Л.Г. Лелёвкина, И.В. Гончарова, Е.А. Комарцова. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2019. – 421с.

12. *Лелёвкина Л.Г.* Математический анализ: Интегральное исчисление. Часть II / Л.Г. Лелёвкина, И.В. Гончарова, Н.М. Комарцов, К.Р. Карабакиров. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2021. – 548 с.

13. *Курманбаева А.К.* Ряды: учеб. пособие / А.К. Курманбаева, Е.А. Комарцова. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2019. – 154 с.

Л.Г. Лелёвкина, А.К. Курманбаева

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
И ПРАКТИКУМЫ ПО РАЗДЕЛУ
«ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ»

Редактор *И.С. Волоскова*
Компьютерная верстка *М.Р. Фазлыевой*
Выпускающий редактор *О.А. Матвеева*

Подписано в печать 25.03.2023.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Офсетная печать.
Объем 7,0 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 75.

Издательство КРСУ
720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44.

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, г. Бишкек, ул. Анкара, 2а.